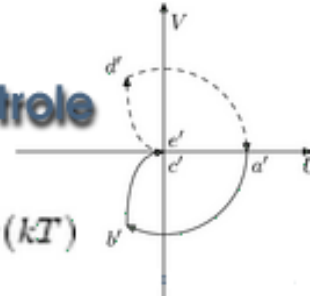


Map2321

MAP2321 Técnicas em Teoria do Controle

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s(s+1)} \\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+1)} \\ \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix} r(kT)$$



Se você quiser editar leia as Dicas de formatação deste wiki, e mãos à obra!

Aspectos históricos da teoria de Controle

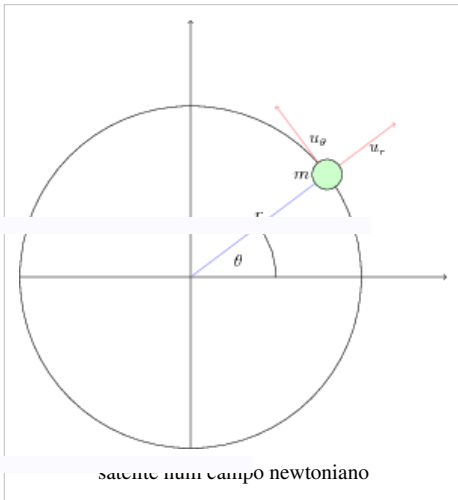
Em praticamente todos os sistemas da natureza há a possibilidade de intervenção que permite exercer algum controle sobre o sistema. Aspectos tecnológicos nos fazem procurar uma forma de exercer este controle automaticamente. É o que chamaremos de retroalimentação do sistema.

Basicamente a origem da teoria de controle são os sistemas de regulação, isto é, procura-se desenvolver um processo automático para que um sistema fique numa situação de equilíbrio. Assim um sensor detecta se o sistema está se desregulando e um controlador atua automaticamente para restabelecer o equilíbrio. Claro que muitos mecanismos engenhosos foram desenvolvidos durante milênios para resolver este problema, porém um caso interessante era o de controle de velocidade de moinhos de vento. Huygens inventou um instrumento conhecido como flyball que na prática resolvia o problema. Esta mesma idéia do flyball foi usada depois por Watt em máquinas para o controle de fluxo de vapor. Este modelo que funcionava na prática tinha um problema de excesso de vibração para velocidades muito altas. Foi Maxwell quem elaborou um modelo matemático para o flyball e colocou o problema de eliminação das vibrações como um problema de estabilização. Este foi, pode-se dizer, o primeiro problema matemático da teoria de controle.

No começo do século XX, o desenvolvimento das redes de comunicações telefônicas, propiciou o aparecimento de novos modelos e a utilização de métodos da teoria de funções a variáveis complexas para eliminação de ruídos e filtragens de sinais. Os trabalhos pioneiros nesta linha deveu-se a Black, Bode e Nyquist do grupo do laboratório Bell. O conjunto de métodos desenvolvidos por eles influenciou bastante a engenharia e é chamado de teoria de controle clássica. Isso foi mais ou menos em 1930. Depois da segunda guerra mundial os métodos de otimização ganharam importância e é um mérito da teoria de Pontriaguin o estudo da teoria de controle ótimo. O desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos propiciou uma nova abordagem para os sistemas de controles lineares. Assim nas décadas de 1960 e 1970 desenvolveu-se bastante uma teoria estrutural dos sistemas de controle. E nesta abordagem "moderna" baseada no espaço de estados dos sistemas são importantes os conceitos de controlabilidade e observabilidade introduzidos por Kalman. No final do século passado desenvolveram-se os métodos geométricos para o estudo de sistema de controle não linear. Em todos estes tópicos há ainda pesquisa bastante ativa. --Patonelli 15h27min de 24 de agosto de 2009 (UTC)patonelli

Exemplos de sistemas de controle

Um satélite simples num campo newtoniano



Uma partícula de massa m está sob ação de um campo de acelerações central newtoniano. Além disso podemos colocar dois controles independentes, um na direção radial e outro na direção tangencial u_r e u_θ respectivamente. A equação dinâmica deste sistema é dada pela segunda lei de Newton:

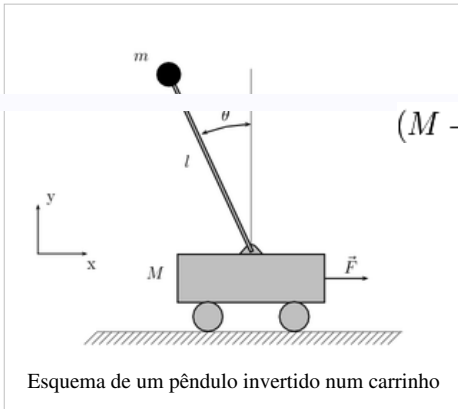
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \left(-\frac{k}{r^2} + u_r\right)\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta$$

fazendo a massa $m = 1$ para que eu não tenha que ficar digitando coisas a mais. Podemos reescrever as equações em coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + u_r \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta\end{aligned}$$

Estas duas equações nos dão um sistema de controle não linear com duas entradas de controle. Voltaremos a este exemplo quando falarmos de linearização. `__MATHJAX__` --Patonelli 21h10min de 22 de agosto de 2009 (UTC)patonelli

O pêndulo invertido

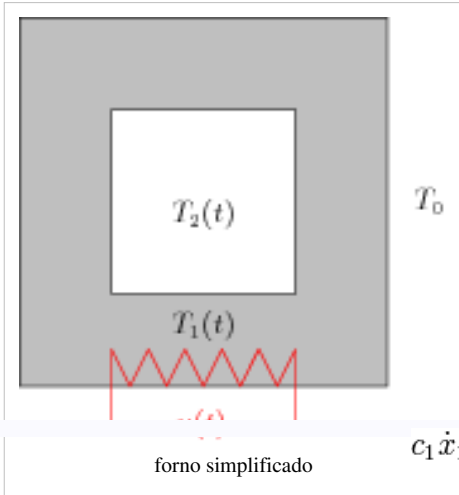


O pêndulo invertido é um problema clássico em teoria de controle, as equações do movimento são:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad ml(-g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta}) = 0$$

A variável de controle aqui é a força F

Um forno simplificado

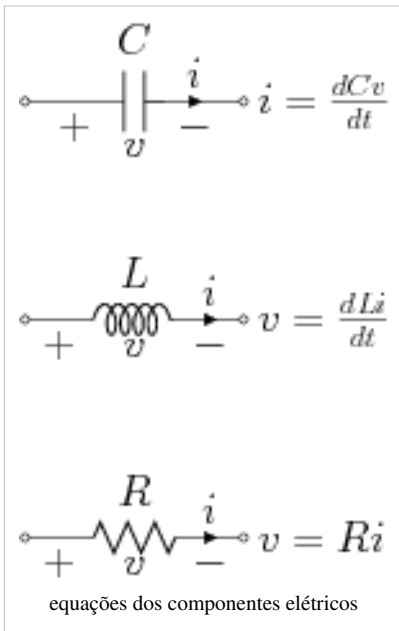


A figura mostra o esquema de um forno constituído de uma jaqueta de um material (a parte cinza) que é aquecido por uma resistência, e o calor é transmitido para o interior do forno. A taxa de calor $u(t)$ é o controle do sistema. As temperaturas (que estamos supondo ser uniformemente distribuídas no espaço!) $T_1(t)$ e $T_2(t)$ são as variáveis de estados. Sendo c_1 e c_2 as capacidades térmicas da jaqueta e do interior do forno respectivamente; a_1 e a_2 área exterior e interior da jaqueta; r_1 e r_2 os coeficientes de transmissão de calor da parte externa e interna da jaqueta e T_0 a temperatura exterior. A equação de balanço térmico nos dá:

$$c_1 \dot{x}_1(t) = (-r_2 a_2 - r_1 a_1) x_1 + r_2 a_2 x_2 + u(t) c_2 \dot{x}_2(t) = r_2 a_2 x_1 - r_2 a_2 x_2$$

