Aulas 1 – Matemática
Revisão

Piracicaba, agosto de 2019

Professora Dra. Andréia Adami

Sumário

- Otimização

- Otimização Não Condicionada
  - ✓Condição de primeira ordem para máximo
  - ✓Condição de segunda ordem para máximo

- Otimização Condicionada
  - ✓O método de Lagrange
  - ✓Condição de primeira ordem para máximo
  - ✓Condição de segunda ordem para máximo

Otimização

- Por que o uso da técnica matemática de derivação (diferenciação) é importante na análise econômica?

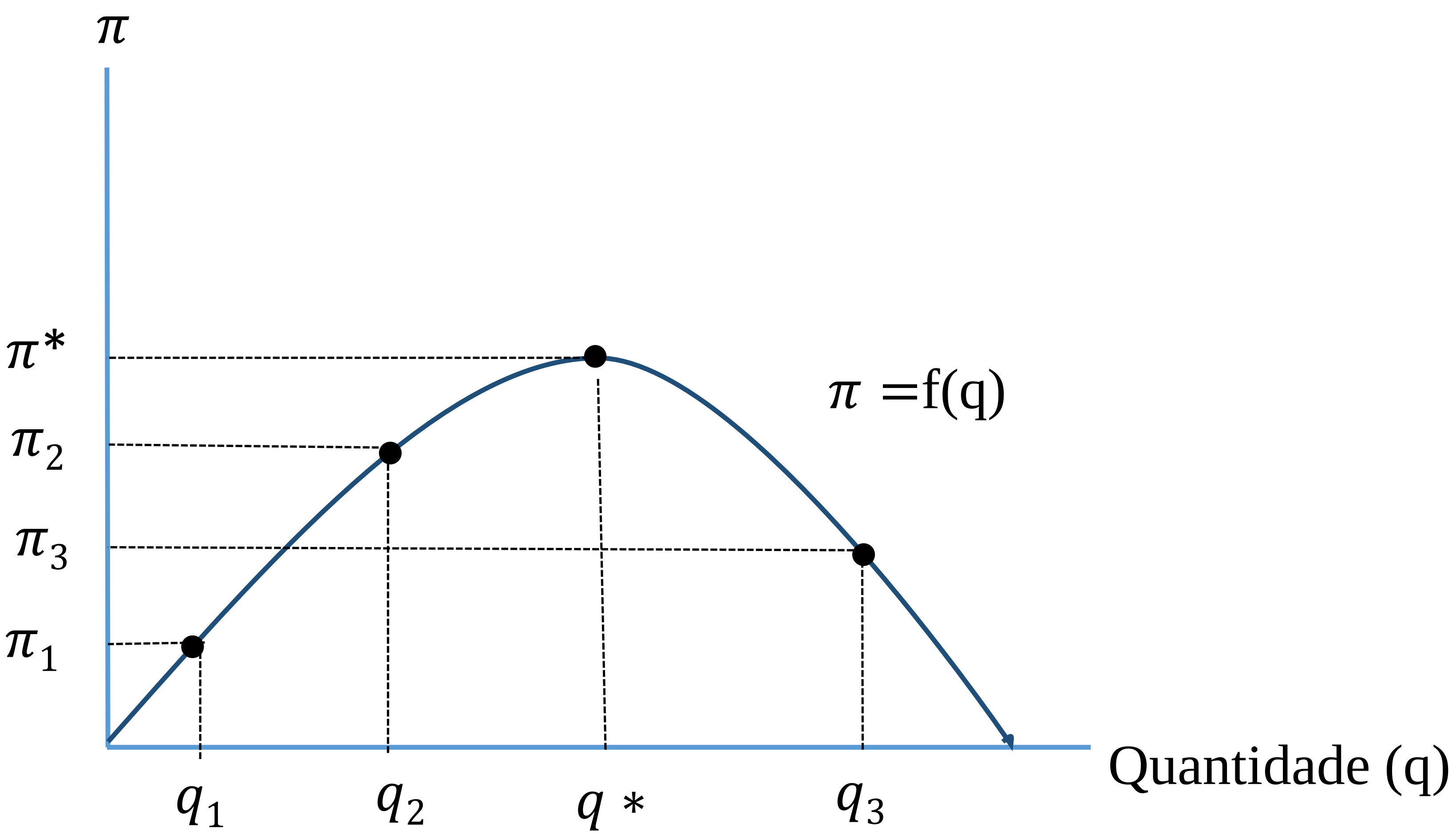
Otimização

- Vamos supor que a firma XYZ deseja maximizar seu lucro.

