

# Breve Introdução à Relatividade Especial

Esmerindo Bernardes<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA  
Instituto de Física de São Carlos  
Universidade de São Paulo  
13560-970 São Carlos, SP, Brasil  
(Dated: 20 de Maio de 2019)

A fim de complementar as discussões feitas sobre movimento e suas leis, faremos aqui uma discussão muito breve sobre a relatividade especial, a qual corrige o modelo newtoniano para velocidades próximas à velocidade máxima permitida na nossa natureza (a velocidade da luz). Veremos também a fusão das noções de espaço e tempo por um lado e da fusão entre as noções de energia e massa por outro.

## CONTENTS

I. Espaço + Tempo	1
I.1. Transformações de Galileu	1
I.2. Espaço euclidiano	2
II. Espaço-tempo	3
II.1. Transformações de Lorentz	3
II.1.1. Dilatação temporal	3
II.1.2. Contração espacial	3
II.2. Espaço minkowskiano	4
II.3. Cinemática relativística	5
II.4. Dinâmica relativística	7
II.4.1. $\Delta E = \Delta mc^2$	8
III. Exercícios	9

## I. ESPAÇO + TEMPO

### I.1. Transformações de Galileu

Suponha dois referenciais inerciais quaisquer, digamos  $\mathcal{O}$  e  $\bar{\mathcal{O}}$ , cada um equipado com seu próprio relógio. Considere o referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  em movimento uniforme em relação a  $\mathcal{O}$ . Para simplificar um pouco, vamos supor que os eixos espaciais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do referencial  $\mathcal{O}$  sejam paralelos aos eixos espaciais  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  e  $\bar{Z}$  do referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  em qualquer instante de tempo. Vamos supor também que suas origens coincidam em  $t = \bar{t} = 0$ , onde ambos relógios são sincronizados. Vamos também considerar que o referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  se movimenta ao longo do eixo  $X$  com velocidade constante  $V$ , conforme indicado na Figura 1.

Muito bem. Imagine agora que algum experimento mecânico seja realizado (no vácuo) no referencial em movimento  $\bar{\mathcal{O}}$ . Este experimento pode ser (1) o lançamento ou a queda livre de um objeto sob a ação da gravidade ou (2) o movimento de um corpo preso a uma mola (oscilador harmônico sem atrito) ou (3) o movimento de um

corpo sob a ação da gravidade, porém preso a uma extremidade de uma haste inextensível e de massa nula com a outra extremidade fixa (pêndulo simples sem atrito), para citar apenas três possibilidades. Como os resultados desses experimentos em  $\bar{\mathcal{O}}$  serão vistos no referencial em repouso  $\mathcal{O}$ ? Todos os números serão os mesmos? As trajetórias serão as mesmas? Eventos simultâneos em  $\bar{\mathcal{O}}$  serão vistos também simultaneamente no outro referencial  $\mathcal{O}$ ?

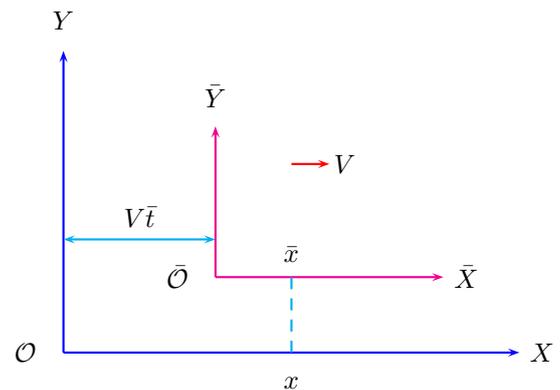


Figura 1. Transformações de coordenadas entre referenciais inerciais. A velocidade relativa entre eles é  $V$ . Os relógios foram sincronizados no momento em que os dois referenciais coincidiram.

Para respondermos estas questões, precisaremos saber primeiramente como relacionar coordenadas nestes dois referenciais. Segundo Newton, esta relação deve cumprir uma exigência fundamental: ela deve preservar a definição de força, ou seja, o produto massa (constante) por aceleração deve ser o mesmo ou proporcionais nos dois referenciais, pois estes dois referenciais são inerciais. Isto é conhecido como o princípio da relatividade de Galileu-Newton:

### Princípio 1

Todas as leis da Mecânica são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência.

Note que Galileu e Newton não ousaram incluir as demais leis físicas, além daquelas da Mecânica, neste princípio. Portanto, se queremos aderir ao princípio da relatividade

\* [sousa@ifsc.usp.br](mailto:sousa@ifsc.usp.br)

de Galileu-Newton, a única possibilidade de efetuarmos uma transformação de coordenadas que preserve a definição de força (portanto as leis da Mecânica) é uma relação linear no tempo e na posição,

$$x = \gamma(\bar{x} + V\bar{t}), \quad (1)$$

quando o referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  estiver movimentando-se no sentido positivo do eixo  $X$  (veja a Figura 1), ou

$$\bar{x} = \gamma(x - Vt), \quad (2)$$

quando o referencial  $\mathcal{O}$  estiver movimentando-se no sentido negativo do eixo  $\bar{X}$ . Note que mantivemos a mesma constante  $\gamma$  nestas duas relações. Isto é razoável, pois estamos considerando que o nosso espaço vazio (o palco de todos os movimentos) seja homogêneo e isotrópico. Ser homogêneo significa que a constante  $\gamma$  não pode depender da posição. Em um espaço isotrópico, a constante  $\gamma$  não pode depender nem da direção nem do sentido de qualquer vetor. Conseqüentemente, se  $\gamma$  tiver qualquer dependência com a velocidade do referencial  $\mathcal{O}$ , poderá ser apenas uma dependência em seu módulo  $V$  (rapidez). Até aqui, não mencionamos qualquer relação entre  $t$  e  $\bar{t}$ , a não ser que  $x = \bar{x}$  em  $t = \bar{t} = 0$ . Quem são os possíveis valores de  $\gamma$ ?

