



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais**

**COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS  
MATERIAIS - PARTE II**

**PMT 3110 - Introdução à Ciência dos Materiais para Engenharia**

# Roteiro da Aula

- Efeito do tempo (taxa de deformação, esforços cíclicos) e da temperatura no comportamento mecânico dos materiais
  - ✓ Comportamento elástico, viscoso e viscoelástico
- Modelando viscoelasticidade
  - ✓ Relaxação de tensão
  - ✓ Fluência
- Efeito da temperatura no comportamento mecânico dos materiais (fluência)
- Efeito da taxa de deformação sobre o comportamento plástico
  - ✓ Impacto
  - ✓ Comportamento dúctil-frágil
- Esforços cíclicos
  - ✓ Fadiga

## **PARA APRENDER MAIS:**

- Modelos de comportamento viscoelástico

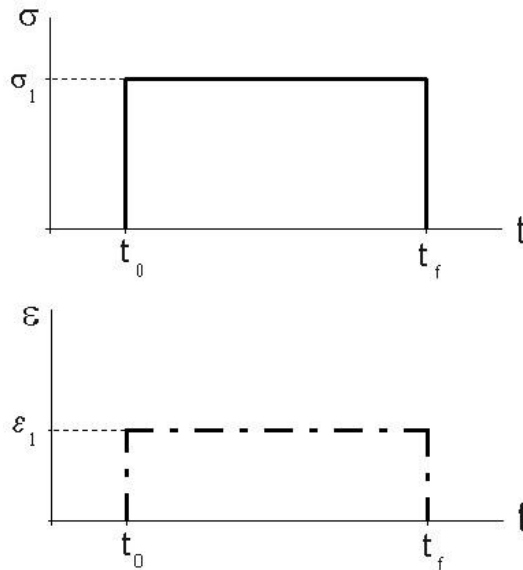
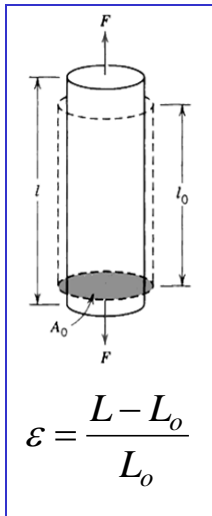
# EFEITO DO TEMPO (*TAXA DE DEFORMAÇÃO, ESFORÇOS CÍCLICOS*) E DA TEMPERATURA NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS MATERIAIS

- As curvas de TENSÃO-DEFORMAÇÃO obtidas numa máquina universal de ensaios mecânicos são muito úteis, mas simplificadas quando comparadas às solicitações reais de um dado equipamento ou componente.

Estes ensaios não mostram a influência do meio, do tempo (taxa de deformação, esforços cíclicos) e da temperatura no comportamento do material na região elástica, importante para entender o desempenho do material em serviço.

- **VISCOELASTICIDADE** – modelar o comportamento mecânico dos materiais em função do TEMPO e TEMPERATURA.
- **FLUÊNCIA** – comportamento do material submetido a tensão inferior ao limite de escoamento por tempos longos e temperaturas elevadas.
- **RESISTÊNCIA AO IMPACTO** – comportamento do material submetido a tensão em tempos muito curtos.
- **RESISTÊNCIA A FADIGA** - comportamento do material submetido a tensões cíclicas inferiores ao limite de escoamento.
- **INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA** na fluência e na resistência a impacto.

