

# Difração

Em meados do século XVII foi publicado um trabalho, de autoria de Francesco Grimaldi descrevendo o fenômeno que o autor chamou de “Diffractio”. Esse fenômeno era a propagação não retilínea da luz, que é percebido a olho nu sob determinadas circunstâncias.

Na verdade, esse efeito é uma característica de todos os fenômenos ondulatórios, sejam eles sonoros, eletromagnéticos ou ondas de matéria e ele ocorre toda vez que uma porção de uma frente de onda é obstruída de alguma maneira. O que acontece é que ao encontrar o obstáculo (seja ele transparente ou opaco), os vários segmentos da frente de onda vão sofrer alterações de amplitude ou fase tais que, ao se propagarem para além do obstáculo, vão interferir ocasionando uma distribuição particular de energia que é conhecida como espectro de difração ou figura de difração.

Esse comportamento, apesar de ocorrer sempre, pode não ser notado. O domínio da Óptica Geométrica ou os fenômenos ópticos que podem ser explicados por essa teoria são aqueles que ocorrem em condições tais que os efeitos da difração são desprezíveis.

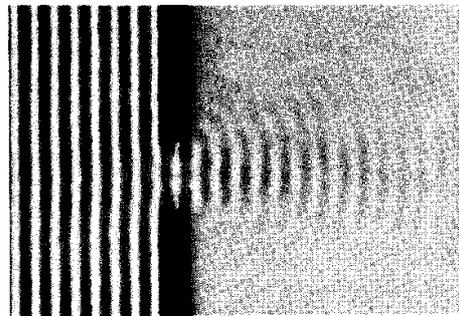
O tratamento completo da difração deve ser realizado através da teoria da eletrodinâmica quântica, entretanto, para as experiências que estamos propondo, a teoria eletromagnética clássica, que possibilita um tratamento extremamente mais simples, é mais que suficiente.

## O Princípio de Huygens-Fresnel

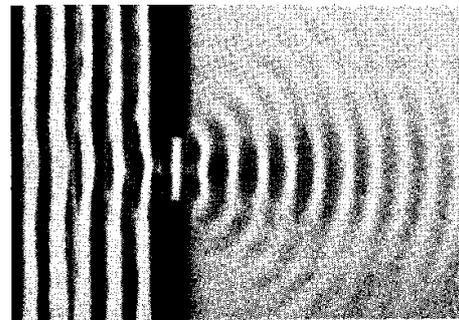
Uma primeira tentativa de explicar o fenômeno da difração seria considerar o princípio de **Huygens**. Esse princípio diz que cada ponto de uma frente de onda pode ser considerado como uma fonte secundária de ondas esféricas. Portanto, o progresso no espaço dessa frente de onda, ou de qualquer parte dela, poderia ser determinado: em qualquer instante a forma da frente de onda seria o envelope das ondas esféricas secundárias. (Para uma discussão mais detalhada veja o **capítulo 4, seção 4.42** do livro **Optica** de E. Hecht).

Esse princípio independe do comprimento de onda e prevê o mesmo comportamento para ondas de diferentes comprimentos de onda ao encontrarem o mesmo obstáculo. Essa técnica, entretanto, ignora a maior parte da onda secundária, tratando somente da parte das ondas que se somam para formar o envelope. O resultado disso é que o princípio de **Huygens**, sozinho, não consegue explicar vários detalhes do processo de difração, por exemplo: ondas sonoras de comprimento de onda da ordem de **70 cm**, sofrem difração, isto é, se curvam em torno de obstáculos grandes como árvores ou postes de telefone, enquanto que ondas de luz visível, de comprimento de onda muito menor ( $\sim 600 \times 10^{-7} \text{ cm}$ ) não sofrem difração nos mesmos obstáculos, projetando deles sombras que podem ser previstas pela teoria que leva em conta a propagação retilínea da luz.

Essa dificuldade foi resolvida por **Fresnel**, adicionando a esse princípio, o conceito de interferência. Foi elaborado um novo princípio que é conhecido como **Princípio de Huygens-Fresnel** que diz que **qualquer ponto de uma frente de onda que não seja obstruído, em qualquer instante se comporta como uma fonte de ondas esféricas secundárias, da mesma frequência da onda primária. A amplitude do campo óptico em qualquer ponto após a passagem pelo obstáculo, é a superposição das amplitudes das ondas esféricas secundárias, levando em conta suas fases relativas.**



(a)



(b)



(c)

**Figura 4.1: Difração de ondas na água através de uma abertura para três diferentes comprimentos de onda.**

Classicamente, a razão pela qual a luz atinge regiões para além do obstáculo, regiões que não seriam atingidas caso a luz se

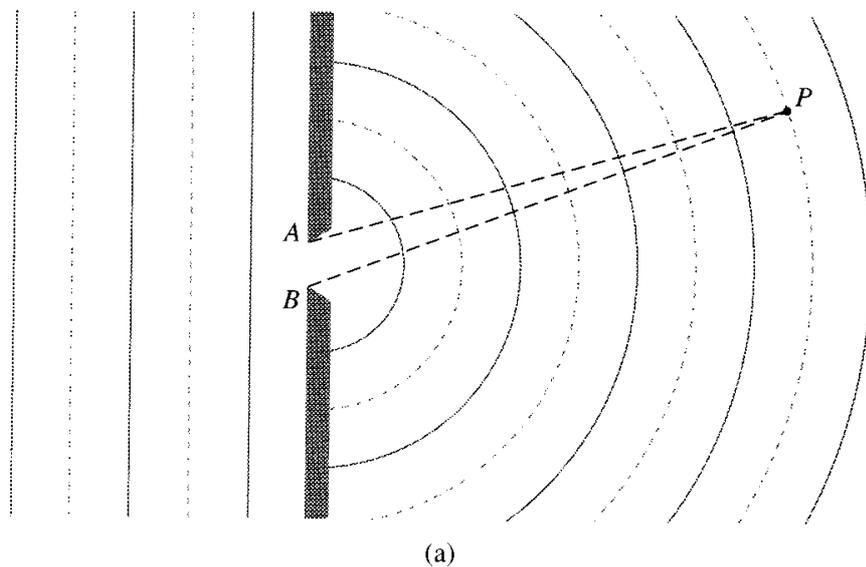
propagasse em linha reta, é que o grande número de ondas secundárias esféricas “emitidas pela abertura” no anteparo, interferem. Interferir quer dizer se combinar, levando em conta as diferenças de fase. Essa interferência ocorre em cada ponto da região além do obstáculo, de maneira que, às vezes, as ondas se somam, às vezes, se cancelam, dependendo do comprimento do caminho óptico de cada uma. É bom ter sempre em mente que quando se fala em **caminho óptico** está-se falando de **fase**, e **diferença de caminho óptico** significa **diferença de fase**.