Galileu e Newton fizeram a hipótese de que o tempo flui uniformemente nos dois referenciais, ou seja,  $t = \bar{t}$  sempre. Isto significa que o tempo é absoluto, o mesmo em todos os referenciais inerciais, ou seja, um evento que é simultâneo em um referencial inercial, o será em todos os demais. Newton acreditava também que a existência de um tempo absoluto estivesse ligado com a existência de um Deus supremo. Fazendo  $t = \bar{t}$  em (1) e (2) e depois somando estes dois resultados, obteremos

$$x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1. \quad (3)$$

Também fazendo  $x = \bar{x}$  em  $t = \bar{t} = 0$ , determinamos  $\gamma = 1$ . Também observando Figura 1 e usando geometria plana euclidiana, deduzimos que  $\gamma = 1$  nas relações (1) e (2).

As transformações

$$x = \bar{x} + Vt, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \bar{t}, \quad (4)$$

$$\bar{x} = x - Vt, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t, \quad (5)$$

são conhecidas por transformações de Galileu. Note que derivando no tempo estas equações, obtemos a conhecida regra de composição para velocidades,

$$\bar{v}_x = v_x \pm V. \quad (6)$$

Note também que as transformações de Galileu preservam a aceleração dos corpos. Conseqüentemente, o produto massa (constante) por aceleração é mantido invariante, ou seja a segunda lei é preservada. Naturalmente, estas transformações têm sido verificadas em todos os casos conhecidos, exceto quando o valor de  $V$  é comparável ao valor da velocidade da luz. Surpreso? Isto é realmente surpreendente!

## I.2. Espaço euclidiano

Imagine um espaço tridimensional onde um ponto é localizado pelas coordenadas  $(x, y, z)$  e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx_i dx_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad (7)$$

onde a métrica  $g$  é a identidade. Esta distância infinitesimal (7) é invariante mediante translações e rotações espaciais (independentes do tempo; tempo absoluto). Um espaço deste tipo é denominado de euclidiano. A Mecânica newtoniana está inserida num espaço euclidiano tridimensional equipado com relógios que uma vez sincronizados, assim permanecerão mesmo se estiverem em movimento.

Para mostrar que a distância infinitesimal (7) é um invariante perante rotações (faça o Exercício 1), considere uma rotação em torno do eixo  $z$ ,

$$\bar{x} = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad \bar{y} = x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (8)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de rotação (medido no sentido contrário aos ponteiros de um relógio; regra da mão direita). Agora escreva a distância  $d\bar{s}^2$  no referencial girado e use as transformações de Galileu (8) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo,  $d\bar{x} = dx \cos \theta - dy \sin \theta$  ( $\theta$  é constante) e assim por adiante. Como as diferenciais não “enxergam” constantes, é imediato mostrar que translações não afetam a distância infinitesimal (7), pois elas apenas somam constantes às coordenadas cujas variações serão tomadas em seguida.

No entanto, curiosamente, a distância infinitesimal (7) não é invariante perante às transformações de Galileu (4). Para ver isto, escreva a distância  $d\bar{s}^2$  no referencial em movimento e use as transformações de Galileu (4) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo,  $d\bar{x} = dx - Vdt$  (a velocidade relativa  $V$  é constante) e assim por adiante. Verifique que para (7) ser invariante às transformações de Galileu (4), teríamos de aceitar  $V = 2v_x$ , o que é um absurdo.

A discrepância entre a previsão (6), fruto das transformações de Galileu (4), e experimentos foi consagrada no experimento de Michelson-Morley, realizado pela primeira vez um pouco antes de 1900. Vejamos primeiro o que a teoria de Galileu-Newton prediz quando luz é emitida na origem do referencial em movimento  $\bar{\mathcal{O}}$  e observada em  $\mathcal{O}$  (nosso referencial, “fixo”). No instante  $t$ , a luz está na posição  $\bar{x} = ct$  em  $\bar{\mathcal{O}}$ . Então, no referencial  $\mathcal{O}$ , segundo a transformação (4), ela estará em  $x = \bar{x} + Vt = (c + V)t$ . Portanto, no referencial  $\mathcal{O}$  a luz deve ser vista com uma velocidade  $c + V$ , maior que  $c$ . Entretanto, o experimento de Michelson-Morley diz que a velocidade da luz é a igual a  $c$  em todos os referenciais inerciais! Pronto, a confusão estava feita. Albert A. Michelson, por achar que havia alguma coisa errada em

seu experimento, continuou a repeti-lo por quase 30 anos! Ele recebeu o prêmio Nobel em 1907 (por estas medidas e por ter inventando o interferômetro, um instrumento ótico de alta precisão).

