Física IV para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320293
P1 – 10/09/2013

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta. Não será permitido o uso de calculadora. Se for necessário, deixe contas numéricas indicadas.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário.

Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

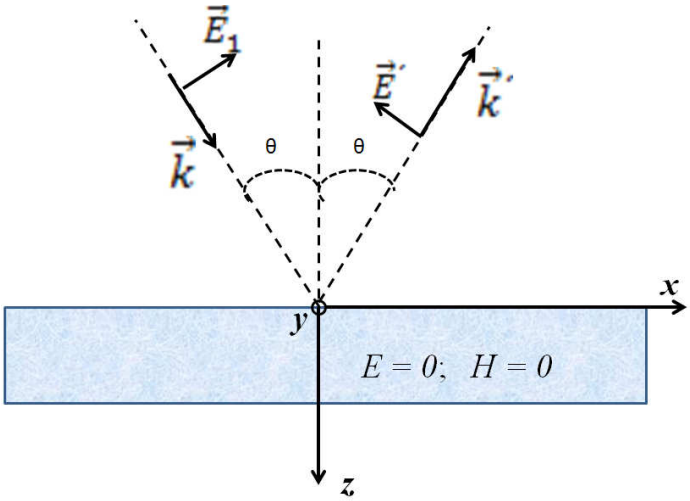
Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1. Uma onda eletromagnética plana incide obliquamente sobre uma chapa metálica plana, que pode ser considerada um condutor perfeito, e é refletida com o ângulo de reflexão igual ao de incidência, como indicado na figura. Dentro da chapa metálica o campo elétrico é nulo, mas, devido à incidência da onda eletromagnética, surge uma densidade de carga superficial σ e uma densidade superficial de corrente $\vec{K}$ na sua superfície. Considere que a superfície da chapa esteja no plano xy $(z = 0)$ e que o campo elétrico da onda incidente esteja no plano xz , isto é,

$$\vec{E}(x, z; t) = E_1(\cos\theta\,\hat{e}_x - \sin\theta\,\hat{e}_z)\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

onde

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k(x\sin\theta + z\cos\theta);\;\; k = \frac{\omega}{c};\;\; c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\;.$$



a) (0,5) <u>Utilizando a Lei de Faraday</u>, $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, demonstre que o campo magnético da onda incidente é dado por

$$\vec{H}(x,z;t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_1 \sin[k(x\sin\theta + z\cos\theta) - \omega t]\hat{e}_y$$

$$\nabla \times \vec{E} = E_1 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos\theta \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) & 0 & -\sin\theta \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-\hat{y})\left(-\sin\theta\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t).k\sin\theta - \cos\theta\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)k\cos\theta\right)$$

$$= k.\hat{y}\left\{\sin^2\theta\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \cos^2\theta\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t).k\right\} = k.\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\hat{y}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sin[k(x\sin\theta + z\cos\theta) - \omega t]\hat{y}$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_1\cos[\vec{k}.\vec{r} - \omega t]\hat{y}$$

$$= \omega kcE_1\cos[\vec{k}.\vec{r} - \omega t]\hat{y} = kE_1\cos[\vec{k}.\vec{r} - \omega t]\hat{y}$$

b) (1,0) Representando as componentes dos campos da onda refletida por $\vec{E}'$ e $\vec{H}'$, determine as relações entre as componentes *x* e *z* dos campos $\vec{E}$ e $\vec{E}'$ e entre as componentes *y* dos campos $\vec{H}$ e $\vec{H}'$ (lembre-se que $\sigma \neq 0$ e $\vec{K} \neq 0$) na superfície da placa.