✓Matematicamente podemos escrever a função lucro como:

$$\pi = f(q)$$

Otimização



Otimização

- Até quando o gerente da fábrica deve continuar a aumentar a quantidade produzida – q?

Otimização

A empresa continuará a expandir a produção enquanto $\frac{\pi_{2-}\pi_{1}}{q_{2}-q_{1}} > 0$, ou

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0$$

Otimização

✓Matematicamente, quando tomamos o limite de $\frac{\Delta\pi}{\Delta q}$ para pequenas variações (infinitesimais) em *q* - temos a derivada da função $\pi=f(q)$, e podemos escrever como: $\frac{d\pi}{dq}$ ou $\frac{df(\pi)}{dq}$ ou ainda $f'(q)$.

$$\text{Assim, } \frac{d\pi}{dq} = \frac{df}{dq} = \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(q1+h)-f(q1)}{h}.$$

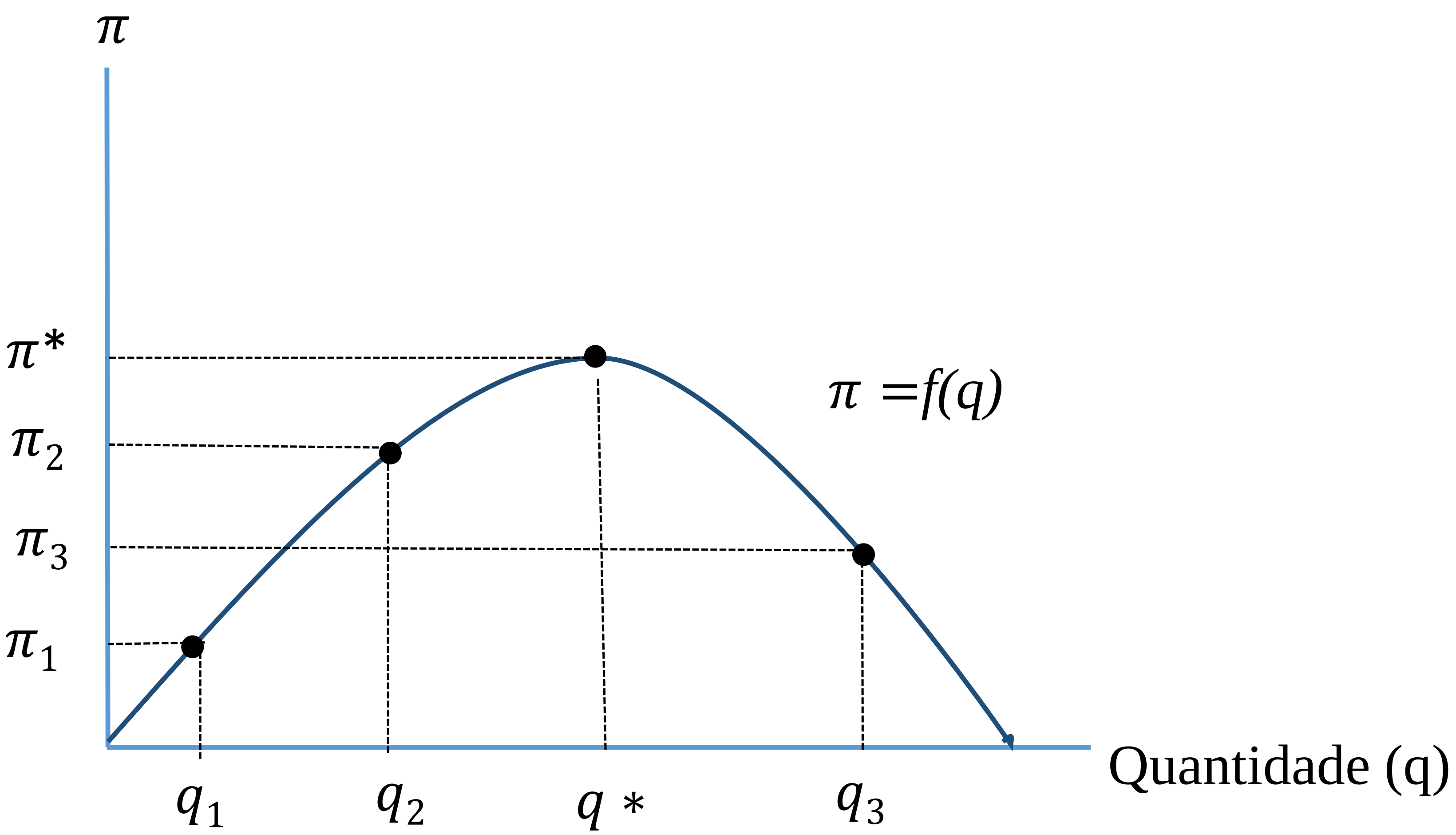
com $h = \Delta q$

Otimização

- Notação: Função derivada avaliada no ponto $q = q1$

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q1}$$

Otimização



Otimização

- Inclinação da curva: $\pi = f(q)$

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{\mathrm{q=q1}} > 0 \quad \mathrm{e} \quad \left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{\mathrm{q=q3}} < 0$$

E em $\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{\mathrm{q=q*}}$?

Otimização

- Condição de primeira ordem: $\frac{df}{dq} = 0$

$$\left.\frac{df}{dq}\right|_{q=q^*} = 0$$

Otimização

- Condição de segunda ordem:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \quad ou \ \frac{d^2 f}{dq^2} \ ou \ f''(q)$$

Otimização

- Condição de segunda ordem para o máximo: $\frac{d^2 f}{dq^2} < 0$