## II. ESPAÇOTEMPO

### II.1. Transformações de Lorentz

No entanto, ainda em 1905, Albert Einstein, um jovem físico, até então completamente desconhecido, disse de forma arrebatadora que a nossa natureza é assim: a velocidade da luz no vácuo é independente do movimento da fonte, ou seja, ela é uma constante universal. Sem ter conhecimento do experimento de Michelson-Morley. Simples assim. E concluiu: então não poderemos ter  $\gamma = 1$  e nem  $\bar{t} = t$ ! Devemos ter  $x = ct$  em  $\mathcal{O}$  e  $\bar{x} = c\bar{t}$  em  $\bar{\mathcal{O}}$ . Substituindo estes valores em (1) e (2), teremos (faça o Exercício 2)

$$ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t, \quad (9)$$

da qual resulta (a menos de um sinal)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (10)$$

Note que  $\gamma$  depende somente do módulo da velocidade relativa entre os referenciais inerciais, como previsto. A presença da velocidade da luz é uma surpresa enorme. Podemos ver então que no limite de baixa velocidade  $V \ll c$ ,  $\beta \rightarrow 0$  e  $\gamma \rightarrow 1$ , que é o seu valor no caso clássico (3) se escolhermos  $\gamma$  positivo em (10). No entanto, quando  $V$  é comparável a  $c$ , temos de usar as transformações (1) e (2) com  $\gamma$  dado em (10). Relações similares para o tempo visto nos dois referenciais podem ser obtidas eliminando-se ou  $x$  ou  $\bar{x}$  em (1) e (2) (faça o Exercício 3),

$$\bar{x} = \gamma(x - \beta ct), \quad c\bar{t} = \gamma(ct - \beta x), \quad (11)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + \beta c\bar{t}), \quad ct = \gamma(c\bar{t} + \beta \bar{x}). \quad (12)$$

com  $\bar{y} = y$  e  $\bar{z} = z$ .

Estas transformações foram apresentadas por Einstein em 1905 e são conhecidas por transformações de Lorentz (por motivos diferentes dos relacionados aqui e anteriores a 1905). Em (11), expressamos as coordenadas do referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  em termos das coordenadas do referencial  $\mathcal{O}$ . As transformações inversas (12) são obtidas simplesmente invertendo o sinal de  $V$  (e, conseqüentemente, de  $\beta = V/c$  também).

Como as relações (11)–(12) misturam as posições espaciais com o tempo (e vice-versa), o tempo não é absoluto, como Galileu e Newton imaginaram (e o resto do mundo). Isto significa que um acontecimento não precisa ser simultâneo em todos os referenciais inerciais. Isto trará conseqüências ainda mais surpreendentes, como veremos a seguir.

Naturalmente, as transformações (11) são idênticas às transformações (4) quando  $V \ll c$  (ou  $\beta \ll 1$ ). Este é um exemplo onde uma teoria foi devidamente corrigida: para velocidades baixas (comparado à velocidade da luz) podemos usar a mecânica newtoniana; para velocidades altas devemos usar a mecânica relativística. Naturalmente, nossas experiências sensoriais estão imersas no mundo newtoniano.

#### II.1.1. Dilatação temporal

Suponha um relógio em repouso no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$ . Permanecendo sempre no mesmo lugar ( $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ), marque um determinado intervalo de tempo,  $\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$ , usando este mesmo relógio. Este intervalo de tempo medido com o relógio em repouso será denominado de tempo próprio. No outro referencial  $\mathcal{O}$ , aquele relógio usado para medir o tempo próprio em  $\bar{\mathcal{O}}$  será visto em movimento. Portanto os dois eventos que determinaram o intervalo de tempo  $\bar{T}$  serão vistos no referencial  $\mathcal{O}$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  (em posições diferentes), correspondendo a um intervalo  $T = t_2 - t_1$ . Usando as transformações (12) em  $T$ , encontraremos (faça o Exercício 5)

$$T = \gamma \bar{T}. \quad (13)$$

Esta relação nos mostra que  $T > \bar{T}$ , ou seja, que o intervalo de tempo  $T$  medido (calculado) no referencial  $\mathcal{O}$  é maior que o intervalo de tempo  $\bar{T}$  medido no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$ . Isto significa que o relógio no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  em movimento é visto como mais lento: o tempo passa mais devagar no referencial em movimento. Este efeito é conhecido por dilatação temporal.

Os observadores solidários ao referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  chegarão à mesma conclusão a respeito de um relógio usado para medir um tempo próprio em  $\mathcal{O}$ . Há nenhuma contradição nisto. O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inerciais distintos irão medir intervalos de tempo maiores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

Estas previsões, a dilatação temporal, é confirmada em experimentos usando partículas elementares em aceleradores de partículas (para saber mais sobre partículas elementares, consulte [Aventuras das Partículas](#), mantido pelo Instituto de Física Teórica (IFT), Unesp). Em particular, visite o site [Experimento com Múons](#).

#### II.1.2. Contração espacial

Suponha uma régua em repouso no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$ , de comprimento  $\bar{L} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ . Este é o comprimento próprio (régua em repouso). Uma vez que a régua está em repouso, a medida das posições  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  das extremidades podem ser efetuadas em tempos diferentes. No outro referencial  $\mathcal{O}$ , esta régua será vista em movimento, por isto

a leitura de suas extremidades deverão ser efetuadas no mesmo instante de tempo ( $t_1 = t_2$ ). Assim, o comprimento da régua medido em  $\mathcal{O}$  será  $L = x_2(t) - x_1(t)$ . Usando as transformações (11) em  $\bar{L}$ , encontraremos (faça o Exercício 5)

$$L = \frac{\bar{L}}{\gamma}. \quad (14)$$

Esta relação nos mostra que  $L < \bar{L}$ , pois  $\gamma > 1$ . Portanto, a régua no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  em movimento será vista com um comprimento menor no outro referencial  $\mathcal{O}$ . Este resultado é conhecido por **contração espacial**.