Dentro do metal (meio 2) $\vec{E} = 0,\ \vec{H} = 0$

E tangencial: $E_{2,t} - E_{1,t} = 0$ mas no metal $E_{2,t} = 0 \rightarrow E_{1,t} = 0$

Somando as componentes tangenciais $E_1\cos\theta - E_1'\cos\theta = 0 \rightarrow \boxed{E_1' = E_1}$

D normal: $D_{2,n} - D_{1,n} = \sigma$ mas $D_{2,n} = 0$ $\varepsilon_0[-E_1\sin\theta - E'_1\sin\theta] = -\sigma$

Componentes tangenciais de *H*: $H_{2,t} - H_{1,t} = K$ mas $H_{2,t} = 0$ $H_{1,t} = -K$

$H_{1,t} + H_{2,t} = -K$. note que $B_n = 0$

c) (1,0) Determine as expressões para σ e $\vec{K}$ na superfície da placa em termos de μ_0, ϵ_0 e E_1.

$$\sigma = \varepsilon_0[E_1\sin\theta + E'_1\sin\theta] \qquad \sigma = \varepsilon_0\sin\theta[E_1 + E'_1] = 2\varepsilon_0 E_1\sin\theta$$

$$H_{1,t} + H_{2,t} = -K \qquad \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E_1}{c} + \frac{E'_1}{c}\right] = -K \quad |K| = \frac{2}{\mu_c c}E_1$$

A direção de *K* é tal que $\vec{H} = H\hat{y}$ portanto pela regra da mão direita $\vec{K} = \frac{2}{\mu_c c}E_1\hat{x}$

Q2. Uma onda eletromagnética plana de comprimento de onda $\lambda = 600nm$ e amplitude de campo elétrico E_0 incide normalmente sobre a superfície plana de uma placa de vidro de índice de refração $n_v = 1{,}5$ $(\mu_v = \mu_0)$.

a) (0,5) Determine o valor do coeficiente de reflexão do campo elétrico, $r = \frac{E_{refletido}}{E_{incidente}}$.

$$r = \frac{E_{refletido}}{E_{incidente}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{1{,}5 - 1{,}0}{2{,}5} = 0{,}20$$

b) (1,0) Determine o valor do coeficiente de Transmissão de intensidade, $T = \frac{I_{transmitido}}{I_{incidente}}$.

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{v_2 \varepsilon_2 E_2^2}{v_1 \varepsilon_1 E_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{E_2^2}{E_1^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} t^2 = \frac{n_2}{c} \frac{c}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{n_1 + n_2} = 0{,}96$$

c) (1,0) Para evitar a onda refletida, a placa de vidro é coberta com um filme fino de material transparente, com índice de refração $n = 1{,}3$. Determine a espessura d mínima necessária deste filme.

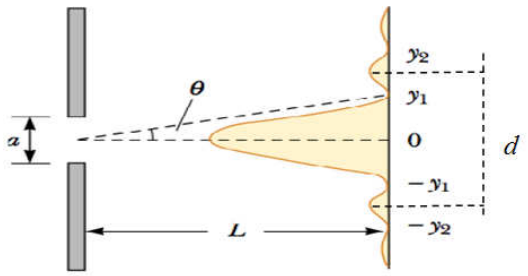
$n_f < n_v$ e $n_0 < n_f$. A reflexão nas duas interfaces ocorre com defasagem de π.

Para ocorrer interferência destrutiva total $\Delta\varphi = k(2D) = \pi, 3\pi, 5\pi ...$

No menor valor de espessura d vale: $\Delta\varphi = k(2d) = \pi$, $k(2d) = \pi$, $\frac{2\pi}{\lambda_f}(2d) = \pi$,

$$\lambda_f = \frac{\lambda}{n_f} \qquad d = \frac{\lambda_f}{4} = \frac{\lambda}{4n_f} = \frac{600}{4.1{,}3} = 115 \text{ nm}$$

Q3. Um feixe de luz laser, com comprimento de onda λ, incide sobre uma fenda simples de largura a e produz o padrão de difração de Fraunhofer indicado na figura.



Considerando o valor do ângulo θ pequeno, tal que $\sin\theta \approx \tan\theta = {}^{y}/_{L}$, pede-se determinar:

a) (0,5) a largura $2y_1$ do máximo central;

$$I = I_0\left(\frac{\sin \beta/2}{\beta/2}\right)^2 \quad \text{com} \quad \beta = ka\sin\theta$$

Exceto no máximo central, mínimos ocorrem quando $I = 0$ ou seja

$\frac{\beta}{2} = \frac{ka\sin\theta}{2} \cong \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{2}\frac{y_i}{L} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi...$ no primeiro mínimo, i=1, $\frac{2\pi}{\lambda}a\frac{y_1}{L} = \pi$

$y_1 = \frac{\lambda L}{a}$. A largura do máximo central vale $2y_1 = \frac{2\lambda L}{a}$

b) (1,0) a distância *d* entre os dois máximos adjacentes ao máximo central.