$$\left.\frac{d^2 f}{dq^2}\right|_{q=q^*} < 0$$

Otimização

- Regras de derivação:

1)Função Constante: Seja $f(x) = a$, então $f'(x)=0$ para todo x pertencente ao domínio da função;

2)Função potência: Se $f(x) = x^n$, $então$: $f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer;

3)Função logarítmica: Se $f(x) = \ln x$, $então$: $f'(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$;

4) Derivada do Produto de uma constante por uma função:

Seja f uma função e a uma constante, se g é definida por:

$$g(x) = af(x)$$
$$g'(x) = af'(x)$$

Regras de derivação

5)Derivada de uma soma e/ou diferença: Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$;

6) *Derivada de um produto:* Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) * g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Regras de derivação

7) *Derivada de um quociente:* Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e g(x)≠ 0. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g\prime(x)}{[g(x)]^2}$

8) Derivada da função exponencial: Seja $f(x) = a^x$, então: $f'(x) = a^x lna$, para todo x real, com a>0 e a≠ 1

Caso especial: $f(x) = e^x$, $f'^{(x)} = e^x lne = e^x$

Regras de derivação

9) Função Composta – Regra da Cadeia

Utiliza-se a regra da cadeia para situações onde temos que derivar funções compostas, isto é, quando a variável independente também é uma função. Se y $= f(u)$, u $= g(x)$, e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então, a função composta y $= u(g(x))$ tem

derivadas dadas por: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ ou seja: $f'(x) = f'(u).u'(x)$