Vamos estudar o que ocorre com o exemplo da **figura 4.1**, que é a foto de um tanque com água, em que são formadas ondas planas. Essas ondas encontram um obstáculo, paralelo às frentes de onda, que possui uma abertura. Nessas figuras, o comprimento de onda varia e a dimensão da abertura no obstáculo permanece constante. Na **figura 4.1(a)** o comprimento de onda é pequeno em relação à largura da abertura. Na **figura 4.1(b)** ele é da ordem da dimensão da abertura, enquanto que na **figura 4.1(c)** o comprimento de onda é maior que a dimensão da abertura.

Aplicando o princípio de **Huygens-Fresnel** a esse exemplo, a **figura 4.2** é um esquema do que está ocorrendo no exemplo da **figura 4.1** e ajuda a compreender o que estará acontecendo num ponto **P**, qualquer, situado além do obstáculo:

Se cada ponto da frente de onda plana que chega à abertura funciona como uma fonte secundária coerente, a diferença máxima de caminho óptico entre elas,  $\Delta_{\max}$ , seria o módulo de  $(AP - BP)$ , que corresponde às fontes secundárias mais afastadas, situadas nos extremos da abertura. Mas essa diferença máxima de caminho óptico seria menor ou igual à dimensão da abertura, **AB** (que seria o caso em que o ponto **P** estaria sobre a abertura):

$$AP - BP = \Delta_{\max} \leq AB \quad (4.1)$$



**Figura 4.2: Esquema da difração através de uma abertura num obstáculo opaco.**

Portanto, se o comprimento de onda incidente é maior que **AB**, esse comprimento de onda será maior que  $\Delta_{\max}$ , que é a diferença de caminho óptico entre os raios que saem dos extremos da fenda. Considerando que as ondas, na abertura, estivessem inicialmente em fase, para além do anteparo elas vão todas interferir construtivamente (em diferentes graus, mas praticamente só interferem construtivamente porque a diferença de caminho óptico (ou diferença de fase) vai ser sempre bem menor que um comprimento de onda), qualquer que seja o ponto **P**. É o que se vê na **figura 4.1c**.

Então, se o comprimento de onda é grande comparado à abertura da fenda, as ondas vão se espalhar em ângulos grandes na região além (ou atrás) do obstáculo. De fato quanto menor a

abertura, mais esféricas são as ondas difratadas e maior será a região iluminada do anteparo.

A situação oposta ocorre quando o comprimento de onda é menor que a abertura no anteparo como visto na **figura 4.1a**. A área correspondente aos pontos do anteparo para os quais o comprimento de onda é maior que a diferença de caminho óptico entre os raios provenientes das extremidades da abertura, é restrita à região praticamente em frente a abertura (onde **(AP-BP)** é pequeno). Nessa região, as ondas esféricas secundárias provenientes da abertura interferem construtivamente com intensidade alta. Fora dessa região começa a interferência destrutiva ou “sombra”.

Na verdade, pode haver outras regiões, em ângulos maiores, onde vai ocorrer interferência construtiva, mas a intensidade terá caído tanto que essas regiões são praticamente inobserváveis. A sombra geométrica descrita classicamente corresponderia ao limite de  $\lambda \rightarrow 0$ .

Dependendo da relação entre o comprimento de onda incidente e a dimensão da abertura, será possível observar regiões de interferência construtiva e de interferência destrutiva para além do anteparo. Ou seja, nessa situação é possível observar um padrão de máximos e mínimos que é conhecido como figura de difração.

Pode-se concluir que, do ponto de vista qualitativo, o princípio de **Huygens -Fresnel** leva à conclusão de que a luz (ou outra onda qualquer) sofre difração e isso ocorre devido à interferência. Analisando o fenômeno qualitativamente, do ponto de vista da eletrodinâmica quântica chega-se à mesma conclusão. Do ponto de vista quantitativo, o tratamento da difração baseado nesse princípio apresenta algumas dificuldades. Depois de **Huygens, Kirchhoff** refinou a análise do fenômeno e levou à formulação do princípio de **Huygens -Fresnel** como uma consequência direta da equação de onda.

A teoria de **Kirchhoff**, entretanto, também é uma aproximação. Foi somente em **1896** que **A. J. W. Sommerfeld** chegou à primeira solução exata para uma configuração difratora particular (e simples) utilizando a teoria eletromagnética da luz.

Soluções exatas desse tipo não existem, ainda hoje, para muitas configurações de interesse prático. Portanto, no presente estudo vamos nos ater a soluções obtidas com os tratamentos mais simples, mas aproximados, desenvolvidos por **Huygens-Fresnel** e **Kirchhoff**. Essas soluções provaram serem adequadas para os casos que nos propomos a estudar.

## Difração de Fresnel e Difração de Fraunhofer

Vamos supor que temos uma tela opaca que indicaremos por  $\Sigma$  que contenha uma única e pequena abertura e que essa tela seja iluminada por ondas planas de luz.

Como já mencionado, pode ocorrer o fenômeno de difração. Se isso ocorre pode-se pensar que a difração é uma consequência da interação das ondas eletromagnéticas com o material da tela. Então, seria interessante examinar (muito rapidamente) o que de fato está ocorrendo dentro do material dessa tela quando atingido por radiação eletromagnética.

Considerando a tela  $\Sigma$  numa escala submicroscópica, podemos imaginar que a nuvem eletrônica de cada átomo é colocada para vibrar pelo campo elétrico da radiação incidente. O modelo clássico que descreve os elétrons como osciladores vibrando e reemitindo com a mesma frequência da fonte, funciona muito bem para a descrição desse fenômeno, portanto, não é necessário nos preocuparmos aqui com a descrição quântica da difração.

A amplitude e a fase de um desses osciladores dentro da tela vão ser definidas pelo campo elétrico local que o envolve, que por sua vez, é a superposição do campo eletromagnético incidente e dos campos de todos os outros elétrons que estão oscilando.

