Física IV para Engenharia Elétrica

IFUSP - 4320293

P3 – 26/11/2013

Gabarito

Q1a: supondo órbitas circulares que compreendem um número inteiro de comprimentos de onda: $n\lambda = 2\pi r$ $\quad \lambda = h/p = h/mv$ $\quad nh/mv = 2\pi r$ $\quad L = mvr = nh/2\pi = n\hbar$

Q1b: $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)$ $\quad \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 2m(E-V)$ $\quad \frac{p^2}{2m} = (E-V)$ $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 + V$ que é o teorema de conservação de energia.

Q1c: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Vem}} = \frac{6.6\times10^{-34}}{\sqrt{2.54.1{,}6\times10^{-19}.9{,}11\times10^{-31}}} = 16{,}7\text{nm}$

Q1d: $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k = 1{,}055\times10^{-34}.6{,}28\times10^{10} = 6{,}63\times10^{-24}\,\text{kg.m.s}^{-1}$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi$ $\quad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} = 2{,}41\times10^{-17}\,kgm^2s^{-2} = 151eV$

Q1d: supondo que $-a < x < +a$ $\;e\;$ $-a < x+L < +a$ $\quad P = \int_x^{x+L}\psi^*\psi\,dx' = \frac{1}{a}L$

Q2.

a) Uma partícula confinada em um poço de potencial infinito terá sua energia quantizada de acordo com a relação abaixo

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

Portanto para os estados $n = 1$ (fundamental), $n = 2$, (primeiro estado excitado), $n = 3$ e $n = 4$ (terceiro estado excitado) as energias são respectivamentes

$$E_1 = 6,038eV$$

$$E_2 = 24,154eV \; primeiro\ estado\ excitado$$

$$E_3 = 54,346eV$$

$$E_4 = 96,615eV \; terceiro\ estado\ excitado$$

Portanto para ir do primeiro estado excitado para o terceiro é necessário uma energia igual a

$$E_4 - E_2 = 96,615 - 24,154 = 72,461eV$$

b) Comprimento de onda

$$E = \omega\hbar = \frac{2\pi.c.\hbar}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi.c.\hbar}{E}$$

As diferenças de enrgia entre os estados são respectivamente

$$E_{4-3} = E_4 - E_3 = 42,269eV$$

$$E_{4-2} = E_4 - E_2 = 72,461eV$$

$$E_{4-1} = E_4 - E_1 = 90,577eV$$

$$E_{3-2} = E_3 - E_2 = 30,192eV$$

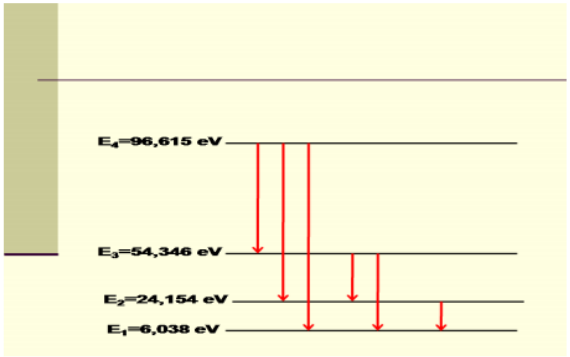
$$E_{3-1} = E_3 - E_1 = 48,308eV$$

$$E_{2-1} = E_2 - E_1 = 18,116eV$$

Logo o menor comprimento de onda é aquele onde a diferença de energia é maior, ou seja

$$\lambda_{4-1} = 136,569\text{Å}$$

c) Diagrama.
As energias referentes a cada uma das possíveis transições já foram calculadas no item a)



Solução 1B):

a) Seja $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U-K)}}{\hbar}$, dai temos que

$$T = e^{-2\alpha L} \Rightarrow \alpha = -\frac{ln(T)}{2L} = 4,605.10^9 m^{-1}$$

Temos ainda que

$$U = \frac{\alpha^2\hbar^2}{2m} + K = 5,811eV$$

b) Seja

$$T_1 = e^{-2\alpha L_1}$$

onde $L_1 = 7,51$Å. Temos portanto $T_1 = 9,911.10^{-4}$, logo a variação percentual será de

$$\frac{T - T_1}{T} = 0,89\%$$

Q3.