## Comportamento Elástico (sólido hookiano)

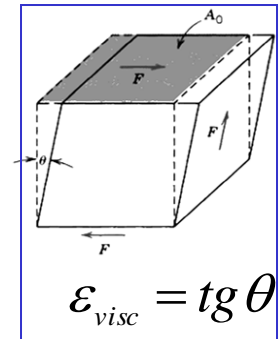
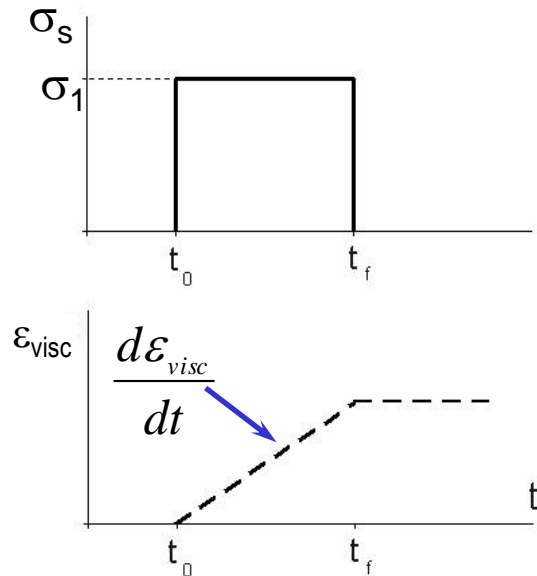


$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$

$E$  = módulo de elasticidade [Pa]

Processo reversível  $\Rightarrow$  não  
dissipa energia!

## Comportamento Viscoso (líquido newtoniano)



$$\sigma_s = \eta \cdot \frac{d\varepsilon_{visc}}{dt}$$

$\eta$  = viscosidade [Pa.s]

Processo irreversível  $\Rightarrow$   
dissipa energia!

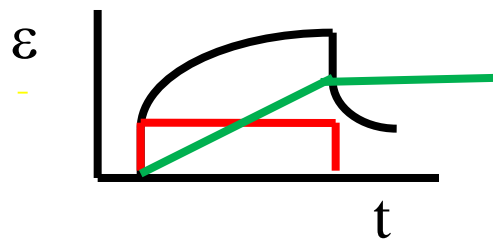
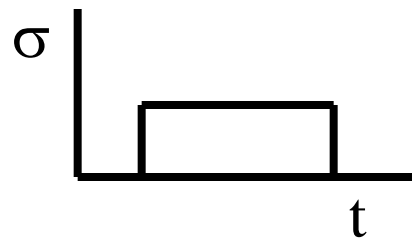
# Comportamento Viscoelástico

- O comportamento viscoelástico é um comportamento intermediário entre dois comportamentos: o comportamento Hookeano e o comportamento Newtoniano

Comportamento Puramente elástico

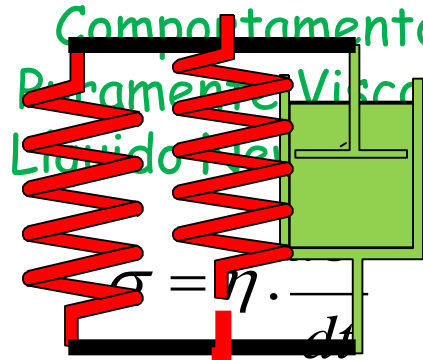
Sólido Hookeano

$\sigma = E \cdot \varepsilon$   
 $E =$  módulo de elasticidade  
 $\varepsilon =$  deformação



Material submetido a tensão constante

Comportamento Puramente Viscoso  
 Líquido Newtoniano



$\eta =$  viscosidade  
 $\frac{d\varepsilon}{dt} =$  taxa de deformação

Comportamento viscoelástico

# Métodos para avaliar a viscoelasticidade

- Relaxação de tensão:
  - O material é deformado. A deformação é mantida constante e avalia-se a tensão resultante em função do tempo
- Fluência
  - O material é submetido a uma tensão. A tensão é mantida constante e avalia-se a deformação resultante em função do tempo

# MODELANDO VISCOELASTICIDADE

- Sólido Hookiano

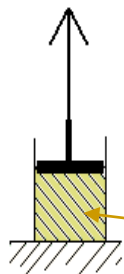
$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$



