Física IV para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320293
P2 – 15/10/2013

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário.

Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1. Um feixe de raios-X com comprimento de onda 3,75pm é lançado contra uma nuvem de elétrons aproximadamente em repouso. (dados: $m_e = 9{,}1\times10^{-3}1$ kg, $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C, $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J.s)

a) (0,5) Determine o comprimento de onda dos raios-X espalhados em 85°

b) (0,5) Determine a energia inicial dos fótons de raios-X

c) (0,5) Determine a energia cedida ao elétron em cada colisão;

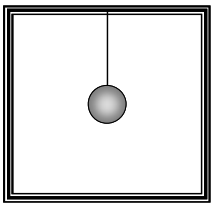
d) (1,0) Determine a velocidade final dos elétrons espalhados.

Q2. Numa experiência fotoelétrica para determinar a função trabalho de uma superfície metálica, são usadas duas fontes de luz, uma verde e uma amarela. Quando é usada luz verde de uma lâmpada de mercúrio (λ = 546,1 nm), um potencial frenador de 0,376 V reduz a fotocorrente a zero.

a) (0,5) Com apenas esta medida (luz verde), é possível determinar a função do trabalho do material? Em caso afirmativo, qual é a função trabalho para esse metal?

b) (0,5) Qual potencial frenador será observado ao usar a luz amarela, proveniente de um tubo de descarga de hélio (λ = 587,5 nm)?

c) (1,0) Suponha agora que uma pequena esfera de prata (raio = 1,0 cm, ϕ = 4,28 eV) mantida na ponta de um fio isolante e em vácuo, é iluminada com luz monocromática com 1,0 W de potência e comprimento de onda igual a 100 nm. A medida que a esfera emite elétrons, ela se autocarrega positivamente. Quantos elétrons são emitidos para que cesse totalmente a corrente fotoelétrica?



d) (0,5) Discuta qualitativamente como varia o número de elétrons emitidos se: a) dobrar a potência da luz incidente; b) dobrar o raio da esfera de prata.

Q3. No estudo do espectro de radiação de um corpo negro, se define a radiância I como a potência radiada pelo corpo por unidade de área e a distribuição espectral $R(\lambda)$ tal que $R(\lambda)d\lambda$ seja a potência radiada por unidade de área com comprimento de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$, ou seja, $I = \int_0^\infty R(\lambda)d\lambda$. Fazendo um cálculo clássico, Rayleigh e Jeans obtiveram para a distribuição espectral, $R(\lambda) = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$, enquanto que Planck obteve $R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right]}$. Nessas equações k_B é a constante de Boltzmann, h é a constante de Planck e c é a velocidade da luz.

a)(0,5) Descreva a hipótese de Planck para obter seu resultado e explique que grandeza física sua hipótese modificou com relação à derivação de Rayleigh e Jeans.

b)(0,5) Mostre que a distribuição espectral de Rayleigh e Jeans pode ser obtida da expressão de Planck no limite apropriado; que limite é este?

c)(0,5) Obtenha a expressão da distribuição espectral de Planck em termos da frequência, $R(f)$, impondo que $R = \int R(\lambda)d\lambda = \int R(f)df$ e lembrando que $f = c/\lambda$.

d)(1,0) Mostre que a Lei de Stefan-Boltzmann, $I = \sigma T^4$, pode ser derivada da distribuição espectral de Planck e determine a relação da Constante de Stefan-Boltzmann σ com as constantes h, c e k_B.

Sugestão: Para fazer a integral da distribuição espectral de Planck sobre uma parte do espectro, é conveniente reescrevê-la em termos da variável $x = hc/\lambda k_B T$.

Fórmulas úteis

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^2}{6}; \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \qquad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} = n!\left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \ldots\right)$$

Q4a) (0,75) Sabendo que o comprimento de onda mais curto da série de Balmer $n_f = 2$, vale 364,507nm, pede-se calcular a energia de ionização de um átomo de hidrogênio *excitado* cujo elétron se encontra no nível n = 2. Expresse esta energia em eV.