Os observadores solidários ao referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  chegarão à mesma conclusão a respeito de uma régua usada para medir um comprimento próprio em  $\mathcal{O}$ . Novamente, há nenhuma contradição nisto. O comprimento próprio será sempre o maior comprimento e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inerciais distintos irão medir comprimentos menores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

## II.2. Espaço minkowskiano

Imagine um espaço quadridimensional onde um ponto (evento) é localizado pelas coordenadas

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \quad (15)$$

e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $x^0 = ct$ . A métrica  $g_{\mu\nu}$  tem os seguintes elementos não-nulos (diagonal):

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1. \quad (17)$$

Um espaço deste tipo é denominado de **espaço de Minkowski**.

Neste espaço, as coordenadas  $x^\mu$  de um evento são denominadas de **contra-variantes** e as coordenadas

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (18)$$

são denominadas de **co-variantes**. Note a presença implícita de um somatório na última igualdade em (16) e também em (18). O sinal de somatório será omitido sempre que tivermos dois índices, um contra e outro co-variante, numa mesma expressão (convenção de Einstein). A métrica (17) deve ser usada para comutarmos entre índices contra e co-variantes (diz-se da subida e descida de índices).

A métrica (17) deve ser usada também para alterar seus próprios índices:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu_\mu, \quad g_\mu^\nu = (g^T)^\nu_\mu = \delta_\mu^\nu, \quad (19)$$

onde  $\delta_\mu^\nu$  é o delta de Kronecker,

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = \mu, \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu. \end{cases} \quad (20)$$

Em geral, objetos com dois índices, como a métrica (17), podem ser vistos como matrizes. O índice na esquerda será o índice das linhas e o índice na direita será o índice das colunas, independentemente se os índices são contra ou co-variantes.

As transformações de Lorentz (11)–(12) deixam a distância infinitesimal (16) invariante (faça o Exercício 4). Portanto estas transformações devem representar algum tipo de rotação. Antes porém, vamos reescrevê-las numa notação covariante:

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma \bar{x}^0 + \beta \gamma \bar{x}^1, & x^1 &= \beta \gamma \bar{x}^0 + \gamma \bar{x}^1, \\ x^2 &= \bar{x}^2, & x^3 &= \bar{x}^3. \end{aligned} \quad (21)$$

Por ser uma transformação linear entre coordenadas, melhor expresá-la na forma matricial

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{x}^\nu, \quad (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Fisicamente, a transformação inversa é dada pela troca  $\beta \rightarrow -\beta$  aplicada à matriz (22). Qual será a forma covariante da matriz representando esta transformação inversa? Por inspeção, encontramos

$$(\Lambda_\mu^\nu) = (g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Esta matriz é a inversa daquela apresentada em (22). Porém, para escrevermos o produto matricial entre elas numa forma covariante, precisaremos do transposto de (23). Assim, a matriz da transformação inversa é

$$(\Lambda^{-1\mu}_\nu) = (\Lambda_\nu^\mu)^T = (g_{\nu\alpha} \Lambda^{T\alpha}_\beta g^{\beta\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

ou, removendo os índices,

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g. \quad (25)$$

Note a semelhança (e a diferença) desta relação com uma matriz ortogonal  $R$  (representando uma rotação no espaço euclidiano),  $R^{-1} = R^T = g^{-1} R^T g$  ( $g$  é a identidade no espaço euclidiano). Note também que a inversa

é calculada usando uma conjugação (transformação de similaridade), um dos procedimentos mais úteis em matemática. A conjugação é equivalente a levarmos um eletrodoméstico para ser consertado numa oficina e depois o retornarmos para casa (analogia feita pelo Prof. Antônio Conde).

A transformação linear (22) representa uma “rotação” no plano  $ct - x$ , onde

$$\gamma = \cosh \psi, \quad \beta\gamma = \sinh \psi, \\ \cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1, \quad \tanh \psi = \beta. \quad (26)$$

Novamente, esta rotação no espaço de Minkowski, realizada por funções trigonométricas (ou circulares), lembra uma rotação no espaço euclidiano, realizadas por funções hiperbólicas.

A semelhança (ou diferença) entre as funções circulares e hiperbólicas impressionam. As funções circulares representam um círculo unitário,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad (27)$$

onde o ângulo  $\theta$  é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição  $(x, y)$ , o eixo  $x$  (referência) e o arco circular compreendido. As funções hiperbólicas representam uma hipérbole unitária,

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x = \cosh \psi, \quad y = \sinh \psi, \quad (28)$$

com

$$\cosh \psi = \frac{1}{2}(e^\psi + e^{-\psi}), \quad \sinh \psi = \frac{1}{2}(e^\psi - e^{-\psi}), \quad (29)$$

onde o ângulo  $\psi$  é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição  $(x, y)$ , o eixo  $x$  (referência) e o arco hiperbólico compreendido. Desta semelhança podemos perceber o quão diferentes são estes dois espaços.

