Física IV para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320293
PSub – 03/12/2013

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta.

É permitido o uso de calculadora.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário.

Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1. O feixe de luz de um laser de rubi com comprimento de onda igual a 694 nm se propaga no ar, de forma que o campo elétrico da onda pode ser escrito como $\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{e}_z$. A intensidade do feixe é $I = 10^{12} W/cm^2$.

a) (1,0) Determine os valores de E_0, o número de onda k e a frequência angular ω.

$$\vec{S} = c^2\varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad I = \left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2$$

$$I = \left\langle |S(t)| \right\rangle_t \qquad E = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2.10^{12}.10^4}{3.10^8.8{,}85.10^{-12}}} = \sqrt{7{,}53.10^{18}} = 2{,}75 V/m$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2.\pi}{694.10^{-9}} = 9{,}054.10^6 m^{-1}$$

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = ck = 3.10^8.9{,}054.10^6 = 2{,}716.10^{15}\ Hz$$

b) (0,5) Obtenha a expressão correspondente ao vetor campo magnético $\vec{H}$ da onda, <u>a partir das equações de Maxwell</u>.

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_0 E_0 e^{i(kx-wt)}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} \qquad \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\hat{y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -ikE_0 e^{i(kx-wt)}\hat{y} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{+ikE_0}{-i\omega\mu_0}e^{i(kx-wt)}\hat{y} = \frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{i(kx-wt)}\hat{y} = \frac{E_0}{c\mu_0}e^{i(kx-wt)}\hat{y} = \varepsilon_0 c E_0 e^{i(kx-wt)}\hat{y}$$

c) (1,0) Suponha que o feixe incida exatamente no centro de uma fenda, de diâmetro $d = 1{,}5 \times 10^{-5} m$, em um anteparo perpendicular à direção de sua propagação. Determine a abertura angular do pico central de difração que se formará atrás do anteparo.

Fenda circular: $\sin\theta = 1{,}22\dfrac{\lambda}{d}$ onde q é o ângulo a partir do eixo central

$$\sin\theta = \frac{1{,}22.694.10^{-9}}{1{,}5.10^{-5}} = 5{,}65x10^{-2}$$

$$abertura\ angular = 2\theta \cong 2\sin\theta = 0{,}11\ rd$$

Q2A.a) (0,5) Monitores de infravermelho para uso militar são maximizados para detetar a radiação emitida por uma pessoa cuja temperatura média é 36°C em contraste com o ambiente ao redor, em geral da ordem de 20°C. Determine o comprimento de onda para qual ocorre o máximo da emissão da radiação do corpo humano cuja temperatura é de aproximadamente 36°C.

Utilizando a lei do deslocamento de Wien temos que

$$\lambda_{max}T = 2,898.10^{-3}mK \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{2,898.10^{-3}}{273+36} = 9,38.10^{-6}m$$

b) (0,5) Conforme Planck, $E = hf = hc/\lambda$. Se a resolução do monitor de infravermelho vale $r = \Delta E / E = 10^{-3}$, qual a menor diferença de temperatura $\Delta T = T_H - T_a$ que ainda permita o monitor de infravermelho "ver" um humano com $T_H = 36^oC$ contra o fundo com temperatura T_a?

supondo $\lambda_1 \approx \lambda_2$

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{\dfrac{hc}{\lambda_1} - \dfrac{hc}{\lambda_2}}{\dfrac{hc}{\lambda_1}} = \lambda_1\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$ analogamente

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta T}{T} \qquad \Delta T = 10^{-3}T = 10^{-3}(273+36) = 0{,}31\ ^oC$$

Q2B) Uma massa de 2, 0kg está presa a uma mola de constante elástica 25N/m e cuja massa é desprezível. A mola é deformada de 0, 4m a partir de sua posição de equilíbrio e depois solta para oscilar como um oscilador harmônico ideal.

c) (0,5) Determine a energia total e a frequência angular ω deste oscilador de acordo com a física clássica.

d) (0,5) Segundo a mecância quântica, a energia de um oscilador harmônico é quantizada de acordo com a relação $E_n = (n+1/2)\omega\hbar$ com n = 0, 1, 2... Suponha que a energia do oscilador acima seja quantizada, determine o número quântico n deste sistema.

e) (0,5) Qual a dificuldade para observar a quantização da energia de um oscilador com as características físicas do sistema massa-mola descrito acima? Existe algum limite em que o modelo quântico não se aplica?