a) O estado fundamental é caracterizado pelos números quânticos $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, portanto a função onda e energia tem a forma

$$\Psi_{1,1,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).sin\left(\frac{\pi}{L}y\right).sin\left(\frac{\pi}{L}z\right)$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \Rightarrow E_1 = 3\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

b) Como a energia do estado fundamental é $3\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, isto significa que $\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) = 6$ o que corresponderia as seguintes combinações $n_1 = 2,\ n_2 = 1\ e\ n_3 = 1$ ou $n_1 = 1,\ n_2 = 2\ e\ n_3 = 1$ ou $n_1 = 1,\ n_2 = 1\ e\ n_3 = 2$. Portanto a degenerescência é tripla.

c) A degenerescência está relacionada com a simetria do sistema, portanto ela pode ser evitada se tomarmos uma caixa com lados diferentes.

d) Como $\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) = 11$ as possibilidades são: $n_1 = 3,\ n_2 = 1\ e\ n_3 = 1$, $n_1 = 1,\ n_2 = 3\ e\ n_3 = 1$ e $n_1 = 1,\ n_2 = 1\ e\ n_3 = 3$. Portanto a energia vale

$$E_3 = 11\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Funções ondas

$$\Psi_{3,1,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right).sin\left(\frac{\pi}{L}y\right).sin\left(\frac{\pi}{L}z\right)$$

$$\Psi_{1,3,1}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).sin\left(\frac{3\pi}{L}y\right).sin\left(\frac{\pi}{L}z\right)$$

$$\Psi_{1,1,3}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).sin\left(\frac{\pi}{L}y\right).sin\left(\frac{3\pi}{L}z\right)$$

Q4.

a) As soluções possíveis devem satisfazer as relações

$$\ell = 0,1,2,...,n-1$$
$$m_\ell = -\ell, -\ell+1, ..., 0, ...\ell-1, \ell.$$

Os únicos estados que satisfazem estas relações são B (n =4), C (n =3), F (n =3), G (n =2), H (n =4), J (n =3). Como os níveis de energia dos estados são dados por

$$E = -\frac{13{,}6}{n^2} eV ,$$

Temos que os estados C, F e J têm a mesma energia, E = - 13,6/9 ≈ -1,4 eV, e também os estados B e H, com energia E = - 13,6/16 ≈ - 0,85 eV.

b) Chamando de $A = 1/(2a_0)^{3/2}$, temos que as derivadas da função dada são

$$\frac{dR_{20}}{d\rho} = -Ae^{-\rho/2} - \frac{A}{2}(c-\rho)e^{-\rho/2};$$
$$\frac{d^2R_{20}}{d\rho^2} = Ae^{-\rho/2} + \frac{A}{4}(c-\rho)e^{-\rho/2}.$$

Substituindo essas derivadas na equação diferencial para $R_{n\ell}$ com $\ell = 0,$ temos

$$\frac{1}{4}(c-\rho)+1-\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\rho}(c-\rho)+\left[\frac{2}{\rho}-\frac{1}{4}\right](c-\rho)=0,$$

cuja solução é $c = 2$.

Atenção: na prova houve um erro de digitação: $\frac{d^2R_{n\ell}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_{n\ell}}{d\rho}-\left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}+\frac{1}{n^2}\right]R_{n\ell}=0$ deveria ter sido $\frac{d^2R_{n\ell}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_{n\ell}}{d\rho}-\left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}-\frac{2n}{\rho}+\frac{1}{n^2}\right]R_{n\ell}=0$, o que inviabiliza a solução. Será atribuído o ponto dessa questão para todos os alunos.

c) Como a probabilidade de encontrar o elétron em uma posição radial é proporcional a $\rho^2|R|^2$, temos que

$$P \propto \rho^2(2-\rho)^2 e^{-\rho};$$
$$\frac{dP}{d\rho} \propto \left[2\rho(2-\rho)^2 - 2\rho^2(2-\rho) - \rho^2(2-\rho)^2\right]e^{-\rho}$$

Igualando a derivada à zero, encontramos três soluções

$$r = 2a_0; r = \left[3 \pm \frac{\sqrt{20}}{2}\right]a_0.$$

d) A função de onda tem que satisfazer a condição de normalização

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left|\psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\varphi)\right|^2 = 1$$

Substituindo a expressão para a função de onda e utilizando o resultado dado sobre a integral dos harmônicos esféricos, temos

$$A^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = A^2 \frac{a_0^3}{8} \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 1.$$

A integral é facilmente resolvida, dando o valor 2, de forma que $A = 2 \Big/ \sqrt{a_0^3}$.