Com $\frac{dy}{du} = f'(x)$ *e* $\frac{du}{dx} = u'(x)$

- Exemplos: 1) $y = e^{ax} =$

  2) $y = \ln(ax) =$

  3) $y = \ln(x^2) =$

Regras de derivação

9) Função Composta – Regra da Cadeia

Utiliza-se a regra da cadeia para situações onde temos que derivar funções compostas, isto é, quando a variável independente também é uma função. Se $\mathrm{y} = \mathrm{f(u)}, \mathrm{u} = \mathrm{g(x)}$, e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então, a função composta $\mathrm{y} = \mathrm{u(g(x))}$ tem

derivadas dadas por: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ ou seja: $f'(x) = f'(u).u'(x)$

Com $\frac{dy}{du} = f'(x)$ *e* $\frac{du}{dx} = u'(x)$

- Exemplos: 1) $y = e^{ax} = ae^{ax}$

  2) $y = \ln(ax) = \frac{1}{ax}.a = \frac{1}{x}$

  3) $y = \ln(x^2) = \frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x}$

Exemplo Maximização Lucro

- Seja a função lucro: $\pi = 1.000q\ - 5q^2$

✓Encontre o valor de q que maximiza a função lucro

Exemplo Maximização Lucro

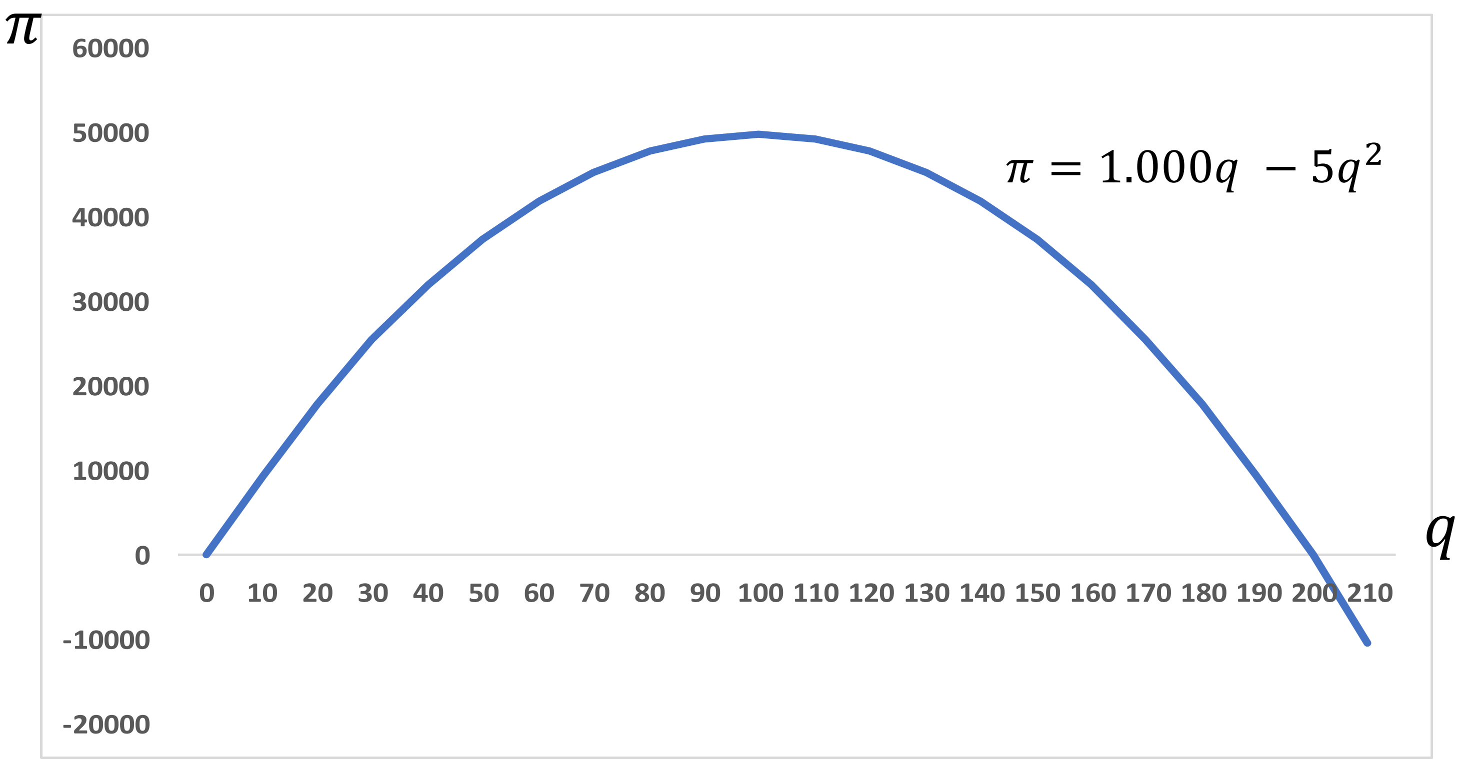
- Encontre o valor de q que maximiza a função lucro