Onde $x_1 = T_1 - T_0$ e $x_2 = T_2 - T_0$

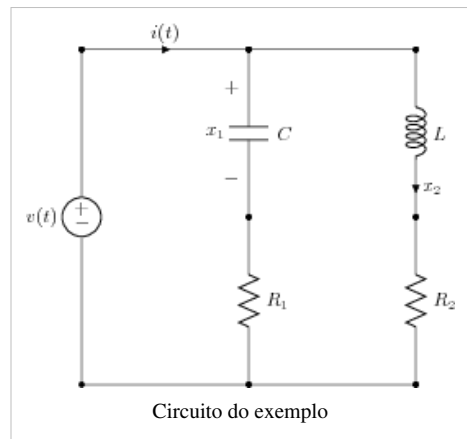
Um circuito elétrico



Na figura ao lado vemos as equações dinâmicas de alguns componentes elétricos: resistores, condensadores e indutores. Usaremos estas equações e as leis de Kirchoff dos nós e das malhas para escrever a relação dinâmica entre voltagem e corrente do circuito abaixo.

Chamaremos de x_1 a voltagem pelo capacitor C do circuito, e de x_2 a corrente através do indutor L . Aplicando as leis constitutivas dos elementos e as leis de Kirchoff temos as relações dinâmicas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_1}{R_1 C} + \frac{v}{R_1 C} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_2 R_2}{L} + \frac{v}{L} \\ i(t) &= -\frac{x_1}{R_1} + x_2 + \frac{v(t)}{R_1} \end{aligned}$$



Neste caso $v(t)$ é a única entrada do sistema (e portanto o controle) e a corrente é a saída do sistema. Para encontrar a relação entre entrada e saída temos resolver uma equação diferencial nas variáveis x_1 e x_2 , que podem ser interpretadas como variáveis auxiliares neste caso. --Patonelli 21h32min de 22 de agosto de 2009 (UTC)patonelli

Um modelo de economia

Num modelo simples podemos definir as seguintes variáveis,

Y_n é a receita anual no ano n

C_n total do consumo no ano n

I_n investimento no ano

G_n gastos do governo

A equação dinâmica é determinada pelas seguintes relações entre as variáveis

1. $Y_n = C_n + I_n + G_n$
2. $C_n = f(Y_{n-1})$ O nível de consumo depende da receita do último ano.
3. $I_n = g(C_n - C_{n-1})$ Investimentos dependem da variação de consumo.

O controle do sistema é G_n . A equação a diferenças finitas fica

$$Y_n = f(Y_{n-1}) + g(f(Y_{n-1}) - f(Y_{n-2})) + G_n$$

--Patonelli 23h04min de 22 de agosto de 2009 (UTC)patonelli

Caracterização dos sistemas lineares

Os exemplos acima nos dão as principais características dos sistemas de controle. Dependendo do sistema ser contínuo ou discreto temos as equações

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

e no caso discreto

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n)$$

$$y_n = g(x_n, u_n)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é a **variável de estado**, $y \in \mathbb{R}^p$ é a **variável de saída** e $u \in \mathbb{R}^m$ são os **parâmetros de entrada**.

As funções estruturais do sistema $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são usadas para classificar os sistemas. No nosso caso estaremos interessado somente nos casos de sistemas lineares invariantes no tempo, ou seja quando

$$\begin{aligned} f(x, u) &= Ax + Bu \\ g(x, u) &= Cx \end{aligned}$$

Com A matriz $n \times n$, B matriz $n \times m$ e C matriz $p \times n$. Nas próximas sessões vamos analisar mais detalhadamente estes exemplos.

Uma técnica de linearização

Se (x_0, u_0) for um ponto de equilíbrio do campo $f(x, u)$ então o sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)z + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)v$$

é o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio. A mesma técnica é utilizada para o ponto de equilíbrio de um sistema discreto. Lembro que o ponto de equilíbrio de um sistema discreto satisfaz $f(x_0, u_0) = x_0$ e do sistema contínuo $f(x_0, u_0) = 0$

Como exemplo retomamos a equação do satélite. fazendo $u_\theta = u_r = 0$, encontramos um movimento circular uniforme que é uma trajetória de equilíbrio para um determinado momento angular: $r(t) = r_0, \theta(t) = \omega t$ Agora fazemos as mudanças de variáveis:

$$x_1 = r(t) - r_0, x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \theta(t) - \omega t, x_4 = \dot{x}_3$$

e usando a técnica de linearização ensinada obtemos o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega}{r_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Vamos considerar um segundo exemplo, das equações de Euler de um corpo rígido. As equações são as seguintes:

Vamos considerar $I_1 = I_2$ e linearizar o sistema resultante em torno de $u_i = 0$ e da trajetória particular

O sistema linearizado, ao longo desta trajetória fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K\omega_0 & -K \sin(K\omega_0 t) \\ K\omega_0 & 0 & K \cos(K\omega_0 t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Neste caso o sistema linear não é invariante no tempo!

Exponencial de matrizes

Definiremos a exponencial de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como a soma da série:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Esta soma converge absolutamente uma vez que introduzimos no espaço das matrizes a norma induzida da norma euclidiana em \mathbb{R}^n . isto é

As principais propriedades da exponencial de matrizes:

Propriedades

1. $\exp(0) = \mathbf{I}$
2. $\exp([\alpha + \beta]A) = \exp(\alpha A) \exp(\beta A)$
3. $\exp(A) \exp(-A) = \mathbf{I}$
4. $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ se A e B comutam
5. $\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}$
6. $\frac{d \exp(tA)}{dt} = A \exp(tA)$

Solução das equações lineares não homogêneas

Em primeiro lugar note que pela propriedade 6 acima a curva

$$x(t) = \exp(tA)v$$

é solução da equação diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

para que satisfaça também a condição inicial $x(t_0) = x_0$ basta escolher $v = \exp(-t_0A)x_0$ desta forma

$$x(t) = \exp(t - t_0)Ax_0$$

é solução do problema de Cauchy:

$$\dot{x} = Ax \quad x(t_0) = x_0$$

Da mesma forma para resolvermos o problema não homogêneo:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Notemos que a curva

$$x(t) = \exp(tA)v(t)$$

satisfaz a equação:

$$\dot{x} = Ax + \exp(tA)\dot{v}(t)$$

Resolvendo a equação em $v(t)$

$$\exp(tA)\dot{v}(t) = Bu(t)$$

$$\exp(t_0A)v(t_0) = x_0$$

obtemos

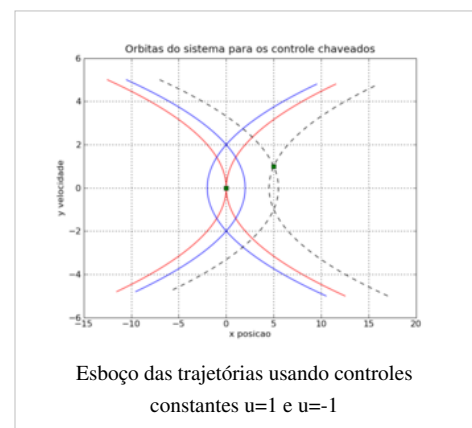
$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \exp(-sA)Bu(s)ds$$

e finalmente obtemos a nossa **aplicação de transição de estados**

$$x(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \exp((t - t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^t \exp([t - s]A)Bu(s)ds$$

Exemplo simples

O sistema $\ddot{\mathbf{x}} = u(t)$ pode ser escrito como:



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

A aplicação da fórmula para a condição inicial no instante $t = 0$, lembrando que $\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nos dá

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t + \int_0^t (t-s)u(s)ds \\ y_0 + \int_0^t u(s)ds \end{pmatrix}$$

Controlabilidade

Antes de abordar controlabilidade convém falar de dois tópicos:

Controles admissíveis

A controlabilidade estuda a relação entre os controles e os pontos atingíveis no espaço de estados. Por isso é importante dar algumas propriedades estruturais do conjunto dos controles. Nesta disciplina chamaremos de **Conjunto dos controles admissíveis** o seguinte:

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : \text{localmente integráveis}\}$$

Este conjunto tem as seguintes propriedades:

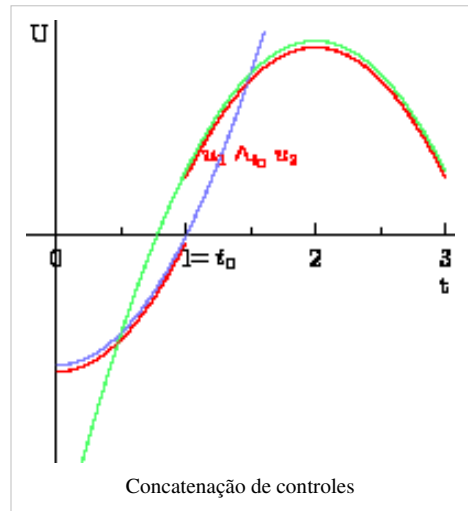
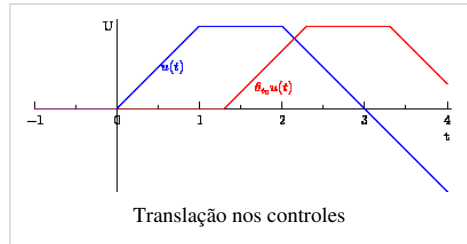
1. É um espaço vetorial,
2. É invariante pelo sistema dinâmico de translação θ_t
3. É fechado pela concatenação \wedge_{t_0} para todo $t_0 \in \mathbb{R}$
4. Contém a família das funções constantes por partes

Um subconjunto de \mathcal{U} com estas quatro propriedades também pode ser chamado de um conjunto de controles admissíveis e alteraria um pouco o estudo da controlabilidade. Este conjunto que vamos usar pode ser pensado como o maior conjunto de controles admissíveis.

A translação é definida como:

$$\theta_t(u)(s) = u(s-t)$$

e a concatenação no tempo t_0 é definida assim



$$(u \wedge_{t_0} v)(s) = \begin{cases} u(s) & \text{se } s \leq t_0 \\ v(s) & \text{se } s > t_0 \end{cases}$$

Propriedades da aplicação de transição de estados

Para os sistemas de controle contínuos de forma geral, aplicação de transição de estados é uma aplicação:

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Satisfazendo as propriedades:

- $\phi(t, t, x_0, u(\cdot)) = x_0$, chamada de compatibilidade.
- $\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), v(\cdot)) = \phi(t_2, t_0, x_0, u \wedge_{t_1} v(\cdot))$, sistema dinâmico.
- $\phi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot))$ só depende do valor de $u(t)$ no intervalo $[t_0, t_1]$

No caso dos sistemas lineares independentes do tempo temos

$$\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \exp((t-t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-s)A)Bu(s)ds$$

e neste caso temos ainda as seguintes propriedades:

- $\phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, 0) + \phi(t_1, t_0, 0, u(\cdot))$: decomposição entre dinâmica livre e controlada
- $\phi(t, t_0, x_0 + x_1, u(\cdot) + v(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) + \phi(t, t_0, x_1, v(\cdot))$: princípio da superposição
- $\phi(t, t_0, x_0, \theta_{t_0} u(\cdot)) = \phi(t - t_0, 0, x_0, u(\cdot))$: invariante no tempo.

Esta última propriedade é que nos justifica o estudo da controlabilidade só quando o tempo inicial é 0

Se a e b são dois pontos do espaço de estados \mathbb{R}^n , dizemos que b é **atingível** em tempo T a partir de a se existir um controle admissível $u(t) \in \mathcal{U}_{\text{tal}}$ que

$$\phi(T, 0, a, u(\cdot)) = b$$

Nesta caso dizemos também que o controle u transfere a para b em tempo T . O conjunto de todos os pontos atingíveis a partir de a em tempo $T > 0$ será denotado por $\mathcal{A}(a, T)$.

No caso do sistema linear é fácil verificar que

$$\mathcal{A}(a, T) = \exp(tA)a + \mathcal{A}(0, T)$$

Diremos que o sistema é **controlável** quando $\mathcal{A}(0, T) = \mathbb{R}^n$.

Matriz de controlabilidade

Note que o conjunto $\mathcal{A}(0, T)$ depende apenas das matrizes A, B do tempo $T > 0$ e da família de controles admissíveis. Quando o sistema for controlável diremos que o par (A, B) é controlável.