MOLA

- Líquido Newtoniano

$$\sigma_s = \eta \cdot \frac{d\varepsilon_{visc}}{dt}$$

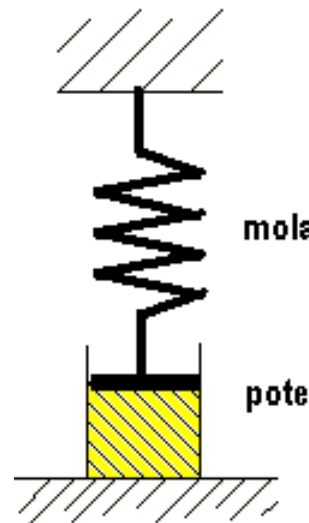


AMORTECEDOR OU  
POTE COM FLUIDO

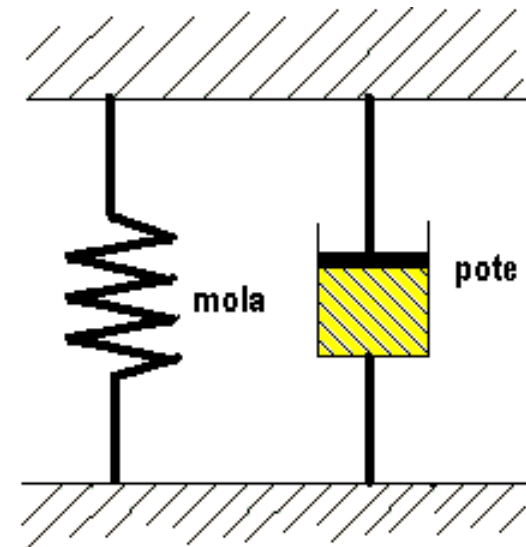
Viscosidade  
 $\eta$

## MODELOS MAIS SIMPLES:

- duas unidades em série: relaxação da tensão aplicada.
- duas unidades em paralelo: deformação em função do tempo (fluência).



MAXWELL



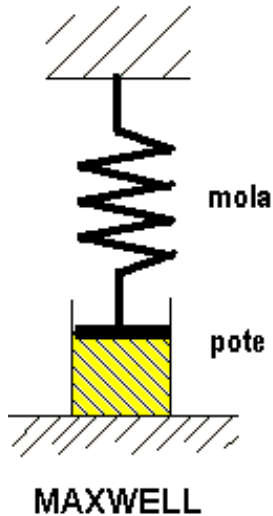
VOIGT / KELVIN

# Modelo de Maxwell

## Modelo para descrever **RELAXAÇÃO DE TENSÃO**

Aplica-se uma deformação  $\epsilon_0$  a uma dada temperatura e observa-se  $\sigma(t)$

Módulo de relaxação em função do tempo e da temperatura:



**E** e  $\eta$  são sensíveis à variação da temperatura.

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t E / \eta)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t / \tau)$$