Q4b) (0,75) Segundo Bohr, órbitas estacionárias são aquelas onde o momento angular L é um número inteiro da constante de Planck $L = n\hbar$. Supondo que os elétrons realizam orbitas circulares onde o módulo do momento angular pode ser expresso por $L = mvr$ pede-se obter uma expressão clássica para o raio das órbitas estacionárias do átomo de hidrogênio em função do número quântico n.

Q4c) (1,00) Estime qual seria o tempo de vida τ de um átomo de hidrogênio de acordo com a física clássica. Para isto considere que o elétron descreve órbitas circulares ao redor do núcleo e que a potência irradiada por uma carga pontual acelerada é dada pela fórmula de Larmor:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Formulário

$h = 6.63\times10^{-34}\,J.s = 4{,}14\text{x}\,10^{-15}$ eV s

$\hbar = 1.05\times10^{-34}\,J.s = 6{,}6\times10^{-16}\,eV.s$

$k_B = 1.38\times10^{-23}$ J. K^{-1}

$R = N_A k_B = 8.31$ J. K^{-1}. mol^{-1}

$N_A = 6.02\times10^{23}$ mol^{-1}

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m

$\dfrac{h}{m_e c} = 2{,}43\times10^{-12}\,m$

$e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$

$c = 2{,}9979\times10^{8}\,m/s$

Eletrostática $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{r}$ $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$

Espalhamento Compton: $\Delta\lambda = \dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

Efeito fotoelétrico $K_{\max} = h\nu - W_0$

Planck: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$

Relatividade: $\beta = \dfrac{v}{c}$ $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $E = m\gamma c^2$ $p = m\gamma v$

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ $K = m\gamma c^2 - mc^2$

Equações de Maxwell

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E};\ \vec{B} = \mu\vec{H};\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho;\ \nabla\cdot\vec{B} = 0;\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \nabla\times\vec{H} = \mu\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$\sin 2a = 2\sin a\ \cos a$

Solução Q1. $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$

$$\lambda' = 3{,}75\times10^{-12} + 2{,}43\times10^{-12}\left(1-\cos 85^o\right) = 3{,}75\times10^{-12} + 2{,}22\times10^{-12} = 5{,}97\times10^{-12}\,m$$

$$E_{xi} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63\times10^{-34}.3{,}0\times10^{8}}{3{,}75\times10^{-12}} = 5{,}30\times10^{-14}\,J = \frac{5{,}3\times10^{-14}}{1{,}6\times10^{-19}}\,eV = 331{,}5\,\text{keV}$$

$$E'_x = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63\times10^{-34}.3{,}0\times10^{8}}{5{,}97\times10^{-12}} = 3{,}33\times10^{-14}\,J = \frac{5{,}3\times10^{-14}}{1{,}6\times10^{-19}}\,eV = 208{,}2\,\text{keV}$$

ΔE transferido para o elétron: $\Delta E = \left(5{,}30 - 3{,}33\right)\times10^{-14}\ J = 1{,}97\times10^{-14}\ J = 123\ keV$

Energia de repouso: $E_0 = mc^2 = 9{,}1\times10^{-31}.(3{,}0\times10^{8})^2 = 8{,}19\times10^{-14}\,J = 511\,keV$

Energia final do elétron: $E_f = (8{,}19 + 1{,}97)\times10^{-14}\ J = 10{,}16\times10^{-14}\ J = 635\,keV$

A velocidade dos elétrons pode ser calculada por:

$$m\gamma c^2 = E_f = 10{,}16\times10^{-14}\ J$$

$$\gamma = \frac{m\gamma c^2}{mc^2} = \frac{E_f}{8{,}19\times10^{-14}\,J} = \frac{10{,}16\times10^{-14}}{8{,}19\times10^{-14}} = 1{,}24 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1{,}24$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{1{,}24}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = 0{,}59$$

$$v = 0{,}59c$$

Solução Q2.

a) Aplicando a lei da conservação temos que

$$qU_0 = K \Rightarrow K = 0,376.1,6.10^{-19} = 6,01.10^{-20}J$$

temos ainda que

$$\omega\hbar = A + K \Rightarrow A = \omega\hbar - K = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda} - K = 3,02.10^{-19}J$$