Suponha a existência de três referenciais inerciais,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , alinhados como na Figura 1. O referencial  $A$  tem uma velocidade relativa a  $B$  dada por  $V$  e o referencial  $B$  tem uma velocidade relativa a  $C$  dada por  $U$ . Quem é a velocidade relativa  $W$  entre  $A$  e  $C$  em termos das velocidades  $U$  e  $V$ ? Em outras palavras, a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz,  $A \xrightarrow{\Psi} B$  e  $B \xrightarrow{\Phi} C$ , é também uma transformação de Lorentz,  $A \xrightarrow{\Omega} C$ ? Esta situação é melhor analisada em termos dos ângulos de rotação

$$\tanh \psi = \frac{V}{c}, \quad \tanh \phi = \frac{U}{c}, \quad \tanh \omega = \frac{W}{c}, \quad (30)$$

associados a cada uma destas transformações. Assim, os elementos da matriz resultante da aplicação sucessiva das transformações de Lorentz  $A \xrightarrow{\Psi} B$  e  $B \xrightarrow{\Phi} C$  são

$$\Omega^\mu{}_\nu(\omega) = \Psi^\mu{}_\alpha(\psi)\Phi^\alpha{}_\nu(\phi), \quad (31)$$

onde

$$(\Omega^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi. \quad (32)$$

Da lei de composição  $\omega(\psi, \phi) = \psi + \phi$  em (32),

$$\tanh \omega = \tanh(\psi + \phi) = \frac{\tanh \psi + \tanh \phi}{\tanh \psi \tanh \phi + 1}, \quad (33)$$

obtemos uma relação entre as velocidades relativas correspondentes,

$$W = \frac{U + V}{1 + \frac{UV}{c^2}}. \quad (34)$$

Esta é a lei de composição de velocidades relativísticas (todas na mesma direção). Quando as velocidades relativas são pequenas, recuperamos a lei de composição newtoniana ( $U + V$ ). Note que mesmo impondo  $U = V = c$ , conseguimos apenas  $W = c$ . Isto mostra que a velocidade da luz é um invariante, uma constante universal, independente do movimento de sua fonte. Mostra também que não conseguimos produzir uma velocidade superior à da luz. A velocidade da luz é um limite superior para velocidades (espero que não seja definitivo).

O resultado em (32) mostra que a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz é também uma transformação de Lorentz; ou seja, as transformações de Lorentz formam um grupo (já verificamos a existência da identidade,  $\omega = 0$ , e da inversa,  $-\omega$ ). Neste caso particular, onde alinhamos os eixos dos referenciais, este grupo é abeliano (comutativo). Além disso, como a função  $\omega(\psi, \phi) = \psi + \phi$  em (32) é analítica, então trata-se de um grupo de Lie. Este grupo é não-compacto, pois os ângulos hiperbólicos  $\psi, \phi, \dots$  não estão limitados superiormente. Compare este cenário com aquele das rotações em torno de um eixo (fixo): elas formam também um grupo de Lie, porém compacto, pois o ângulo  $\theta$  pode ser limitado ao intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

### II.3. Cinemática relativística

Neste espaço da relatividade especial, o espaçotempo de Minkowski, o tempo junta-se às demais coordenadas espaciais e perde o status de absoluto. Se na mecânica newtoniana o tempo absoluto é o parâmetro natural da representação paramétrica de uma trajetória, na mecânica relativística esse parâmetro natural é o próprio comprimento  $s$  da trajetória. O comprimento de um trecho infinitesimal é dado por (16),

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ = (cdt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2, \quad (35)$$

onde  $v = \|\vec{v}\|$  é o módulo (rapidez) do vetor velocidade (de um corpo) e

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (36)$$

Embora esse corpo possa estar acelerado, podemos associar a ele um referencial inercial a cada instante, sendo  $v$  a sua velocidade relativa. No espaçotempo de Minkowski, taxas de variação em relação ao comprimento infinitesimal

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} \quad (37)$$

definem 4-velocidade e 4-aceleração,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}, \quad (38)$$

respectivamente, cujas componentes são (verifique)

$$(u^\mu) = \gamma \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} (w^\mu) &= \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3} \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma^2 \left(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\right) \\ &= \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^3} (u^\mu) + \gamma^2 \left(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Esses dois 4-vetores possuem algumas propriedades interessantes e nada intuitivas. A 4-velocidade é adimensional e unitária:

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\alpha dx_\alpha}{ds^2} = 1. \quad (41)$$

A 4-aceleração tem dimensão de inverso de comprimento, é ortogonal à 4-velocidade,

$$u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \frac{du_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u^\alpha u_\alpha) = 0, \quad (42)$$

e de módulo dado por

$$w^\alpha w_\alpha = -\frac{\gamma^4}{c^4} \left[ a^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \right]. \quad (43)$$

Como será vista no referencial  $\mathcal{O}$  a velocidade de um determinado corpo movendo-se com velocidade  $\bar{v}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$  no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$ , este movendo-se com velocidade constante  $V$  em relação a  $\mathcal{O}$ ? Vejamos. A componente  $x$  da velocidade deste corpo em  $\mathcal{O}$  é definida como  $v_x = dx/dt$ , ou seja, a razão entre as diferenciais  $dx$  e  $dt$ . Então, usando as transformações (11)–(12), teremos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta c d\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c} d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_x + V}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}. \quad (44)$$

Fazendo o mesmo para as demais componentes, teremos

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\bar{v}_y}{\gamma \left(1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}\right)}, \quad (45)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{v}_z}{\gamma \left(1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}\right)}. \quad (46)$$

Note que  $\bar{v}_x = c$  implica em  $v_x = c$ . Note também que a regra de adição de velocidades (44) é a mesma encontrada em (34). A regra relativística de composição de velocidades (44)–(46) nunca fornece uma velocidade relativa maior que a velocidade da luz.