✓ $\frac{d\pi}{dq} = 1.000 - 2(5q) = 1.000 - 10\,q$

✓ $q^* = ?$

✓ $\pi^* = ?$

Exemplo Maximização Lucro



Exemplo Maximização Lucro

- Encontre o valor de q que maximiza a função lucro:

✓ $\frac{d\pi}{dq} = 1.000\ - 2(5q) = 1.000\ - 10\ q$

✓ $q^* = \frac{1000}{10} = 100$

✓ $\pi = 1.000\ (100) - 5(100)^2 = 50.000$

Exemplo Maximização Lucro

- Podemos garantir que q=100 é realmente um ponto de máximo?

- Condição de segunda ordem (suficiente)

- Para que o ponto encontrado seja um máximo da função, $d^2y < 0$, o que implica que: $f''(x)dx^2 < 0$, assim, $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$.

$$\pi = 1000q - 5q^2$$

$$\frac{d\pi}{dq} =$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} =$$

Exemplo Maximização Lucro

- Podemos garantir que q=100 é realmente um ponto de máximo?

- Condição de segunda ordem (suficiente)

• Para que o ponto encontrado seja um máximo da função, $d^2y < 0$, o que implica que: $f''(x)dx^2 < 0$, assim, $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$.

$$\pi = 1000q - 5q^2$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 1000 - 2 * (5)q$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Funções de várias variáveis:

✓ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- Derivadas parciais

✓ $\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad ou \ \frac{\partial f}{\partial x_1}$

✓ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) - f(x_1, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}{h}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Seja $y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$

✓ As derivadas parciais da função em relação às variáveis x_1 e x_2 são:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as seguintes derivadas parciais:

$$y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 =$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 =$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as seguintes derivadas parciais:

$$y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 2ax_1 + bx_2$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = bx_1 + 2cx_2$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função:

$$y = f(x_1, x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 =$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 =$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função:

$y = f(x_1, x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{a}{x_1}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = \frac{b}{x_2}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função: y $= f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 =$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 =$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função: y $= f(x_1, x_2) = e^{ax_1+bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = ae^{ax_1+bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = be^{ax_1+bx_2}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

✓Calcule as derivadas segunda ordem das funções:

1) $= f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2$

$f_{11} =?$

$f_{12} =?$

$f_{21} =?$

$f_{22} =?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

$1) = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2$

$$f_{11} = 2a$$
$$f_{12} = b$$
$$f_{21} = b$$
$$f_{22} = 2c$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

2) $y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$

$f_{11} = ?$

$f_{12} = ?$

$f_{21} = ?$

$f_{22} = ?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

2) $\mathrm{y} = f(x_1, x_2) = e^{ax_1+bx_2}$

$$f_{11} = a^2 e^{ax_1+bx_2}$$
$$f_{12} = abe^{ax_1+bx_2}$$
$$f_{21} = abe^{ax_1+bx_2}$$
$$f_{22} = b^2 e^{ax_1+bx_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