b) Energia do oscilador clássico

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0,5.25.(0,4)^2 = 2J$$

Frequência angular

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = 3,54 rad/s$$

c) Energia do oscilador quântico

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\hbar \simeq n\omega\hbar \; para \; n \gg 1$$

$$n = \frac{E}{\omega\hbar} = \frac{2}{3,54.1,05.10^{-34}} = 5,38.10^{33}$$

d) Embora a quantização da energia também aconteça no macro mundo, ela é mais fácil de ser observada no micro mundo. Como podemos notar, o número quântico para macro sistemas é sempre muito grande, o que implica que a diferença de entre dois níveis para $n \gg 1$ é muito pequena e difícil de ser observada experimentalmente. Para $n = 5.10^{33}$ essa diferença é de $\omega\hbar \simeq 10^{-34}J$ para o nosso caso.

e) A mecânica quântica é uma teoria vitoriosa que pode ser usada tanto para descrever o macro mundo como o micro mundo. O fato de não observamos a quantização da energia para macro sistema não é um problema da mecânica quântica más sim da nossa incapacidade de medir diferenças de energia da onde de $10^{-34}J$

Q3A. Em uma experiência fotoelétrica para determinar a função trabalho de uma superfície metálica são usadas duas fontes de luz. Quando é usada luz verde de uma lâmpada de mercúrio com comprimento de onda de 546,1 nm, o potencial frenador que reduz a fotocorrente para zero, vale 0, 376V.

a) (0,5) Com base nesta medida, qual é a função trabalho para esse metal?

a) Aplicando a lei da conservação temos que

$$qU_0 = K \Rightarrow K = 0,376.1,6.10^{-19} = 6,01.10^{-20}J$$

$$\omega\hbar = A + K \Rightarrow A = \omega\hbar - K = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} - K = 3,02.10^{-19}J$$

Portanto

$$A = 1,89eV$$

b) (1,0) Qual seria o potencial frenador ao se usar a luz laranja com comprimento de onda 659,9 nm de um tubo de descarga de neônio ?

nesse caso não há emissão de elétrons pois $\lambda_c = 655nm$.

Q3B. (1,0) Segundo Bohr, órbitas estacionárias são aquelas onde o momento angular L é um número inteiro da constante de Planck, $L = nh$. Supondo que os elétrons realizam orbitas circulares onde o módulo do momento angular pode ser expresso por $L = mvr$ pede-se obter uma expressão para o raio das órbitas estacionárias do átomo de hidrogênio em função do número quântico n.

Igualando a força de atração coulombiana a força centrípeta temos

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$

$$L = m_e vr = n\hbar \Rightarrow (m_e vr)^2 = (n\hbar)^2 \Rightarrow v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2}$$

Igualando as duas equações temos que

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} = \frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2} \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2$$

Q4A. A função de onda de um <u>elétron</u> quase livre que se move ao longo do eixo $+x$ entre duas barreiras muito distantes $-a < x < +a$, é dada por:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\left(5{,}00\times10^{10}x - 1{,}45\times10^{17}t\right)}.$$

a) (0,5) Determine o momento e a energia (**em eV**) do elétron;

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k = 1{,}055\times10^{-34}.5{,}00\times10^{10} = 5{,}27\times10^{-24}\text{kg.m.s}^{-1}$$

$$E(eV) = \frac{\hbar\omega}{e} = 95{,}3eV$$

b) (0,5) Determine a probabilidade de encontrar o elétron entre $x=0$ e $x=L$,

$$P = \int_0^L \psi^*\psi\, dx' = \frac{L}{a}$$

c) (1,0) A função de onda do elétron no estado fundamental (*n=1*) no átomo de Hidrogênio vale: $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$ onde a_0 é uma constante. Determine o valor de *r* em que a densidade de probabilidade radial *dP/dr* de encontrar o elétron seja máxima.

$$dP = 4\pi r^2 |\varphi(r)|^2 dr = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \right)^2 dr$$

$$dP = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr$$

a densidade de probabilidade *dP/dr* é máxima: $0 = \frac{d}{dr}\frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} = 2re^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{2}{a_0} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} = 2re^{-\frac{2r}{a_0}}\left(1-\frac{r}{a_0}\right)$

$$\begin{cases} \left(\frac{dP}{dr}\right)_{\max} = \frac{4}{a_0} e_{-2} \\ r = a_0 \end{cases}$$

d) (0,5) A função de onda de um oscilador harmônico quântico no estado fundamental é dada por: $\phi_0(x)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$, onde α é uma constante real positiva. Determine o valor médio da posição, $\langle x \rangle$ da partícula.