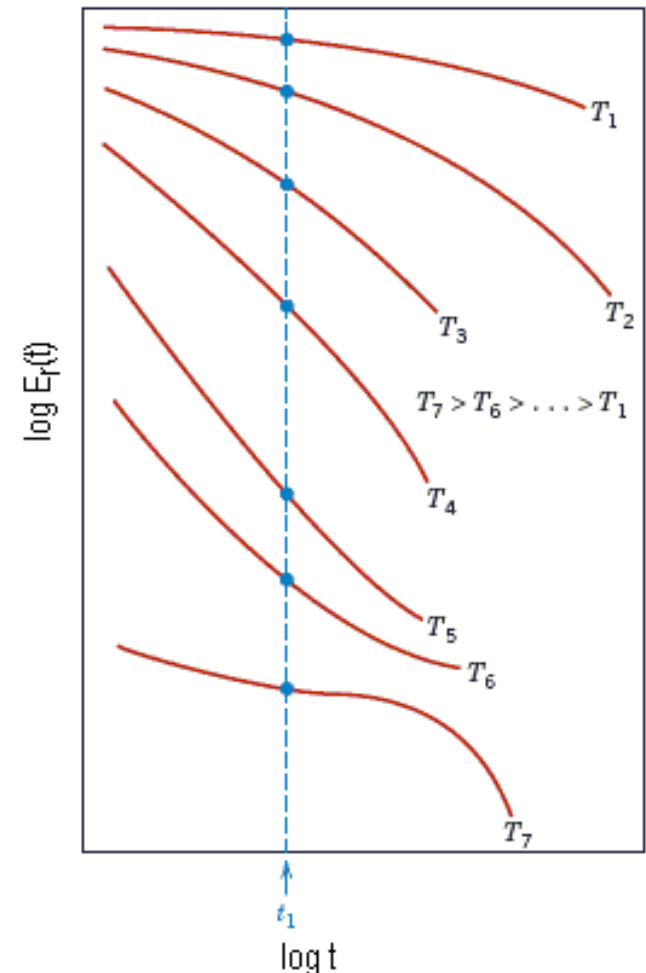
$$\tau = \text{tempo de relaxação} = \eta / E$$

Módulo de relaxação ( $\epsilon_0 = \text{cte.}$ )

$$E_r(t) = \sigma(t) / \epsilon_0$$

**$E_r(t)$  e  $\sigma(t)$  se reduzem com o tempo em cada temperatura.**

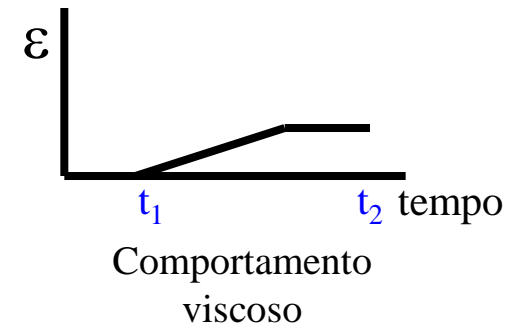
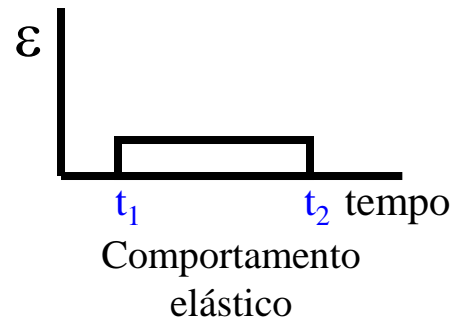
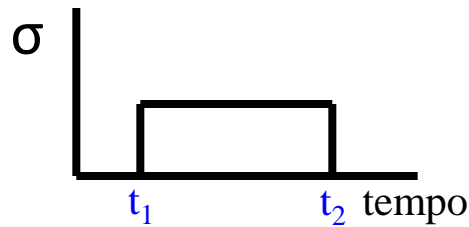
**Em temperatura maior, o tempo de relaxação é menor, e são menores  $E_r(t)$  e  $\sigma(t)$ .**