3) $y = f(x_1,\ x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$

$f_{11} =?$
$f_{12} =?$
$f_{21} =?$

$f_{22} =?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

3) y = $f(x_1,\ x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$

$$f_{11} = -ax^{-2}$$
$$f_{12} = 0$$
$$f_{21} = 0$$
$$f_{22} = -bx^{-2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Teorema de Young: $f_{ji} = f_{ij}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Função implícita :y $= 0 = f(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1))$
- Obs.: $x_2 = g(x_1)$
- Usando a regra da cadeia para diferenciar y em relação a x_1 temos:

$$0 = f_1 + f_2 . \frac{dg(x_1)}{dx_1}$$

✓Reorganizando os termos temos:

$$\frac{dg(x_1)}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Função implícita: Exemplo

✓Seja a função fronteira de possibilidade de produção dada por:

$$x^2 + 0{,}25y^2 = 200$$

✓Como podemos estudar a relação entre as variáveis *x* e *y* usando os resultados da função implícita?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy} = -\frac{2x}{0{,}5y} = -\frac{4x}{y}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem: como no caso de uma única variável, a condição necessária é a de que $dy = 0$ para pequenas variações (infinitesimais) em x ao redor do ponto ótimo.
  - Assim, para o caso da função: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a medida que a função atinja um determinado ponto ótimo, movimentos em qualquer direção não devem alterar o valor da função, isso ocorre quando todas as derivadas parciais da função são zero:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -x_1{}^2 + 2x_1 - x_2{}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que *y* representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2 , dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 *que maximizam y:*

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -x_1{}^2 + 2x_1 - x_2{}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que *y* representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2, dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 *que maximizam y:*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 = 0$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -{x_1}^2 + 2x_1 - {x_2}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que y representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2, dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 *que maximizam y:*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 = 0$$

$Portanto,$ ${x_1}$*=1 e ${x_2}$*=2 e y*=10.

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de segunda ordem
- Funções de duas variáveis

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Condição necessária: $f_1 = f_2 = 0$
- Condição suficiente: $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$

✓Demonstração: tomando a diferencial total de *y* temos:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

✓Diferenciando mais uma vez – diferencial total de segunda ordem:

$$d^2y = (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2)dx_1 + (f_{21}dx_1 + f_{22}dx_2)dx_2$$
$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_2dx_1 + f_{21}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

✓Pelo Teorema de Young, $f_{12} = f_{21}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Maximização sem restrição - Funções de duas variáveis

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Condição necessária: $f_1 = f_2 = 0$
- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_2dx_1 + f_{22}dx_2^2$$

✓A condição de segunda ordem para o máximo requer que as derivadas parciais f_{11} e f_{22} sejam negativas o suficiente, para que seu produto supere os efeitos das derivadas parciais cruzadas ($f_{12=} f_{21}$). Funções com essa características são conhecidas como funções côncavas.

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -x_1{}^2 + 2x_1 - x_2{}^2 + 4x_2 + 5$$

✓ Dado que y representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2, dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 que maximizam y e verifique se a função é côncava.

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -x_1{}^2 + 2x_1 - x_2{}^2 + 4x_2 + 5$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = -2x_1 + 2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = -2x_2 + 4 = 0$$

$Portanto, x_1$*=1 e x_2*=2 e y*=10.

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

✓ *Solução:*

$$f_{11} = -2$$
$$f_{22} = -2$$
$$f_{22} = 0$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 4 - 0 > 0$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Resumo para problema de maximização sem restrição – duas variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$
Segunda ordem	$f_{11}, f_{22} < 0$ e $f_{11}f_{22} > f_{12}^2$	$f_{11}, f_{22} > 0$ e $f_{11}f_{22} > f_{12}^2$

Maximização de funções de várias variáveis

- Resumo para problema de maximização sem restrição de funções de *n* variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$
Segunda ordem	$\lvert H_1\rvert < 0;\ \lvert H_2\rvert > 0;$ $\lvert H_3\rvert < 0; \ldots$ $d\,^2y$ é $definida\ negativa$ A função é estritamente côncava	$\lvert H_1\rvert > 0;\ \lvert H_2\rvert > 0;$ $\lvert H_3\rvert > 0; \ldots$ $d\,^2y$ é $definida\ positiva$ A função é estritamente convexa

Maximização Não Condicionada

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exemplo para o caso de três variáveis

- $|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$

Maximização Não Condicionada

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exemplo para o caso de três variáveis

- $|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ $\qquad |H_1| = |f_{11}|$

Maximização Não Condicionada

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exercício: para a função $y = -x_1^3 + 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2 - 3x_3^2$

- Encontrar os pontos críticos e verificar se trata-se de um ponto de máximo ou de mínimo através do determinante da matriz Hessiano.