Uma situação interessante, análoga ao movimento “queda livre” no cenário newtoniano, é o movimento relativístico de um corpo sujeito a uma aceleração constante. No referencial do corpo, a sua velocidade (espacial) é nula. Portanto, de (40) sua 4-aceleração será  $(\bar{w}^\mu) = (0, \bar{g}/c^2)$ , cujo módulo é  $\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -g^2/c^4$ . Suponha também que  $g$  seja constante (o equivalente de uma queda livre). Como o módulo de um 4-vetor é um invariante, então o módulo da 4-aceleração em (43) deve ser igual a  $-g^2/c^4$ . Sendo  $g$  constante, podemos alinhar os vetores espaciais velocidade e aceleração,  $(\vec{v} \cdot \vec{a})^2 = (va)^2$  e  $a = \dot{v}$ , onde  $\dot{v}$  significa uma derivada temporal. Neste caso, a expressão do lado direito em (43) simplifica para (verifique)

$$w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3 \dot{v}}{c^2}\right)^2 = \bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\left(\frac{g}{c^2}\right)^2, \quad (47)$$

onde impusemos também que este módulo é uma constante e invariante. Disto resulta a EDO

$$\frac{\dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g, \quad (48)$$

cuja solução é (verifique)

$$\gamma(v) v = gt, \quad v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}, \quad (49)$$

onde impusemos  $v(0) = 0$  como condição inicial. No regime não-relativístico,  $gt/c \ll 1$ , recuperamos uma velocidade linear no tempo,  $v = gt$ , e, se formos suficientemente pacientes, poderemos ter  $v > c$ . No regime relativístico, mesmo tendo um tempo de vida tendendo ao infinito, o máximo que conseguiremos é  $v \rightarrow c$  (verifique), mostrando que mesmo num movimento acelerado (aceleração constante), não conseguimos ultrapassar a velocidade da luz. A velocidade da luz aparece aqui como uma velocidade terminal, característica de objetos em queda livre na presença de uma atmosfera.

Para esse caso unidimensional,  $v = \dot{r}$ , onde  $r$  é a distância radial (ao longo do eixo  $x$ , por exemplo). Assim podemos integrar  $v(t)$  em (49) para obter como a posição varia com o tempo (verifique):

$$r(t) = \int_{t=0}^t v(t) dt = \frac{c^2}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (50)$$

Note que esta expressão tem  $ct$  como assíntota; é como se a aceleração desaparecesse depois de um tempo longo, como ocorre no movimento de objetos em queda livre na presença de uma atmosfera. Isto é condizente com o fato

da velocidade (49) ter  $c$  como assíntota. Resta calcular o tempo próprio deste objeto sujeito a esta aceleração constante  $g$ . Supondo que o objeto esteja na origem de seu próprio referencial, então da invariância do intervalo (16), reescrito na forma (35),

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} = cd\tau, \quad (51)$$

podemos calcular o tempo próprio  $\tau$  do objeto (verifique),

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{c}{g} \sinh^{-1}\left(\frac{gt}{c}\right). \quad (52)$$

Esta expressão deve ser comparada com  $t$ , o tempo no nosso referencial. Em particular, após um tempo  $t$  longo, o tempo próprio tem  $(c/g)\ln(2gt/c)$  como assíntota, mostrando que o tempo próprio  $\tau$  transcorre de forma mais lenta que o nosso tempo  $t$ .

#### II.4. Dinâmica relativística

Podemos usar a 4-velocidade em (39) para definir o 4-momentum linear

$$p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \quad (53)$$

onde  $m$  é a massa do objeto. Note que esse 4-vetor tem as dimensões de momentum linear. É muito interessante observar sua componente temporal,  $p^0 = mc\gamma$ , multiplicada pelo velocidade da luz (que produz uma quantidade com dimensão de energia), para velocidades não-relativísticas (verifique),

$$cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (54)$$

O primeiro termo  $mc^2$  é denominado de energia de repouso. O segundo termo é a energia cinética newtoniana. Por isso, a quantidade

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 \quad (55)$$

é denominada de energia (mecânica). A energia relativística é não-nula mesmo na ausência de movimento, resultando na energia de repouso  $\mathcal{E} = mc^2$ , a qual depende diretamente da massa inercial do objeto. Isto indica que massa e energia são manifestações de uma mesma quantidade. Sabemos hoje que podemos transformar uma na outra. Um exemplo dessa transformação é a energia liberada na quebra (junção) de átomos grandes (pequenos), um processo conhecido por fissão (fusão) nuclear.

O 4-momentum linear (53) reescrito em termos da energia e do momentum linear relativísticos,

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right), \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (56)$$

cuja intensidade

$$p^\mu p_\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad (57)$$

e denominada de relação de dispersão relativística. Por inspeção das definições de energia (55) e momentum linear (56) relativísticos, encontramos

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}. \quad (58)$$

Esta relação não menciona a massa  $m$  diretamente e nos diz que um objeto com rapidez  $|\vec{v}| = c$  tem momentum  $p = \mathcal{E}/c$ , que é a componente temporal do 4-momentum em (56). Esta é a relação de dispersão adequada para objetos que possuem massa nula, como o fóton (e neutrinos).