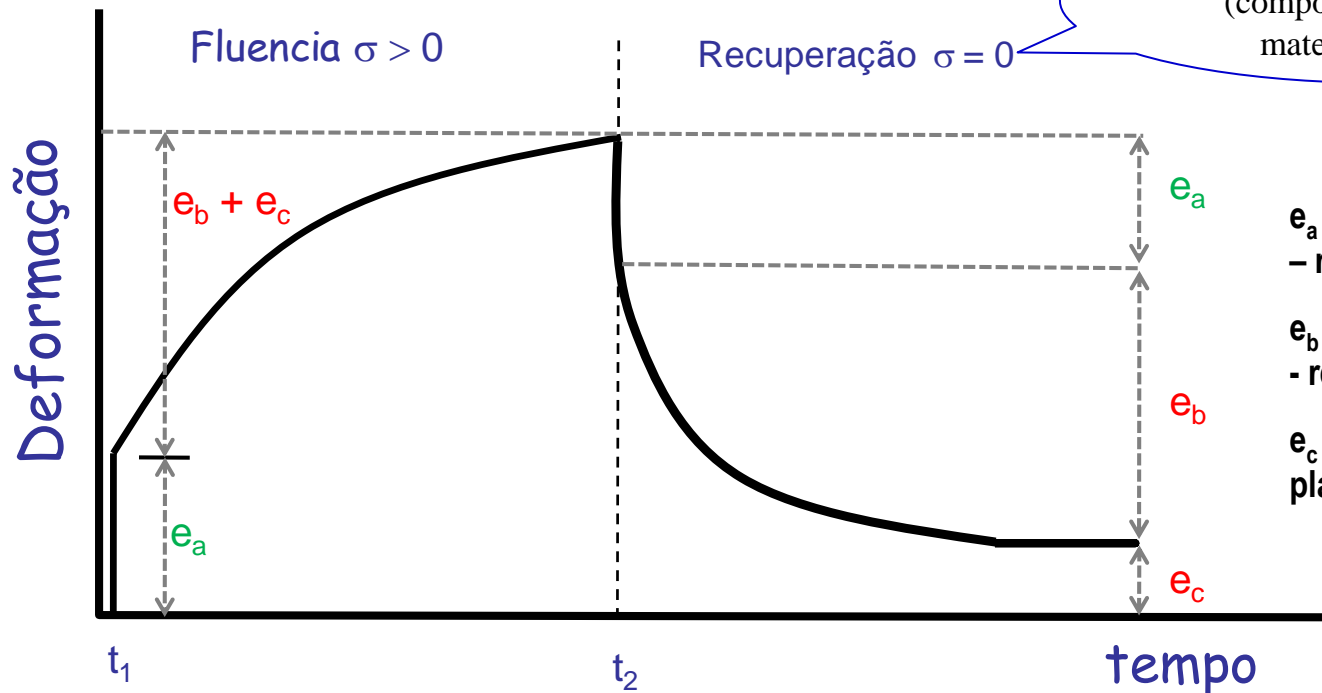


# FLUÊNCIA

Aplica-se uma tensão  $\sigma_0$  a uma dada temperatura e observa-se  $\varepsilon(t)$



