Física IV para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320293
P3 – 26/11/2013

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta.

É permitido o uso de calculadora.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário.

Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1.a. (0.5) Há cem anos, em 1913, o físico dinamarquês *Niels Bohr*, introduzindo o conceito de níveis de energia, criou uma versão do átomo de hidrogênio que era mecânica e eletrodinâmicamente estável e satisfazia as observações espectrais. Todavia, apenas em 1924, *Louis de Broglie*, em sua tese de doutorado defendeu a existência das ondas de matéria escrevendo $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Descreva como as ondas de matéria de *de Broglie* aplicadas ao elétron em órbita no átomo de hidrogênio permitiram concluir pela quantização do momento angular desse elétron.

Q1.b. (0.5) Utilizando a hipótese de *de Broglie*, mostre que para uma partícula livre $k^2 = \frac{2m_o}{\hbar^2}(E-V)$, onde k é o número de onda, E a energia da partícula e V o potencial local, com E>V, constantes.

Q1.c. (0.5) Em 1927, a demonstração direta experimental das ondas de matéria foi obtida na experiência de *Davisson-Germer*, através da difração de elétrons com energia 54 eV num monocristal de níquel. Qual é o comprimento de onda do elétron nessas condições?

Q1.d. (0.5) A função de onda (SI) de um <u>elétron</u> que se move ao longo do eixo $+x$ entre duas barreiras muito distantes -a<x<+a e velocidade constante, é dada por:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\left(6,28x10^{10}\,x - 2,3x10^{17}\,t\right)}.$$

Para esse <u>elétron</u>: determine seu momento e sua energia (**em eV**).

Q1.e. (0.5). Mostre que a probabilidade de encontrar o elétron, cuja função de onda foi dada acima, é proporcional ao intervalo observado, ou seja $P = \alpha L$

Q2A) Um elétron confinado num poço de potencial infinito unidimensional com L = 0,25nm de largura salta do <u>primeiro estado excitado</u> para o <u>terceiro estado excitado</u>:

a) (0,5) Qual é a energia fornecida ao elétron?

b) (0,5) Para decair para o estado fundamental há várias alternativas com respectiva emissão de um ou mais fótons em cascata. Indique a transição que apresenta o menor comprimento de onda e calcule o valor desse comprimento de onda.

c) (0,5) Faça um diagrama de energias e mostre os possíveis ramos de decaimento e a diferença de energia (ou a energia do fóton emitido) para cada um deles.

Q2B) Um feixe de elétrons com energia K=5,0eV incide numa barreira de potencial retangular cuja largura L = 0,75nm. Sabe-se que o coeficiente de transmissão $T \cong \exp\left[(-2L/\hbar)\sqrt{2m(U-K)}\right]$, vale $T = 1\times10^{-3}$. Pede-se calcular:

d) (0,5) a altura da barreira U.

e) (0,5) Qual é a variação percentual do coeficiente de transmissão T que corresponde a um aumento de 1% na largura da barreira.

Q3) Considere um elétron confinado numa caixa cúbica com lados iguais a L e paredes impenetráveis, que pode ser modelada como um poço de potencial infinito tridimensional. Pede-se determinar:

a) (0,5) A função de onda e a energia do estado fundamental;

b) (0,5) Sabendo que estados degenerados são aqueles que apresentam o mesmo valor de energia para diferentes números quânticos, determine a degenerescência (= número de estados) dos estados cuja energia é o dobro da energia do estado fundamental ($E = 2E_1$ onde E_1 é a energia do estado fundamental);

c) (0,5) Como contruir uma caixa para confinar o elétron evitando o surgimento de níveis degenerados?

d) (0,5) Para um elétron que está no terceiro nível excitado tal que $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 11$, pede-se determinar sua energia e as combinações de n_1, n_2 e n_3 que resultam nesta energia.

e) (0,5) Escreva as funções onda dos diferentes estados em que a energia $E = 11\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

Q4. A solução da Equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio mostra que a função de onda pode ser escrita como

$$\psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\varphi) = R_{n\ell}(r)Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\varphi),$$

onde a equação diferencial para a parte radial da função de onda é dada por

$$\frac{d^2R_{n\ell}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_{n\ell}}{d\rho}-\left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}+\frac{1}{n^2}\right]R_{n\ell}=0$$

e $\rho = r/a_0$, onde a_0 é o raio de Bohr.

A tabela a seguir apresenta possíveis estados do átomo de hidrogênio, com distintos conjuntos de valores dos números quânticos n, ℓ, m_ℓ.

Estado	n	ℓ	m_ℓ
A	2	0	-3
B	4	3	-3
C	3	0	0
D	2	2	-2
E	2	0	1
F	3	-2	-2
G	2	0	0
H	4	2	-2
I	4	4	-2
J	3	1	1

a) (0,5) Dos conjuntos de valores apresentados na tabela, quais realmente podem *representar* configurações de estados do átomo de hidrogênio? Sabendo que a energia do estado fundamental é -13,6 eV, quais dentre esses estados possíveis têm a mesma energia e com quais valores?

b) (1,0) Para $n = 2, \ell = 0$, a parte radial da função de onda é dada por

$$R_{20} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}(c-\rho)e^{-\rho/2},$$

onde c é uma constante. DETERMINE o valor dessa constante para que R_{20} seja solução da Equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio.

c) (0,5) Determine os valores $r_{\max}$ do raio onde a probabilidade de se encontrar o elétron no estado $n = 2, \ell = 0$ seja maximizada.

d) (0,5) Sabendo que $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sen\theta d\theta \left|Y_\ell^{m_\ell}(\theta,\varphi)\right|^2 = 1$, e que a função radial para o estado $n = 1, \ell = 0$ é $R_{10} = Ae^{-\rho}$, determine a constante A.

Formulário

$h = 6.63\times10^{-34}\,J.s = 4{,}14\text{x}\,10^{-15}$ eV s

$\hbar = 1.05\times10^{-34}\,J.s = 6{,}6\times10^{-16}\,eV.s$

$k_B = 1.38\times10^{-23}$ J. K^{-1}

$\dfrac{h}{m_e c} = 2{,}43\times10^{-12}\,m$

$N_A = 6.02\times10^{23}$ mol^{-1}

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m

$m_e = 9{,}109\times10^{-31}\,kg$

$e = 1{,}602\times10^{-19}\,C$

$c = 2{,}9979\times10^{8}\,m/s$

$\mu_0 = 1{,}26\times10^{-6}\,H/m$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Espalhamento Compton

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\lambda_c = 0{,}024\times10^{-10}\,m$$

Efeito fotoelétrico

$K_{\max} = h\nu - W_0$ ou $K_{\max} = h\nu - \phi$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Lei de Wien

$\lambda_{\max}\cdot T = 2{,}9\,10^{-3}\,mK$

Relatividade: $\beta = \dfrac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E = m\gamma c^2$$

$$p = m\gamma v$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$K = m\gamma c^2 - mc^2$$

Átomo de Hidrogênio:

E_0= 13,6 eV

$$E_n = -\left(\frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\frac{1}{n^2} = -E_0\frac{Z^2}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi\, m_e e^2} = 0{,}0529nm$$

$$\Delta E = hf = E_0 Z^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Schrödinger 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial^2 x} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\varphi(t) = e^{-iwt}$$

Normalização em coordenadas cartesians

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x,y,z)\right|^2 dxdydz = 1$$

Normalização em coordenadas esféricas

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left|\psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\varphi)\right|^2 = 1$$