Portanto

$$A = 1,89eV$$

b) Potencial frenador

$$K = \omega\hbar - A = \frac{2\pi.3.10^{8}.1,05.10^{-34}}{587,5.10^{-9}} - 3,02.10^{-19} = 3,489.10^{-20}J$$

Portanto:

$$U_0 = \frac{K}{q} = \frac{3,489.10^{-20}}{1,6.10^{-19}} = 0,218V$$

c) A energia máxima com que os elétrons são emitidos vale:

$$K = \omega\hbar - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{4{,}14.10^{-15} \times 3{,}0.10^{8}}{100.10^{-9}} = (12{,}42 - 4{,}28)\,\text{eV} = 8{,}14\,\text{eV}$$

O potencial na superfície de uma esfera com raio r e carga Q é dado por:

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ a esfera para de emitir elétrons quando seu potencial $V = K/e$. Assim;

$$Q = \frac{K}{e}4\pi\varepsilon_0 r = 8{,}14 \times 4 \times 3{,}14 \times 8{,}85.10^{-12} \times 10^{-2} = 9{,}1.10^{-12}\,C$$

$$N_e = \frac{Q}{e} = \frac{8{,}91.10^{-12}}{1{,}6.10^{-19}} = 5{,}7.10^{7} \text{ elétrons}$$

d) Variar a potência não altera o resultado. Dobrar o raio, dobra o número de elétrons emitidos.

Solução Q3. Solução do Problema de Corpo Negro

a) Planck fez a hipótese de que a energia dos osciladores que geram a radiação do corpo negro é quantizada, ou seja, $E = nhf$, onde n = 1,2,3,....; h é uma constante e f é a frequência do oscilador. A grandeza física que é afetada por esta hipótese é a energia média dos osciladores.

b) A expressão de Rayleigh-Jeans é válida no limite de grandes comprimentos de onda, ou seja, $\frac{hc}{\lambda k_B T} << 1$.

Neste limite temos $e^x \approx 1 + x + \ldots$, portanto $R(\lambda) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5[1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} + \ldots - 1]} \approx \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$.

c) $R(\lambda)d\lambda = R(f)df \Rightarrow R(f) = R(\lambda)\left|\frac{d\lambda}{df}\right| \Rightarrow R(f) = \frac{2\pi c^2 h}{\frac{c^5}{f^5}\left[e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1\right]}\frac{c}{f^2} \Rightarrow R(f) = \frac{2\pi hf^3}{c^2\left[e^{\frac{hf}{k_B T - 1}}\right]}$

d) $R = \int_0^\infty R(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5\left[e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right]}d\lambda = 2\pi hc^2\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}T^4$

Portanto $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}$

Solução Q4.

2a) O comprimento de onda mais curto na série de Balmer ocorre quando a transição é entre um nível que está no infinito ($n = \infty$) e o nível $n = 2$. Portanto para ionizar um átomo de hidrogênio que está no nível $n = 2$ fornece-lo uma energia igual a da transição entre os níveis $n = \infty$ e $n = 2$, ou seja

$$E_{ion} = \frac{2\pi c}{\lambda_\infty}\hbar = \frac{2.\pi.3.10^8 1,05.10^{-34}}{364,507.10^{-9}} = 5,43.10^{-19}J = 3,39eV$$

2b) Igualando a força de atração coulombiana a força centrípeta temos

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$

Temos ainda que:

$$L = m_e vr = n\hbar \Rightarrow (m_e vr)^2 = (n\hbar)^2 \Rightarrow v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2}$$

Igualando as duas equações temos que

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} = \frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2} \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}n^2$$

c) Substituindo o termo F/m_e na expressão para a potencia irradiada temos

$$W = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\tau = \frac{e^2\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}\right)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\tau = \frac{m_e v^2}{2}$$

Por outro lado temos que

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \Rightarrow \frac{m_e v^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$\frac{e^2\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}\right)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\tau = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \tau = \frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 r^3 c^3}{e^4} \simeq 3.10^{-11}s$$

para a primeira órbita.