Definiremos a matriz de controlabilidade de (A, B) (ou do sistema) como

$$Q_T = \int_0^T \exp(sA) B B' \exp(sA') ds$$

esta matriz é simétrica, semidefinida positiva. Se for definida positiva então é invertível e neste caso o par (A, B) é controlável.

Basta verificar que para qualquer vetor do espaço de estados $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ temos que o controle

$$\hat{u}(s) = B' \exp((T - s)A') Q_T^{-1} \mathbf{b}$$

transfere a origem para \mathbf{b} em tempo T

Assim Q_T ser invertível é uma condição suficiente para a controlabilidade. veremos que é também necessária.

Se o núcleo Q_T tem um elemento $\mathbf{v} \neq 0$ então $\langle Q_T \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^T \|B' \exp(sA') \mathbf{v}\|^2 ds = 0$. Pela analiticidade do integrando temos $B' \exp(sA') \mathbf{v} = 0 \forall s$.

Neste caso temos que para todo controle admissível $u(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$\int_0^T \langle \exp((T - s)A) B u(s) u(s), \mathbf{v} \rangle ds = 0$$

e isto significa que o vetor \mathbf{v} não é acessível pois é ortogonal ao conjunto de atingibilidade de 0. Portanto para o sistema ser controlável é necessário que a matriz Q_T seja invertível.

Exercício resolvido

Verificar se é controlável o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Q_T = \int_0^T e^{sA} B B' e^{sA'} ds$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A^4 = I;$$

$$e^{sA} = I + sA + \frac{s^2 A^2}{2!} + \frac{s^3 A^3}{3!} + \dots$$

$$e^{sA} = \begin{bmatrix} \sin(s) + \cos(s) & 0 & -\sin(s) \\ 0 & e^s & 0 \\ 2\sin(s) & 0 & -\sin(s) + \cos(s) \end{bmatrix};$$

$$e^{sA'} = \begin{bmatrix} \sin(s) + \cos(s) & 0 & 2\sin(s) \\ 0 & e^s & 0 \\ -\sin(s) & 0 & -\sin(s) + \cos(s) \end{bmatrix};$$

$$Q_T = \int_0^T \begin{bmatrix} \sin(s) + \cos(s) & 0 & -\sin(s) \\ 0 & e^s & 0 \\ 2\sin(s) & 0 & -\sin(s) + \cos(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \sin(s) + \cos(s) & 0 & 2\sin(s) \\ 0 & e^s & 0 \\ -\sin(s) & 0 & -\sin(s) + \cos(s) \end{bmatrix} ds$$

$$Q_T = \int_0^T \begin{bmatrix} \sin^2(s) & 0 & \sin^2(s) - \sin(s) \cdot \cos(s) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin^2(s) - \sin(s) \cdot \cos(s) & 0 & (\cos(s) - \sin(s))^2 \end{bmatrix} ds$$

$$\det Q_T = 0 \Rightarrow \text{sistema não é controlável.}$$

Critério de controlabilidade de Kalman

Definimos o operador linear:

$$\mathcal{L}_T(u(\cdot)) = \int_0^T \exp(sA) B u(s) ds$$

Verifica-se facilmente que o par (A, B) é controlável quando a imagem deste operador linear é o espaço de estados \mathbb{R}^n . Como o espaço vetorial \mathcal{U} é de dimensão infinita este operador não tem uma representação matricial. Mas se considerarmos o operador

$$\mathbf{l}_{(A,B)} : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definido como

$$\mathbf{l}_{(A,B)}(u_0, \dots, u_{n-1}) = B u_0 + A B u_1 + \dots + A^{n-1} B u_{n-1}$$

com o auxílio do teorema de Cayley-Hamilton podemos mostrar que para qualquer par de matrizes (A, B) as imagens dos operadores $\mathbf{l}_{(A,B)}$ e \mathcal{L}_T coincidem. Neste caso a dimensão da imagem do $\mathbf{l}_{(A,B)}$ é o posto de sua matriz de representação numa base qualquer. Na base canônica a matriz de representação é a **matriz de Kalman**

$$\mathbb{K}_{(A,B)} = [B(A B) \dots (A^{n-1} B)] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

Assim o par (A, B) é controlável se e somente se o posto de $\mathbb{K}_{(A,B)}$ for n .