Se a tela é opaca e não contém aberturas, observa-se que quando for iluminada de um lado, não haverá campo óptico do outro lado. Do ponto de vista clássico, pode-se compreender esse efeito considerando que os elétrons perto da superfície iluminada vão ser colocados para oscilar pela radiação incidente. Portanto, eles vão emitir energia eletromagnética que poderá ser refletida para trás, ou absorvida pelo material, ou ambos. Se o material é opaco, os campos da onda incidente e o da onda emitida pelos elétrons-osciladores vão se superpor de tal maneira que se cancelam completamente na região não iluminada do anteparo. Em geral, a onda incidente se propaga para além dos elétrons-osciladores da superfície do anteparo, excitando mais elétrons que vão irradiar e essa radiação emitida tende a cancelar a onda incidente. Assim, à medida que ela penetra no material, a onda incidente vai ficando cada vez mais fraca

até sumir completamente, se o material do anteparo for suficientemente espesso. A espessura é importante porque mesmo materiais opacos, como metais em geral, ficam semitransparentes quando usinados sob forma de folhas muito finas.

Agora vamos ver o que acontece quando fazemos uma abertura pequena no centro da tela, ou seja, retiramos um pequeno disco dessa tela. Os elétrons-osciladores que estavam na parte que foi removida não vão mais afetar os demais elétrons, entretanto, por simplicidade, vamos assumir que a interação mútua entre os elétrons-osciladores é desprezível. Isso quer dizer que os elétrons que continuam na tela não vão ser afetados pela remoção dos elétrons pertencentes ao disco retirado.

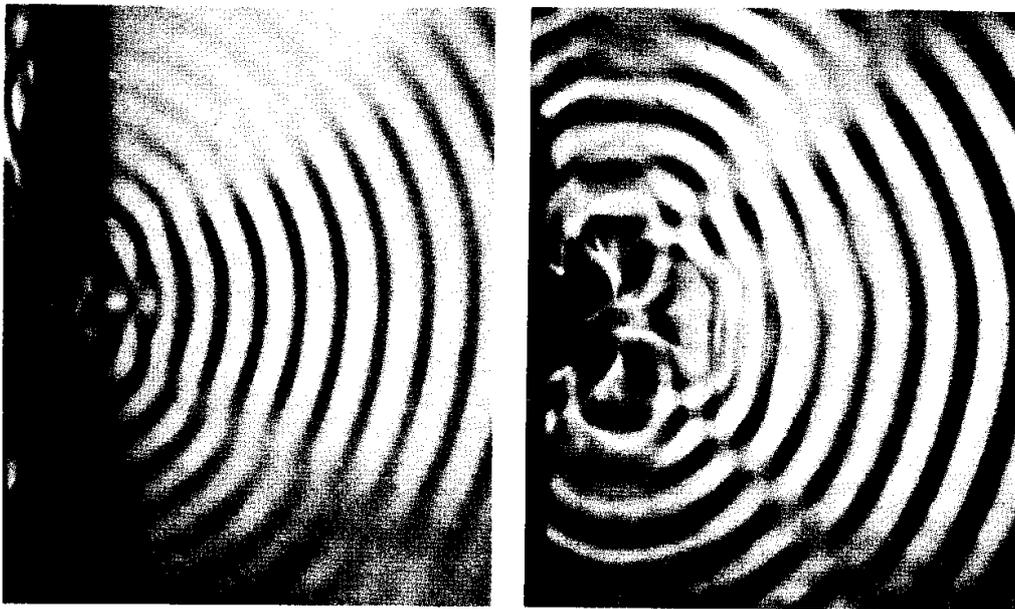
O campo eletromagnético na região não iluminada, ou além da tela, vai ser o campo que existia aí antes da retirada do disco (ou seja, nulo) menos a contribuição dessa parte retirada. Exceto pelo sinal, é como se a fonte e a tela não existissem e o campo eletromagnético fosse aquele emitido pelos elétrons-osciladores pertencentes ao disco retirado. Que é justamente a essência do que diz o princípio de **Huygens-Fresnel**.

Se quisermos ser mais realistas, no mínimo, devemos esperar que essa aproximação, que considera desprezível a interação entre os elétrons-osciladores, não pode valer em qualquer situação. O bom senso diz que deve haver uma interação de curto alcance, já que o campo produzido por esses osciladores decai com a distância. Nesse caso os elétrons na vizinhança da abertura vão ser afetados quando uma parte da tela, ou disco, é retirada.

Para aberturas grandes o número de elétrons-osciladores do disco retirado é muito maior que o número de elétrons-osciladores ao longo da borda da abertura. Nesses casos, se o ponto de observação está a uma distância grande do anteparo, se comparada às dimensões da abertura, a aproximação que despreza a interação entre os elétrons-osciladores entre si, funciona bem na descrição do fenômeno da difração.

Em outras palavras, nesse caso o princípio de **Huygens-Fresnel** funciona bem. Isso pode ser observado na **figura 4.3** a seguir. Essa

figura mostra duas fotos de ondas na água, na foto da esquerda as ondas sofrem difração após passarem por uma abertura num anteparo e na foto da direita as ondas são criadas por fontes pontuais, igualmente espaçadas, distribuídas ao longo de um intervalo da mesma dimensão da abertura da outra foto. Nota-se que as ondas são praticamente idênticas a distâncias grandes (comparadas às dimensões da abertura), mas para regiões próximas da abertura, ou das fontes, as ondas são sensivelmente diferentes.



**Figura 4.3: Fotos de ondas na água. À direita as ondas são difratadas e à esquerda são geradas por fontes pontuais.**

A conclusão é que para o caso de aberturas muito pequenas se comparadas ao comprimento de onda ou para pontos de observação próximos à abertura, os efeitos de borda se tornam importantes e o princípio de **Huygens-Fresnel** não consegue mais explicar o fenômeno.