É possível construir uma versão relativística de segunda lei de Newton, onde força se iguala à taxa de variação do momentum linear,

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{ds} = mcw^\mu, \quad (59)$$

onde a última igualdade é válida somente quando a massa  $m$  for constante. Note as dimensões de massa por tempo desse quadrvetor força. Para massa constante, os quadrvetores força e momentum linear são ortogonais,

$$p_\alpha F^\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (mc)^2 = 0. \quad (60)$$

Podemos usar as componentes do quadrvetor momentum linear dadas em (56) para escrevermos as componentes do quadrvetor força,

$$(F^\mu) = \frac{\gamma}{c} \left( \frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F} \right), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (61)$$

O princípio da relatividade de Galileu-Newton agora deve ser enunciado na seguinte forma:

#### Princípio 2 (Relatividade de Einstein)

1. Todas as leis físicas são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência;
2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os sistemas inerciais.

Este princípio é conhecido como o princípio da relatividade de Einstein. Note que ele é mais geral que o princípio da relatividade de Galileu-Newton (Princípio 1), pois agora todas as leis físicas foram devidamente incluídas.

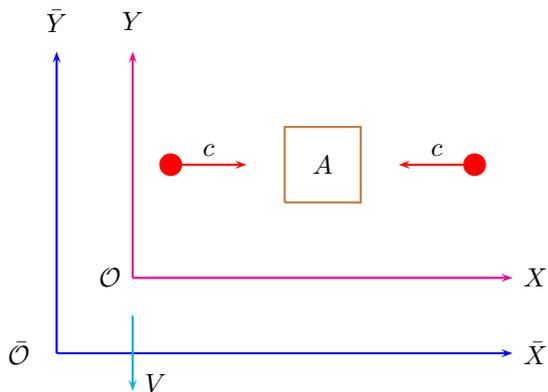
II.4.1.  $\Delta E = \Delta mc^2$ 

Figura 2. Colisão entre um corpo  $A$  e dois fótons vista por dois referenciais inerciais em movimento relativo com  $V \ll c$ . O corpo  $A$  está em repouso no referencial  $\mathcal{O}$  e tem massa  $M$  neste referencial.

Tudo que tem massa, possui esta energia  $\Delta E = \Delta mc^2$  armazenada. Até a descoberta desta relação, acreditava-se na conservação da energia e da massa separadamente. Hoje sabemos que massa e energia são manifestações de uma mesma quantidade física (ainda sem nome!). Seguindo o próprio Einstein, é instrutivo realizarmos uma derivação elementar desta equivalência entre massa e energia. Consideremos um sistema como ilustrado na Figura 2. O corpo  $A$  está em repouso no referencial  $\mathcal{O}$  e tem massa  $M$ . Neste mesmo referencial, observamos dois fótons (luz) movendo-se na mesma direção mas em sentidos opostos, os quais serão absorvidos pelo corpo  $A$ . Supondo que cada fóton tenha uma energia igual a  $\mathcal{E}/2$ , o corpo  $A$  terá sua energia aumentada por  $\Delta E = \mathcal{E}$ .

O fóton é uma partícula curiosa, pois ele não tem carga elétrica e nem massa de repouso, isto é, um fóton parado em algum referencial inercial teria massa nula. No entanto ele só pode estar em movimento! Mas como, se ele não tem massa? Mesmo não tendo massa, o fóton pode ter então uma quantidade de movimento não-nula! O momentum linear do fóton é a sua energia dividida pela velocidade da luz (no vácuo). Devemos lembrar que o fóton carrega a menor quantidade de energia em um feixe luminoso. Esta energia depende apenas da frequência  $\nu$  da luz e da constante de Planck  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js,  $\mathcal{E} = h\nu$ . Por isso ele é denominado de **quantum** de luz (ou da radiação eletromagnética). O fóton foi descoberto por Max Planck em 1900 (Planck recebeu o prêmio Nobel em 1918 por esta descoberta). Coube a Einstein esclarecer a natureza corpuscular (composta de muitos fótons) da luz em 1905 (ele recebeu o prêmio Nobel em 1921, por esta e outras contribuições à física teórica).

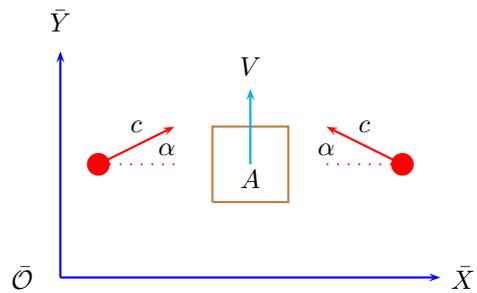


Figura 3. Colisão entre um corpo  $A$  e dois fótons vista pelo referencial inercial em movimento  $\bar{\mathcal{O}}$  com  $V \ll c$ .

De volta ao nosso experimento: uma colisão entre três corpos, onde um dos corpos (o corpo  $A$ ) absorve dois fótons. Estes três corpos estão isolados. Portanto, de acordo com a segunda lei (princípio 2 do Cap. 2) há conservação do momentum linear. Como o momentum linear é um vetor, devemos olhar para as três direções em cada referencial. No referencial  $\mathcal{O}$  onde o corpo  $A$  está em repouso, a componente no eixo  $X$  do momentum linear total é nula, pois cada fóton tem  $p_x = \mathcal{E}/2c$ , mas em sentidos opostos e o corpo  $A$  está em repouso. Depois da colisão, eles são completamente absorvidos e, por simetria, o corpo  $A$  continua em repouso. Portanto há conservação da componente  $X$  do momentum linear. Como não há movimento nas demais direções ( $Y$  e  $Z$ ), não precisamos nos preocupar como as respectivas componentes do momentum linear.