Forma Normal de Kalman, ou decomposição de Kalman.

Suponha que a dimensão da imagem do operador $\mathbf{I}_{(A,B)}$ seja um número k estritamente menor que a dimensão do espaço de estados. Observamos que o subespaço vetorial $V = \text{Im}(\mathbf{I}_{(A,B)})$ é um subespaço invariante por A e que contém a imagem do operador B . Escolhendo uma base de \mathbb{R}^n adaptada a este subespaço teremos que nesta nova base o sistema (A, B) terá a forma (\tilde{A}, \tilde{B}) com

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

onde $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ e $B_1 \in \mathbb{R}^{k \times m}$. Além disso o par (A_{11}, B_1) é controlável. Esta é a **forma normal de Kalman**

É fácil obter as relações

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \quad \tilde{B} = P^{-1}B$$

onde P é a matriz de mudança de base da base adaptada para a base canônica. Sempre que tivermos esta relação dizemos que os pares (A, B) e (\tilde{A}, \tilde{B}) são equivalentes.

Observabilidade

Retomemos a equação do sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

e verificamos a relação entre as condições iniciais do espaço de estado e a saída do sistema. A questão é: dado o controle admissível podemos identificar o estado inicial do sistema a partir da saída $y(t)$. Diremos que o sistema é **observável** em tempo T se para quaisquer par de estados x_a e x_b diferentes, as respectivas funções de saída $y_a(t)$ e $y_b(t)$ também diferem. Ou seja: existe $t \in [0, T]$ tal que $y_a(t) - y_b(t) \neq 0$.

Temos que $y_a(t) - y_b(t) = C \exp(tA)(x_a - x_b)$, daí concluímos que o sistema é observável em tempo T , ou o par (A, C) é observável, se e somente se, $C \exp(tA)\mathbf{x} \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definimos a **matriz de observabilidade** :

$$R_T = \int_0^T \exp(sA') C' C \exp(sA) ds$$

Então verificamos que

onde o par (A, C) é observável se e somente se R_T for invertível. Como a matriz de observabilidade de (A, C) é exatamente a matriz de controlabilidade de (A', C') temos as relações de dualidade. O sistema anterior é observável se e somente se o **sistema dual**

$$\dot{z} = A'z + C'v \quad w = B'z$$

for controlável.

Analogamente ao caso da controlabilidade podemos escrever os critérios de Kalman para a observabilidade: o par (A, C) é observável quando a matriz de kalman de observabilidade $n \times n$

$$\mathbb{O}_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto máximo.

Estabilidade de Sistemas Lineares

matrizes estáveis

Diremos que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **estável**, ou o sistema linear $\dot{x} = Ax$ é estável quando para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tA)x = 0$$

(0 é assintoticamente estável em EDO)

O conceito de estabilidade não depende das mudanças de base no espaço de estados e se A é estável todas as matrizes equivalentes são estáveis. Para determinar a estabilidade de uma matriz analisamos o conjunto dos autovalores desta matriz.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}$$
 é o conjunto dos autovalores de A

$$\omega(A) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

A matriz A é estável se e somente se $\omega(A) < 0$

Polinômios estáveis

Como vimos antes, determinamos a estabilidade de uma matriz A estudando as raízes de seu polinômio característico. De uma forma geral diremos que um polinômio

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

é **estável** se todas as raízes deste polinômio têm a parte real negativa. Os polinômios de graus 1 e 2, do tipo acima, são estáveis se e somente se os coeficientes a_i forem todos positivos. Uma condição necessária para que um polinômio geral como o acima (líder=1) seja estável é que todos os coeficientes a_i sejam positivos. Mas esta condição não é mais suficiente se o grau do polinômio for maior que 2.

Critério de Routh

Dado um polinômio $p(z)$ como acima, com coeficientes reais, e supondo que a condição necessária esteja satisfeita, podemos escrever

$$p(ix) = U(x) + iV(x)$$

Note que se n é par então grau de U é n e grau de V é $n - 1$ sendo os líderes dos dois polinômios de sinais opostos.

Se n é ímpar então grau de U é $n - 1$ e grau de V é n sendo os líderes dos dois polinômios de mesmo sinal.