Máximo: $\frac{dI}{d\beta} = 0 \rightarrow \cos\frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta/2}\sin\frac{\beta}{2} = 0$ $\quad tg\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

pela tabela: $\frac{\beta}{2} \approx 1{,}43\pi$ $\quad \frac{\beta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a\sin\theta}{2} = 1{,}43\pi$ $\quad \sin\theta = \frac{d/2}{L} = 1{,}43\frac{\lambda}{a}$

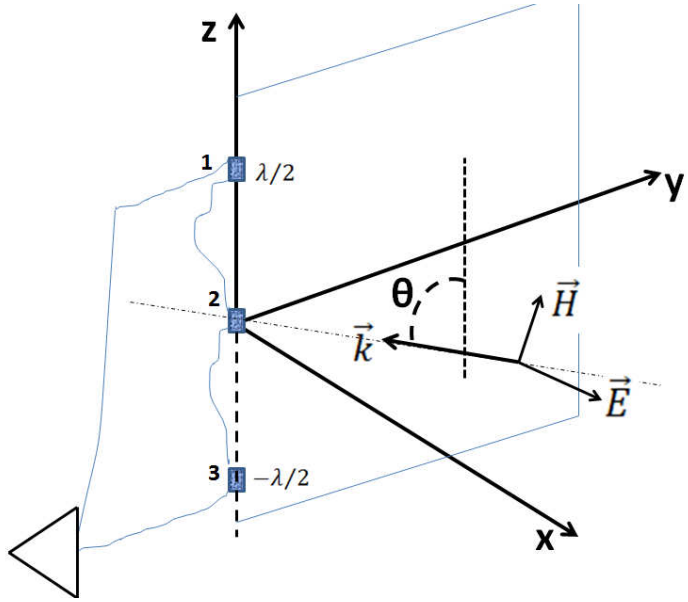
$d = 2{,}86\frac{\lambda a}{L}$

c) (1,0) Supondo agora que a largura a da fenda tenha sido alterada de modo que a distância entre o primeiro e o terceiro mínimos é de 2*mm*, determine o novo valor da largura da fenda, considerando $\lambda = 400nm$ e $L = 70cm$.

Q4. Neste problema vamos estudar um exemplo importante, em engenharia elétrica, de como o fenômeno de interferência se aplica a arranjos de antenas.

[Para fazer o problema corretamente, <u>não tente empregar fórmulas prontas</u>; simplesmente siga a descrição apresentada e utilize seus conhecimentos sobre fasores e seu entendimento sobre o fenômeno físico de interferência.]

Considere o arranjo linear de três antenas localizadas ao longo do eixo *z* mostrado na figura. Cada antena é representada por um retângulo e elas estão espaçadas entre si de uma distância ${}^{\lambda}/_{2}$, correspondente à metade do comprimento de onda do sinal a ser recebido. A voltagem induzida $V_i\ (i = 1,2,3)$ em cada antena é simplesmente proporcional ao campo elétrico da onda que sobre ela incide, e as voltagens das três antenas estão associadas em série na entrada do amplificador de sinal.



Suponha uma onda incidente, se propagando no plano *yz*, de forma que seu campo elétrico (na representação complexa) seja dado por

$$\vec{E}(y,z;t) = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\hat{e}_x = E_0 e^{-i[\omega t - k(-y\sin\theta + z\cos\theta)]}\hat{e}_x; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

a) (0,5) Denotando a amplitude da voltagem induzida em cada antena por V_0 ($V_0 \propto E_0$), e notando que o arranjo de antenas está na posição $y = 0$, escreva as expressões das voltagens induzidas nas antenas na forma $V_i = V_0 e^{-i(wt-\varphi_i)}$, especificando as expressões para as fases φ_i em termos de λ e θ , para *i* = 1,2,3.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}(0,\frac{\lambda}{2};t) = E_0 e^{-i(\omega t - k\frac{\lambda}{2}\cos\theta)}\hat{x}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}(0,0;t) = E_0 e^{-i(\omega t)}\hat{x}$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}(0,\frac{-\lambda}{2};t) = E_0 e^{-i(\omega t + k\frac{\lambda}{2}\cos\theta)}\hat{x}$$