Maximização Condicionada

- Quando o indivíduo toma sua decisão de compra (consumo), ele não poderá escolher as quantidades dos bens que irá compor sua cesta de consumo sem levar em conta sua renda (restrição orçamentária). Assim, as quantidades consumidas dos bens estarão limitadas pela renda disponível do consumidor.

Maximização Condicionada

- Maximização com restrição

✓Um método para resolver problemas de maximização com restrição é o método do Multiplicador de Lagrange.

✓Problemas: Encontre os valores da variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximizem a função y sujeito à restrição que permite que apenas alguns valores de x sejam escolhidos, $\mathrm{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representa a relação de restrição entre as variáveis.

$$\mathrm{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathrm{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Maximização Condicionada

- O Método de Lagrange:

- $L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$

✓ $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1$

✓ $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2$

$\vdots$

✓ $\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n$

✓ $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

Maximização Condicionada

- Interpretação do Multiplicador de Lagrange.

✓Solução geral: $\frac{f_1}{-g_1} = \frac{f_2}{-g_2} = \cdots = \frac{f_n}{-g_n} = \lambda$

✓$\lambda = \frac{benefício\ marginal\ de\ x_i}{custo\ marginal\ de\ x_i}$

✓A derivada g_i reflete o custo marginal relativo ao uso de x_i

Maximização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_n}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

Maximização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema de duas variáveis com restrição fica:

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$

Maximização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema de três veriáveis com restrição fica:

- $|\overline{H_3}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ g_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$

Maximização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)
- Retornando ao problema de maximização da saúde do indivíduo, o objetivo é maximizar a função: $y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5$,
- Mas agora, suponha que a escolha das doses de x_1 e x_2, estejam sujeitas a restrição de que o indivíduo possa tomar apenas uma dose por dia: $x_1 + x_2 = 1$, ou

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

Maximização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)

- $L = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - \; x_1 - x_2)$
- Condição de primeira ordem:

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 - \lambda = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 - \lambda = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \; x_1 - x_2 = 0$

Maximização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)

- $Solução$:

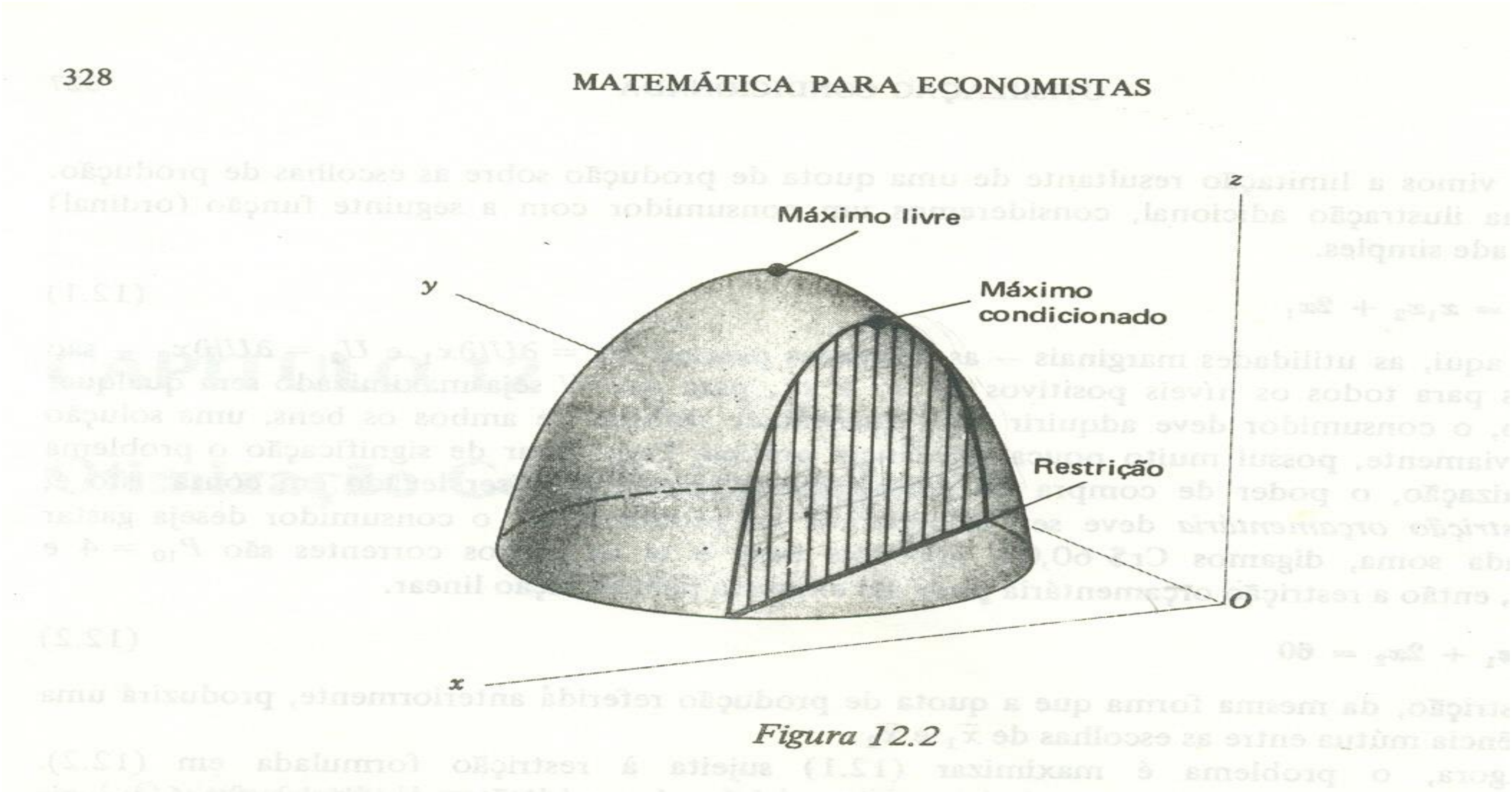
✓ $-2x_1 + 2 = -2x_2 + 4 = \lambda$

✓ $x_1 = x_2 - 1$

✓ $x_2^* = 1$ e $x_1^* = 0$ e λ=2

- Max sem restrição: $y^* = 10$
- Max com restrição: $y^* = 8$

Maximização Condicionada



Maximização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

✓Hessiano Orlado

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Maximização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

✓Hessiano Orlado

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

✓Primeiro menor

- $|\overline{H_1}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ = -1

Maximização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-2 + 0 - 2) = 4$

Portanto, em $x_2^* = 1$ e $x_1^* = 0$ a função atinge o máximo.

Maximização Condicionada

- Resumo para problema de maximização com restrição de funções de *n* variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$
Segunda ordem	$\lvert\overline{H_2}\rvert > 0;\ \lvert\overline{H_3}\rvert < 0;\ \lvert\overline{H_4}\rvert > 0; \ldots$ d^2y é $definida\ negativa$ A função é estritamente côncava	$\lvert\overline{H_2}\rvert < 0;\ \lvert\overline{H_3}\rvert < 0;\ \lvert\overline{H_4}\rvert < 0; \ldots$ d^2y é $definida\ positiva$ A função é estritamente convexa

Referências Bibliográficas

- ✓ NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 2, pg. 21-33.
- ✓ALPHA CHIANG. Matemática para Economistas. Pearson Education.