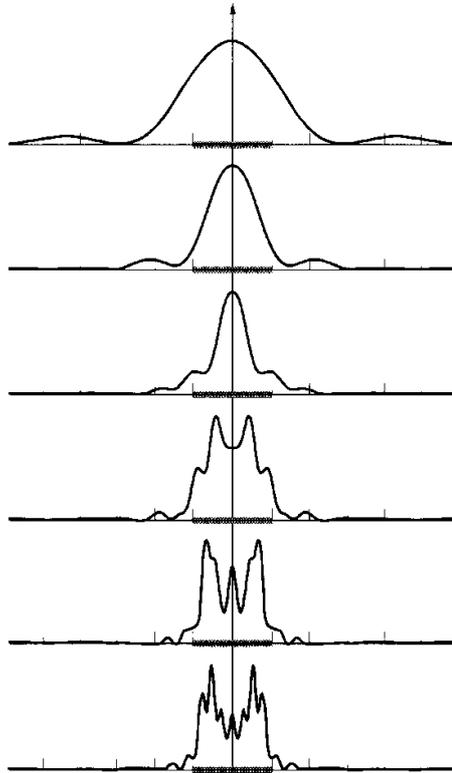
Resumindo tudo que foi dito, se temos uma tela opaca com uma abertura pequena e a iluminamos com uma frente de ondas planas provenientes de uma fonte distante, o que vai ser observado

depende da distância que o plano de observação vai estar da tela que contém a abertura.

Se esse plano ou anteparo está muito próximo e paralelo à tela  $\Sigma$ , a imagem da abertura é projetada nesse anteparo e a forma da abertura será claramente reconhecível (poderá haver algum pequeno efeito de franja luminosa nas bordas da imagem). Se o plano de observação é movido para uma distância um pouco maior da abertura, a imagem projetada da abertura ainda será reconhecível, mas terá estruturas bem visíveis, à medida que as franjas de difração ficam mais proeminentes. Esse fenômeno é conhecido como **difração de Fresnel** ou **difração de campo próximo**. Se o plano de observação é afastado ainda mais da abertura, nota-se uma mudança contínua na imagem da abertura nele projetada, como se pode ver na **figura 4.4** a seguir.

Finalmente, a uma distância, do plano de observação em relação à tela que contém a abertura, muito grande, praticamente não haverá mais semelhança entre a imagem observada nesse plano e a forma da abertura, porque as franjas que começaram a aparecer antes vão se espalhar. A partir daí, se o anteparo de observação for afastado ainda mais, só muda a largura desse padrão de franjas luminosas. Esse é caso da **difração de Fraunhofer** ou **difração de campo distante**.

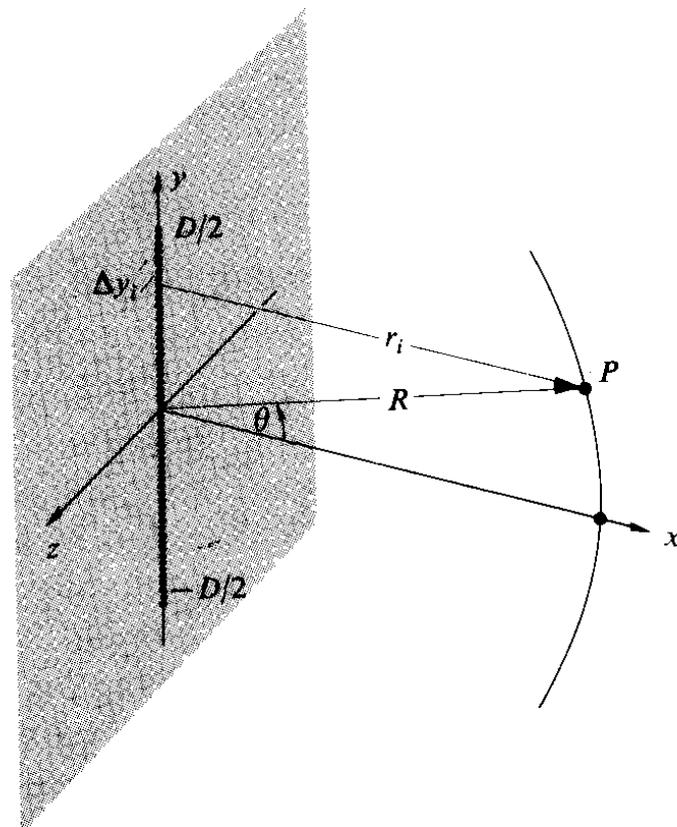
Nesta experiência vamos considerar somente o caso da **difração de Fraunhofer**. Portanto, temos que satisfazer as duas condições acima, ou seja, tanto a fonte quanto o plano de observação devem estar muito distantes da fenda. Ou, colocando de outra maneira, tanto a onda que chega quanto a que deixa a abertura na tela, têm que ser planas. Essas condições garantem a linearidade da relação entre as dimensões da abertura, o comprimento de onda e a distância do plano de observação à fenda, que é o critério matemático da **difração de Fraunhofer**. Há uma discussão mais completa sobre esse assunto no **capítulo 10, seção 10.1.2** do livro **Optica** de E. Hecht.



**Figura 4.4: Sucessão de figuras de difração observadas a distâncias decrescentes da fenda. A figura do topo é uma figura de difração de Fraunhofer e a da base é uma figura de difração de Fresnel da mesma fenda.**

## Difração de Fraunhofer

Para entender como se processa a **difração de Fraunhofer** por uma fenda longa e de largura infinitesimal, substituímos a fenda por uma linha de osciladores coerentes, pontuais, um ao lado do outro. Essa é uma boa aproximação se a onda que chegou a essa fenda era plana. A **figura 4.5** a seguir mostra uma linha desses emissores pontuais:



**Figura 4.5:** Linha de fontes pontuais coerentes que simula uma fenda longa de largura infinitesimal.

Para poder fazer o tratamento de Fraunhofer, o plano ou anteparo de observação deve estar a uma distância muito grande da fenda, em relação ao comprimento dessa linha de fontes pontuais ( $R \gg D$ ). Quando isso ocorre, pode-se deduzir uma equação que descreve a irradiância dessa linha ideal de emissores. A irradiância (**I**) de uma fonte de ondas eletromagnéticas é definida como sendo a energia média emitida por unidade de área, por unidade de tempo (no caso da linha, por unidade de comprimento, já que a largura é infinitesimal). Isso é a média, no tempo, da magnitude do **vetor de Poynting** e é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico emitido. No caso da linha de fontes pontuais da **figura 4.5**, a irradiância é:

$$I(\theta) = I(0) \left( \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \right)^2 \quad (4.2)$$