solução: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\phi_0|^2 dx$ *. O integrando é uma função ímpar. Portanto:* $\langle x \rangle = 0$ *. Ou basta notar que a densidade de probabilidade é simetrica em relação à origem.*

Formulário

$h = 6.63\times10^{-34} J.s = 4{,}14\text{x}\,10^{-15}$ eV s

$\hbar = 1.05\times10^{-34} J.s = 6{,}6\times10^{-16} eV.s$

$k_B = 1.38\times10^{-23}$ J. K^{-1}

$\frac{h}{m_e c} = 2{,}43\times10^{-12} m$

$N_A = 6.02\times10^{23}$ mol^{-1}

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m

$m_e = 9{,}109\times10^{-31}\ kg$

$e = 1{,}602\times10^{-19}\ C$

$c = 2{,}9979\times10^{8}\ m/s$

$\mu_0 = 1{,}26\times10^{-6} H/m$

$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} T.m/A$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{r}$

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

Equações de Maxwell

$\oint \varepsilon\vec{E}.d\vec{s} = q$

$\oint \vec{B}.d\vec{s} = 0$

$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial\phi_B}{\partial t}$

$\oint \frac{\vec{B}}{\mu}.d\vec{l} = I + \varepsilon\frac{\partial\phi_E}{\partial t}$

$\vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E}) = \rho$

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$q = \int \rho dV$

$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v}\times\vec{B})$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$

$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\kappa_m\kappa}.$

polarização

$I \propto E^2 = (E_0\cos\theta)^2$

$I = I_0\cos^2\theta$

$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \text{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Difração e interferência

$I = I_0[\sin(\beta/2)/(\beta/2)]^2$

$\beta = 2\pi a\sin\theta/\lambda$

$I = I_{\max}\cos^2\frac{\phi}{2}$

Disco de Airy (1º mínimo)

$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$

$I(\theta) = I_m(\cos^2\beta)\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)^2$

$\phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}$

$\vec{S} = c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$I = \langle|S(t)|\rangle_t$

$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$

Espalhamento Compton

$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

$\Delta\lambda = 2\lambda_c\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$

$\lambda_c = 0{,}024\times10^{-10} m$

Efeito fotoelétrico

$K_{\max} = h\nu - W_0$ ou

$K_{\max} = h\nu - \phi$

$\omega\hbar = A + K$

$E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$

Lei de Wien

$\lambda_{\max} \cdot T = 2{,}898\ 10^{-3}\, mK$

Osc. harmônico $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$E = \dfrac{1}{2}kA^2$

$E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\omega\hbar$

Relatividade: $\beta = \dfrac{v}{c}$

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$E = m\gamma c^2$

$p = m\gamma v$

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$K = m\gamma c^2 - mc^2$

Átomo de Hidrogênio:

E_0= 13,6 eV

$a_0 = \dfrac{h^2\varepsilon_0}{\pi\, m_e e^2} = 0{,}0529nm$

$\Delta E = hf = E_0 Z^2\left(\dfrac{1}{n_f^2} - \dfrac{1}{n_i^2}\right)$

$E_n = -\left(\dfrac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\dfrac{1}{n^2} = -E_0\dfrac{Z^2}{n^2}$

operadores vetoriais

$\nabla U = \hat{i}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial U}{\partial z}$

$\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$\nabla U = \hat{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{z}\dfrac{\partial U}{\partial z}$

$\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \dfrac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$

$\nabla U = \hat{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{\phi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \phi}$

$\nabla\cdot\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A\phi}{\partial\phi}$

$\nabla\times\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_z \end{vmatrix}$

Schrödinger 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial^2 x}+U(x)\psi(x)=E\,\psi(x)$$

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

$$\varphi(t)=e^{-iwt}$$

Normalização em coordenadas cartesians

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x,y,z)\right|^2 dxdydz=1$$

Normalização em coordenadas esféricas

$$\int_0^{\infty} r^2 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left|\psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\varphi)\right|^2=1$$

Valor esperado

$$\langle f\rangle=\int\psi^* f\psi\, dv$$