Construímos agora uma sequência de polinômios f_1, f_2, \dots, f_k da seguinte forma: Se n é par então $f_1(x) = U(x)$ e $f_2(x) = V(x)$; se n for ímpar $f_1(x) = V(x)$ e $f_2(x) = -U(x)$. Os outros termos da sequência são obtidos pela aplicação do algoritmo de Euclides da seguinte forma

$$f_{i-1}(x) = \alpha_i(x) f_i(x) - f_{i+1}(x)$$

a sequência pára quando $f_k(x) = c$.

O critério de Routh diz que o polinômio $p(z)$ é estável se e somente se a sequência f_1, \dots, f_k tem $n + 1$ elementos ($k = n + 1$) e os sinais dos líderes dos polinômios f_i vão se alternando.

Matrizes de Routh

O **produto de Routh** de duas seqüências de números reais, $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e uma terceira seqüência $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definida da seguinte forma:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\beta_1} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_{k+1} \\ \beta_1 & \beta_{k+1} \end{bmatrix}$$

Vamos denotar isso como $\gamma = R(\alpha, \beta)$. Com um polinômio de grau n , $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, definimos duas seqüências

$$\sigma^1 : 1, a_2, a_4, \dots, 0, 0, \dots \quad \sigma^2 : a_1, a_3, \dots, 0, 0, \dots$$

A matriz de Routh de um polinômio, P , será uma matrix em que cada linha será uma seqüência quase-nula. A primeira linha será a seqüência σ^1 , a segunda será a seqüência σ^2 . A k -ésima linha será $\sigma^k = R(\sigma^{k-2}, \sigma^{k-1})$. Uma variação do critério de Routh acima é:

O polinômio $p(z)$ com todos os coeficientes positivos é estável se e somente se a matriz de Routh tem exatamente $n + 1$ linhas com o primeiro termo não nulo e todos os termos da primeira coluna são positivos.

Estabilização de sistemas lineares

Diremos que um par de matrizes (A, B) associado a um sistema linear é **estabilizável** se existir uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a matriz $A + BK$ fique estável.

Diremos que um par (A, B) é **completamente estabilizável** quando para qualquer $\omega \in \mathbb{R}$ dado, existe uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\omega(A + BK) < \omega$

São equivalentes

1. (A, B) é completamente estabilizável.
2. (A, B) é controlável.
3. Dado qualquer polinômio $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, existe uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que o polinômio característico da matriz $A + BK$ seja exatamente $p(z)$

Um pouco de funções analíticas

Números complexos

Em primeiro lugar, nos interessa dois aspectos do conjunto dos *números complexos*: sua característica algébrica de um **corpo comutativo completo**, e sua característica topológica de um **espaço normado**

A estrutura de corpo comutativo

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

com as seguintes operações de soma e produto:

1. Soma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. Multiplicação $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Note que a soma é completamente compatível com a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{C} . Também é fácil verificar as propriedades associativas, comutativas e distributivas das operações. --Patonelli 15h25min de 12 de setembro de 2009 (UTC)

A estrutura topológica

Uma outra propriedade de \mathbb{C} que vai nos interessar é sua estrutura topológica. Definimos no espaço a norma $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ definindo assim uma topologia compatível com a estrutura de \mathbb{R}^2 .

Article Sources and Contributors

Map2321 *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?oldid=16926> *Contributors:* Claudiofreitas, Ewout, Hugorosa, Oda, Patonelli, 7 anonymous edits

Image Sources, Licenses and Contributors

Imagem:tecontrol4.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Tecontrol4.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:satelite.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Satelite.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:Cart-pendulum.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Cart-pendulum.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:forno.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Forno.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:map2321-circ1.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Map2321-circ1.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:map2321-circ2.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Map2321-circ2.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Imagem:map2321-orbita1.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Map2321-orbita1.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Arquivo:map2321-trans.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Map2321-trans.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Arquivo:map2321-concat.png *Source:* <http://wiki.stoa.usp.br/index.php?title=Arquivo:Map2321-concat.png> *License:* unknown *Contributors:* Patonelli

Licença

Attribution-Share Alike 3.0
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>