$$\beta = \frac{\pi D}{\lambda} \text{sen}\theta$$

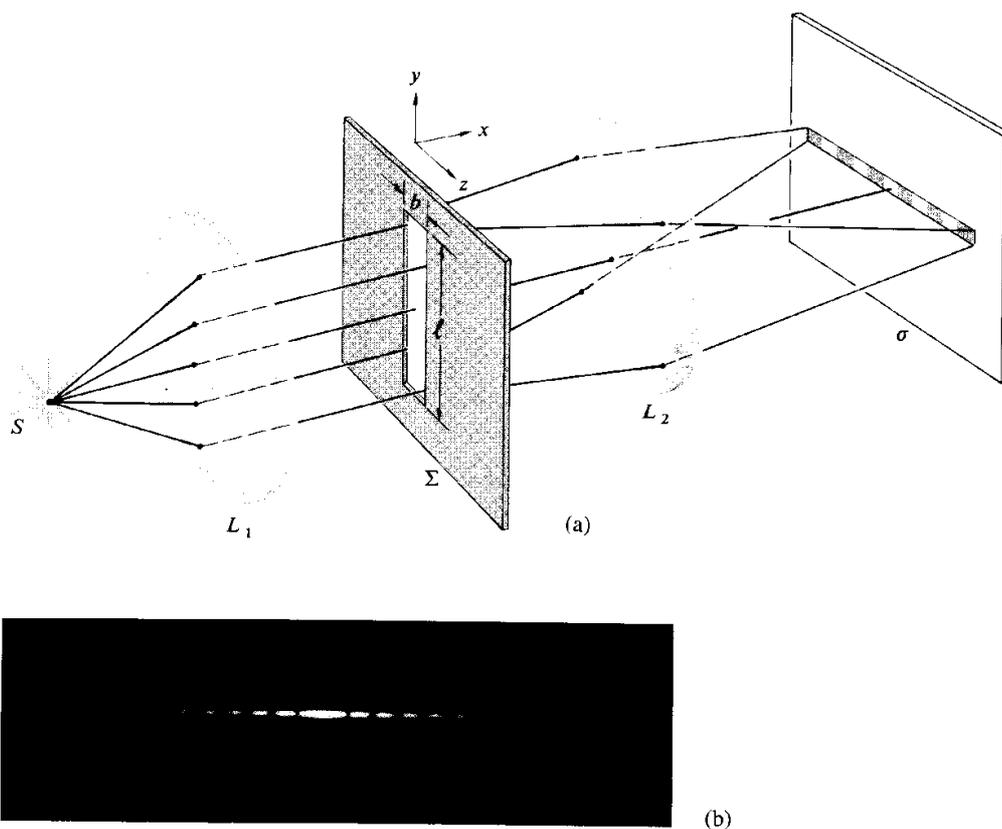
onde  $\theta$  é o ângulo medido a partir do plano **x-z**, **I(0)** é a irradiância para  $\theta = 0$ , que corresponde ao máximo principal,  $\lambda$  é o comprimento de onda emitido e **D** é o comprimento da linha de emissores. Essa equação é válida para qualquer plano que contenha o eixo **y** (planos paralelos ao plano **y-z**) e sua dedução é feita passo a passo, tanto no **capítulo 10, seção 10.2** do livro **Optica** de E. Hecht, como na **aula 17 da Física 4 - Notas de Aula** de M. J. Bechara et al.

Vamos examinar a variável  $\beta$  na **equação 4.2**:

$$\beta = \frac{\pi D}{\lambda} \text{sen}\theta$$

Se o comprimento da linha de fontes for muito maior que o comprimento de onda da radiação emitida,  $D \gg \lambda$ ,  $\beta$  se torna muito

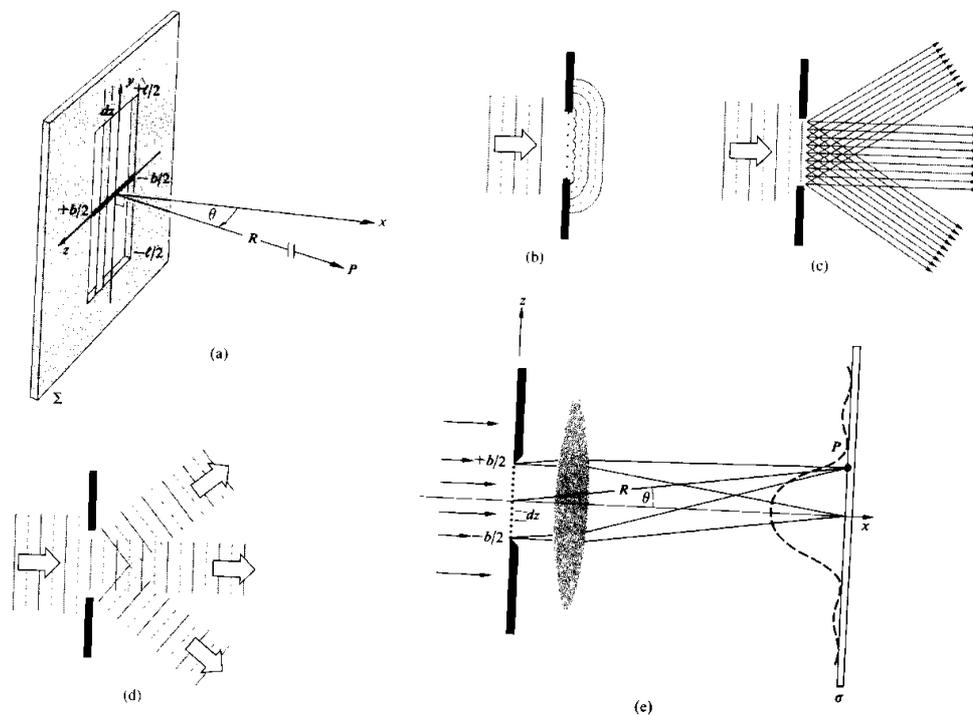
grande e, portanto,  $I(\theta)$  fica muito pequeno. Em outras palavras,  $I(\theta)$  cai muito rapidamente quando  $\theta$  se desvia de zero (lembrando que para  $\beta = 0$  a função  $[\text{sen}\beta / \beta] = 1$ ). A fase das ondas emitidas pela linha de fontes é equivalente à de uma fonte pontual localizada no centro da linha de emissores (isso pode ser observado na demonstração mencionada acima). Então, podemos considerar que a linha de fontes pontuais é equivalente a uma única fonte pontual, localizada no centro dessa linha e emitindo predominantemente ao longo do eixo  $x$  ( $\theta=0$ ). Ou seja, a emissão se assemelha a uma onda circular no plano  $x-z$ .