Passemos agora para o outro referencial inercial em movimento,  $\bar{\mathcal{O}}$ . Este referencial está em movimento uniforme ao longo eixo  $Y$ , como indicado na Figura 2. Neste referencial em movimento, nosso experimento é visto como mostrado na Figura 3. Considerando que o fator  $\beta = V/c$  é pequeno, podemos aproximar o ângulo  $\alpha$  pelo seu seno,

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{c} \simeq \alpha. \quad (62)$$

Assim, antes da colisão, o momentum linear total no eixo  $\bar{Y}$  é

$$P_{\bar{y}}^{(a)} = MV + 2\left(\frac{\mathcal{E}}{2c} \sin(\alpha)\right) = MV + \frac{\mathcal{E}}{c^2}V. \quad (63)$$

Na verdade, tanto a massa  $M$  do corpo  $A$  quanto o momentum linear do fóton  $\mathcal{E}/2c$  no referencial  $\bar{\mathcal{O}}$  deveriam sofrer correções relativísticas. No entanto, estas correções são muito pequenas se  $\beta = V/c$  é pequeno, que é o caso em questão (veja o Exercício 8). Bem e depois da absorção? Vimos no referencial em repouso  $\mathcal{O}$  que o corpo  $A$  permanece em repouso após a colisão dos dois fótons. Portanto ele terá de continuar com a velocidade  $V$  ao longo do eixo  $\bar{Y}$ , como indicado na Figura 3, mesmo após a colisão (explique). Após a colisão os dois fótons não existem mais, devido à absorção. Então, para não concluirmos que os fótons não existiam antes da colisão devido à conservação do momentum linear, ou então para

não concluirmos que a conservação do momentum linear está errada, temos de supor uma massa  $M' \neq M$  para o corpo  $A$  após a colisão. Assim, após a colisão o momentum linear total no eixo  $\tilde{Y}$  é  $P_{\tilde{y}}^{(d)} = M'V$ . Como o momentum linear deve ser conservado, pois não existem forças externas, então

$$MV + \frac{\mathcal{E}}{c^2}V = M'V, \quad (64)$$

de onde obtemos

$$\Delta M = M' - M = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (65)$$

Este resultado está nos dizendo que a energia  $\Delta E$ , absorvida ou liberada por um corpo, é equivalente a uma variação  $\Delta m$  na sua massa de repouso  $m$ ,  $\Delta E = \Delta m c^2$ . Veja o Exercício 10 para um exemplo numérico. Esta relação entre massa e energia explica porque o fóton tem uma quantidade de movimento, mesmo não tendo uma massa de repouso (como a nossa): ele tem energia. Não poder (nunca) estar parado, é o preço que ele paga por não ter uma massa de repouso, ele precisa estar sempre em movimento.

### III. EXERCÍCIOS

#### Exercício 1

Mostre que as transformações de Galileu (4) não deixam a distância infinitesimal (7) invariante. Mostre que as rotações (8) deixam a distância infinitesimal (7) invariante (considere também  $dt = 0$ ).

#### Exercício 2

Mostre que as relações (9) estão corretas e determine explicitamente o valor de  $\gamma$ .

#### Exercício 3

Determine explicitamente as transformações para o tempo, mostradas na segunda coluna das Eqs. (11) e (12), a partir das relações (1) e (2).

#### Exercício 4

Mostre que as transformações de Lorentz (11)–(12) deixam a distância infinitesimal (16) invariante.

#### Exercício 5

Determine explicitamente as relações (14) e (13).

#### Exercício 6

Determine explicitamente os resultados (44), (45) e (46).

#### Exercício 7

Quais são os valores relativos das contrações espacial ( $\tilde{L}/L$ ) e temporal ( $\tilde{T}/T$ ) quando  $\beta = 0.3$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\beta = 0.9$  e  $\beta = 0.99$ ?

#### Exercício 8

Mostre, usando a série de Taylor, que a correção relativística (10) pode ser escrita na forma de uma série de potências quando  $\beta \ll 1$ ,

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4. \quad (66)$$

#### Exercício 9

Considere a partícula denominada de múon. Ela tem a mesma carga de um elétron, mas uma massa cerca de 200 vezes maior. Ela é instável: após o tempo  $\tilde{L} = 2.2 \mu\text{s}$  (medido no referencial do múon (lento) em laboratórios) ela se transforma (decai) em outras partículas. Quando o múon vem de raios cósmicos, ele penetra nossa atmosfera com uma velocidade  $V = 0.99c$  e chega até o solo em grandes quantidades. Explique como o múon chega até a superfície (poucos quilômetros abaixo do início da nossa atmosfera).

#### Exercício 10

O isótopo  $^{216}\text{Po}$  do átomo de polônio, número atômico  $Z = 84$ , massa atômica 216.001889 u.m.a., foi descoberto por Marie Curie em 1893, como um átomo radioativo. Pela descoberta de átomos radioativos, ela e seu marido (Pierre) receberam o prêmio Nobel em 1903. Vale mencionar que ela recebeu um segundo prêmio Nobel em 1911 pela descoberta do polônio. O processo de desintegração do polônio é



Sabendo que a massa atômica do chumbo  $^{212}\text{Pb}$  é 211.991872 u.m.a. e a do hélio é 4.002602 u.m.a. e que uma unidade de massa atômica (u.m.a) vale  $1.66 \times 10^{-27}$  kg, calcule a energia liberada neste processo radioativo. Esta energia é usada na forma de energia cinética pelos produtos da reação nuclear.