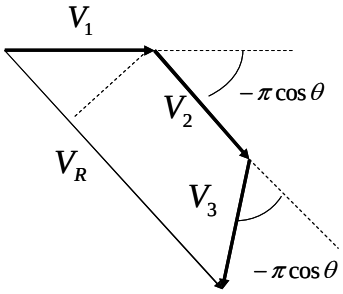
$$\varphi_1 = \pi\cos\theta$$

$$\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_3 = -\pi\cos\theta$$

b) (0,5) Faça um diagrama fasorial da voltagem V_R resultante da associação em série das três antenas, para qualquer valor de θ .

$$V_R = 2V_0\cos(\pi\cos\theta) + V_0$$



c) (0,5) Determine o valo do ângulo θ para o qual o valor de V_R é máximo.

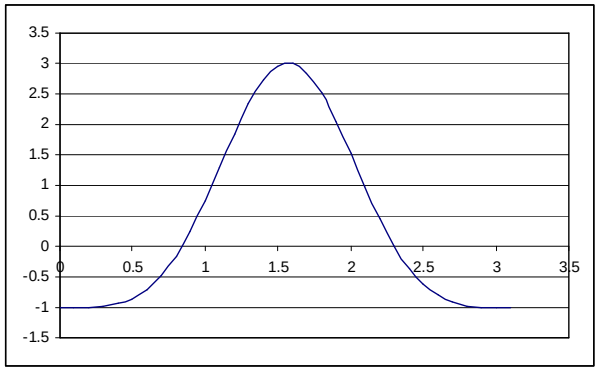
$$V_R = V_0\left(2\cos(\pi\cos\theta) + 1\right)$$

V_R máximo: $\cos(\pi\cos\theta) = 1 \rightarrow \pi\cos\theta = 0$ $\qquad \theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad V_R = 3V_0$

d) (0,5) Determine o valor de V_R para $\theta = 0$.

e) (0,5) Determine os valores de θ , no intervalo entre 0 e π, para os quais $V_R = 0$.

$$2\cos(\pi\cos\theta) = -1$$
$$\cos(\pi\cos\theta) = -0.5$$
$$\pi\cos\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$$
$$\cos\theta = \pm\frac{2}{3};$$



Formulário

Equações de Maxwell

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E};\ \ \vec{B} = \mu\vec{H};\ \ \nabla\cdot\vec{D} = \rho;\ \ \nabla\cdot\vec{B} = 0;\ \ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \ \nabla\times\vec{H} = \mu\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Condições de contorno

$$E_{2,tan} - E_{1,tan} - 0\ \ \left[\hat{n}_{12}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) - 0\right];\ \ H_{2,tan} - H_{1,tan} - K\ \ \left[\hat{n}_{12}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) - \vec{K}\right]$$

$$D_{2,normal} - D_{1,normal} = \sigma\ \ \left[\hat{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma\right];\ \ B_{2,normal} - B_{1,normal} = 0$$

Reflexão e Transmissão

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2};\ \ t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}; R = \frac{I_{ref}}{I_{inc}}; T = \frac{I_{trans}}{I_{inc}};\ \ I = v\epsilon E^2;\ \ v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}};\ \ \ \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Interferência e difração

Defasagem, interferência de duas fendas: $\varphi = kd\sin\theta; k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Intensidade de difração de Fraunhofer: $I_\theta = I_0\left[\frac{\sin\left(\beta/2\right)}{\beta/2}\right]^2;\ \beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$

Interferência e difração: $I_\theta = I_0\left[\cos\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)\right]^2\left[\frac{\sin\left(\beta/2\right)}{\beta/2}\right]^2$

Matemática

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$

θ	1,4 π	1,41 π	1,42 π	1,43 π	1,44 π	1,45 π	1,46 π	1,47 π
$\tan\theta$	0,979 π	1,096 π	1,240 π	1,424 π	1,670 π	2,010 π	2,520 π	3,367 π