**Figura 4.6: Difração de Fraunhofer para uma fenda retangular e foto da figura produzida por essa fenda.**

Podemos agora considerar o caso da difração de Fraunhofer para uma fenda retangular de comprimento  $D$  e largura  $d$ .

Quando não é possível afastar a fonte e o anteparo de observação suficientemente da fenda, as condições de Fraunhofer podem ser satisfeitas com o auxílio de duas lentes convergentes, que simulam essas condições de fonte e plano de observação muito distantes da fenda. A **figura 4.6** abaixo mostra a formação da figura de difração nesse caso:



**Figura 4.7:** (a) a fenda retangular é simulada por uma série de linhas emissoras de comprimento  $D$  e largura  $dz$ ; (b) ondas emitidas pelas fontes pontuais de Huygens que preenchem a fenda; (c) a representação equivalente em termos de raios; (d) os raios correspondem a ondas planas; (e) a fenda iluminada por luz monocromática e a figura de difração de Fraunhofer.

A primeira lente torna planas as ondas esféricas provenientes da fonte próxima e, a segunda, traz a figura de difração de Fraunhofer, que se formaria longe da fenda, para uma posição mais próxima.

O procedimento usual para encontrar o padrão de intensidades da figura de difração desse tipo de abertura é dividir a fenda numa série de tiras longas (de comprimento  $D$  e largura  $dz$ ) paralelas ao eixo  $y$ , como mostrado na **figura 4.7**:

Ao representarmos uma fenda de largura finita por uma série de fendas de largura infinitesimal, podemos substituir cada uma delas por uma linha de fontes pontuais, que por sua vez são equivalentes a emissores pontuais localizados em seu centro, ou ao longo da largura da fenda, sobre o eixo  $z$ .

Como vimos, cada um desses emissores vai irradiar uma onda esférica, no plano  $x-z$ , centrada em  $y=0$ . Desta maneira o problema fica reduzido a encontrar o campo resultante emitido no plano  $x-z$ , devido a uma **linha de fontes pontuais que se estende ao longo da largura (e não do comprimento)** da fenda. Isso é fácil de resolver, é só integrar a contribuição ao campo,  $dE$ , (já obtida para uma linha de fontes pontuais, **equação 4.2**) de cada linha de fontes pontuais de largura  $dz$ , vamos obter:

$$I(\theta) = I(0) \left( \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \right)^2 \quad (4.3)$$

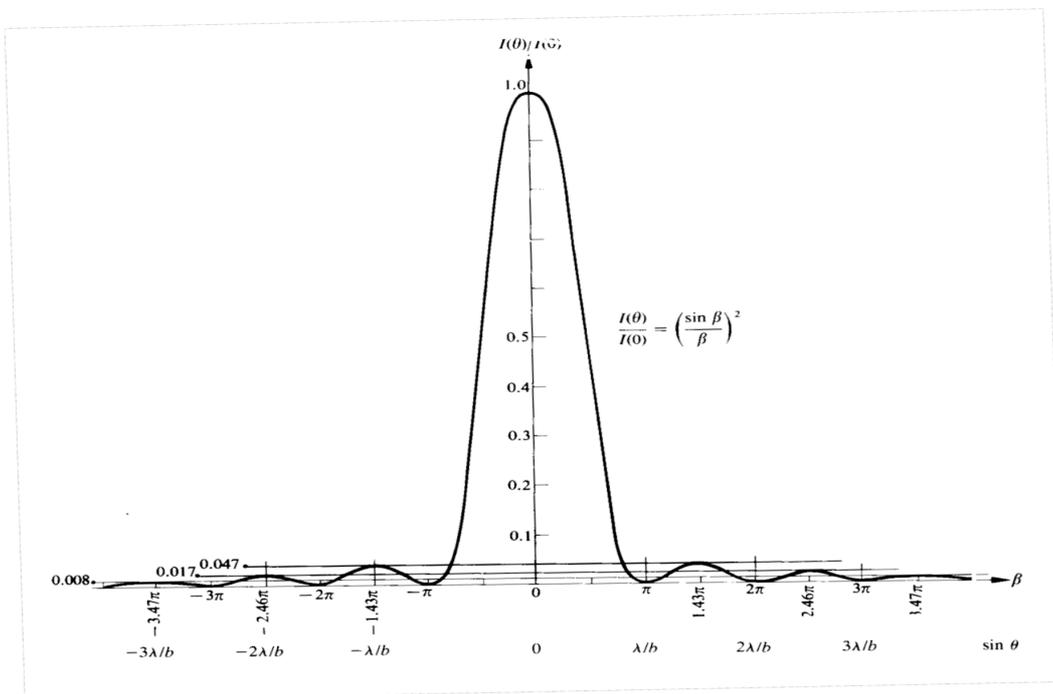
que tem a mesma forma da **equação 4.2** porque a simetria é a mesma, só que  $\beta$  é dado por:

$$\beta = \frac{kd}{2} \text{sen}\theta \quad (4.4)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

onde  $k$  é o número de onda e  $d$  é a largura da fenda.

Neste caso, ao contrário do que foi analisado antes (linha longa de fontes pontuais,  $D \gg \lambda$ ), o comprimento da linha de fontes pontuais é pequeno, portanto,  $\beta$  não vai ser grande, e, embora a intensidade caia rapidamente, máximos secundários de interferência serão observáveis.



**Figura 4.8: Intensidades relativas dos máximos para difração de Fraunhofer.**

Falta obter as posições dos máximos e mínimos de difração para essa fenda. Para obter os mínimos derivamos a **equação 4.3** em relação a  $\beta$  e igualamos a zero. É fácil verificar que os mínimos ocorrem para **sen $\beta$ =0**, que corresponde a:

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots = \frac{\pi d}{\lambda} \text{sen}\theta \quad (4.5)$$

ou a intensidade  $I(\theta)$  se anula quando:

$$d \operatorname{sen} \theta = m \lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.6)$$

A **figura 4.8** mostra as intensidades relativas dos máximos para a difração de Fraunhofer de uma fenda retangular simples:

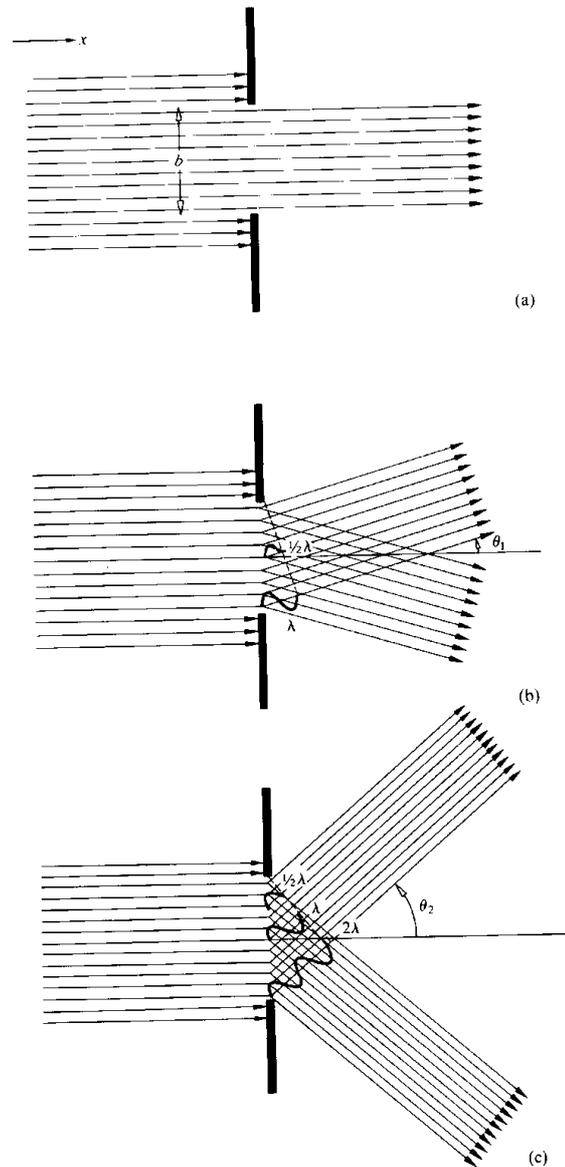
Uma outra maneira de entender mais facilmente o que está se passando, quando esse fenômeno ocorre, é observar a **figura 4.9** a seguir. Temos uma fenda simples, de largura  $d$ , numa tela opaca e ondas planas que chegam e saem dela, representadas por feixes de raios paralelos.

Como já foi discutido, podemos imaginar que cada ponto da fenda está emitindo em todas as direções no plano  $x-z$ . A luz que continua a se propagar para frente, em direção ao anteparo de observação, ilustrada na **figura 4.9a**, representa o feixe não difratado, em que todos os raios chegam em fase no anteparo. Essa região do anteparo estará iluminada e aparecerá como uma mancha clara. A **figura 4.9b** mostra um conjunto específico de raios que saem da fenda formando um ângulo  $\theta_1$  com o eixo  $x$ . A diferença de caminho máxima entre esses raios (que é a diferença de caminho entre os raios que partem dos extremos da fenda) será  $d \operatorname{sen} \theta_1$ . Vamos fazer com que essa diferença de caminho seja igual a um comprimento de onda  $\lambda$ :

$$d \operatorname{sen} \theta = \lambda \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} \theta_1 = \pm \frac{\lambda}{d} \quad (4.7)$$

Então, a diferença de caminho óptico (diferença de fase) entre o raio que sai do ponto central da fenda e o raio que saiu o topo da fenda será  $\lambda/2$ , ou seja, eles estarão  $\lambda/2$  fora de fase, portanto se cancelam exatamente. Analogamente, um raio que sai do ponto imediatamente abaixo do topo da fenda vai ser cancelado pelo raio que saiu do ponto imediatamente abaixo do ponto central da fenda. E assim sucessivamente, para os pares de raios que saem dos pontos sucessivamente abaixo dos acima mencionados. E, pela mesma razão,

a soma desses raios vai ter intensidade zero gerando um mínimo de difração.



**Figura 4.9: Difração da luz em fenda simples, em várias direções.**

À medida que o ângulo  $\theta$  aumenta, uma fração pequena dos raios que saem da fenda vai de novo interferir construtivamente e vamos observar um segundo máximo bem menos intenso que o máximo principal.

Se o ângulo  $\theta$  continuar aumentando, ele vai chegar a um valor tal que  $d \sin \theta_2 = 2\lambda$ . Nesse caso, vamos imaginar a fenda dividida em quatro partes, e, exatamente como foi descrito acima, vai acontecer que o raio proveniente do topo da fenda vai ser cancelado pelo raio do topo da segunda parte, porque eles estarão exatamente  $\lambda/2$  fora de fase.

Pela mesma razão, o raio do topo da terceira parte da fenda vai ser cancelado pelo raio do topo da quarta parte e assim sucessivamente, para os pares de raios da primeira e da segunda e os da terceira e da quarta parte respectivamente. Em outras palavras, pares de raios provenientes dos mesmos pontos de segmentos adjacentes da fenda estarão  $\lambda/2$  fora de fase e se cancelarão produzindo um novo mínimo.

Generalizando, mínimos de difração vão aparecer quando:

$$d \sin \theta = m\lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

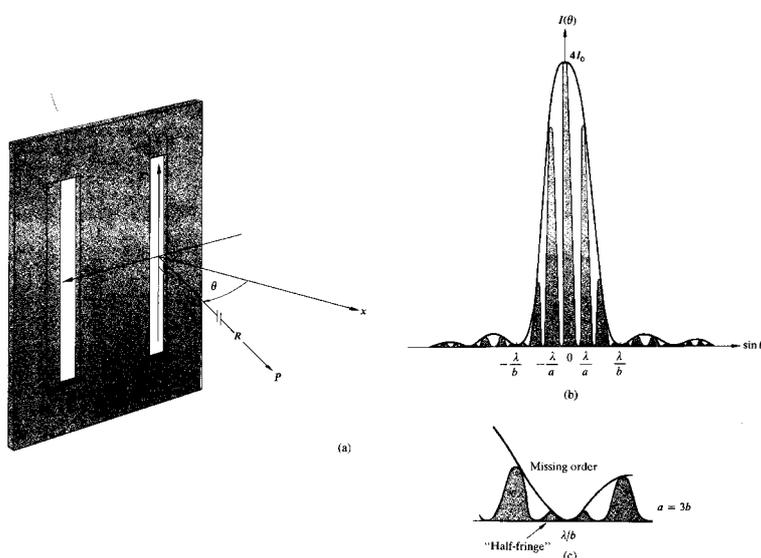
que é a **equação 4.6**.

## Difração em fenda dupla

Vamos supor que temos duas fendas retangulares, longas de largura  $b$  e separação centro a centro igual a  $a$ , como se pode observar na **figura 4.10**.

Cada uma das duas fendas se estivesse sozinha, geraria a mesma figura de difração de Fraunhofer, num anteparo longe da fenda. Com as duas fendas, lado a lado, em qualquer ponto do anteparo as duas figuras de difração devem se superpor. Embora elas sejam essencialmente iguais em amplitude, podem ter diferenças de fase apreciáveis.

Como é a mesma onda plana incidente que dá origem às fontes de ondas secundárias em cada fenda, as ondas secundárias serão coerentes e deve ocorrer interferência entre elas. Se a incidência da onda plana, na tela opaca  $\Sigma$  que contém as fendas é normal à tela, as ondas secundárias emitidas pelas fendas estarão em fase. A franja de interferência num ponto qualquer do anteparo de observação vai depender da diferença de caminho óptico entre as ondas secundárias provenientes de cada fenda.



**Figura 4.10: Difração em fenda dupla: geometria da fenda (a), e padrão de difração observado para  $a=3b$ .**

O fato é que o resultado final para a distribuição de densidade de fluxo do campo elétrico  $\mathbf{I}$  (irradiância), neste caso, vai ser uma função que varia rapidamente devido à interferência modulada pelo padrão de difração de fenda simples. A dedução dessa função é feita na **aula 17** da apostila **Física 4 - Notas de aula** de M. J. Bechara et al e no **capítulo 10, seção 10.2.2** do livro **Optica** de E. Hecht. A função obtida é:

$$I(\theta) = 4I_0 \left( \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (4.8)$$

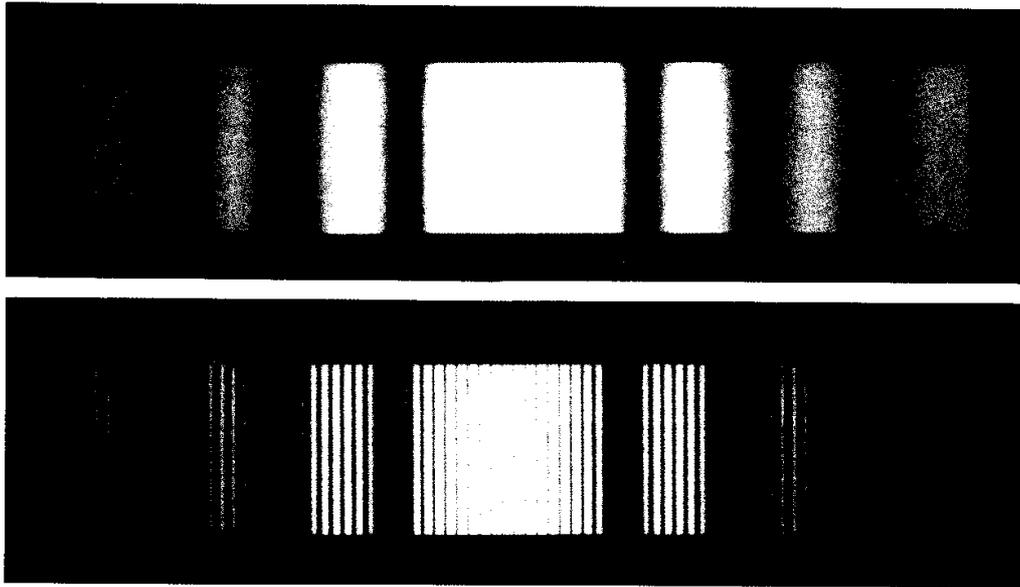
sendo que  $\mathbf{I}_0$  é a contribuição de cada fenda na direção  $\theta=0$ , e:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{kb}{2} \text{sen}\theta \\ \alpha &= \frac{ka}{2} \text{sen}\theta \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda$  é o número de onda.

Na direção  $\theta=0$  (isto é, quando  $\beta = \alpha = 0$ ), como  $\mathbf{I}_0$  é a contribuição de cada fenda,  $\mathbf{I}(0) = 4\mathbf{I}_0$  é a irradiância total e o fator **4** vem do fato de que a amplitude do campo elétrico é duas vezes o que seria caso uma das fendas estivesse coberta.

A **figura 4.11(a)** a seguir é uma foto da figura de difração para uma fenda simples e a **figura 4.11(b)** é a foto do padrão observado quando temos duas fendas idênticas à fenda da **figura 4.11(a)**.



**Figura 4.11: Fotos de figuras de difração de Fraunhofer para fenda única (a) e fenda dupla (b).**

A função  $\mathbf{I}(\theta)$  será zero para valores de  $\theta$  onde:

$$\begin{aligned} \beta &= \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots = m\pi & (4.10) \\ m &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

quando os efeitos da difração são tais que as contribuições das ondas secundárias provenientes de cada fenda se cancelam. Por outro lado,  $\mathbf{I}(\theta)$  também se anula para pontos do anteparo que correspondem a:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi & (4.11) \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

caso em que as contribuições ao campo elétrico de cada uma das fendas estarão completamente fora de fase e somam zero.

Combinando as **equações 4.10 e 4.11** com a **equação 4.9**, vamos obter as relações entre as posições dos mínimos ou máximos de difração e de interferência e as dimensões das fendas. Para os mínimos de difração se obtém, como anteriormente:

$$b \sin \theta = m \lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.12)$$

lembrando que **b** é a largura da fenda. E para os mínimos de interferência:

$$a \sin \theta = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.13)$$

ou, para os máximos de interferência:

$$a \sin \theta = n \lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.14)$$

onde **a** é a distância entre as fendas. Então, da medida da separação entre os mínimos da figura de difração pode-se calcular a largura da fenda. E da separação entre os máximos (ou mínimos) do padrão de interferência pode-se calcular a separação entre elas. Nos dois casos, desde que se conheça a distância entre as fendas e o anteparo e que as condições para a ocorrência da difração de Fraunhofer estejam satisfeitas.

Para um estudo mais detalhado do fenômeno de interferência consultar a **aula 16** da apostila **Física 4 - Notas de Aula** de M. J. Bechara et al e o **capítulo 9** do livro **Optica** de E. Hecht.