## Comportamento Viscoelástico



Recuperação: ensaio (comportamento) típico de materiais poliméricos

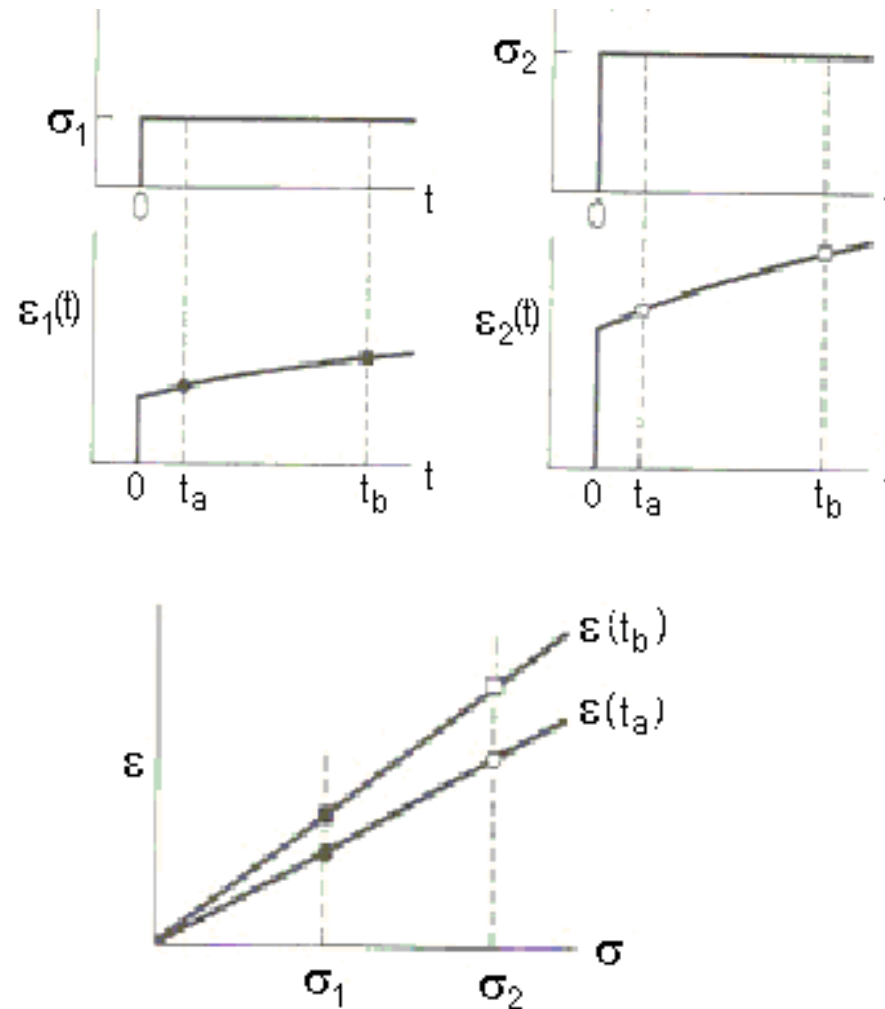
$e_a$  – deformação elástica imediata – recuperável

$e_b$  – deformação elástica retardada – recuperável

$e_c$  – deformação por escoamento plástico – deformação permanente

# FLUÊNCIA

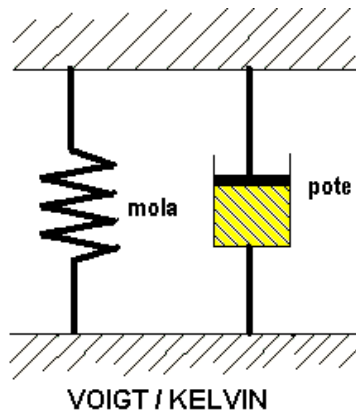
Aplica-se uma tensão  $\sigma_0$  a uma dada temperatura e observa-se  $\varepsilon(t)$



# Modelo de Voigt-Kelvin

## modelo para descrever FLUÊNCIA

aplica-se uma tensão  $\sigma_0$  em uma dada temperatura e observa-se  $\varepsilon(t)$



**G** e  $\eta$  são sensíveis a variação da temperatura.

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{G} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_R}} \right]$$

$\sigma_0$  = tensão aplicada em  $t = 0$  s

$G$  = módulo de cisalhamento =  
tensão cisalhamento =  $G \cdot \gamma (= \text{tg} \theta)$

$\tau_R$  = tempo de retardação =  $\eta/G$

Módulo de fluência ( $\sigma_0 = \text{cte.}$ )

$$G_f(t) = \sigma_0 / \varepsilon(t)$$

# Efeito da Temperatura na FLUÊNCIA

## Temperatura Homóloga ( $\tau_H$ )

$$\tau_H = \frac{T}{T_F}$$

T = temperatura do material  
 $T_F$  = temperatura de fusão  
 (dadas em K)

- Em **baixas temperaturas** (e em baixas taxas de deformação), uma deformação  $\varepsilon$  praticamente só depende da tensão  $\sigma$ .

Em **temperaturas altas** (e em baixas taxas de deformação), uma deformação  $\varepsilon$  depende não somente da tensão  $\sigma$ , mas também do tempo e da temperatura.

- O limite entre “baixa temperatura” e “alta temperatura” varia de material para material.

para metais:  $\tau_H > 0,4 \rightarrow$  Alta Temperatura

Limite entre basse et haute température pour différents matériaux.

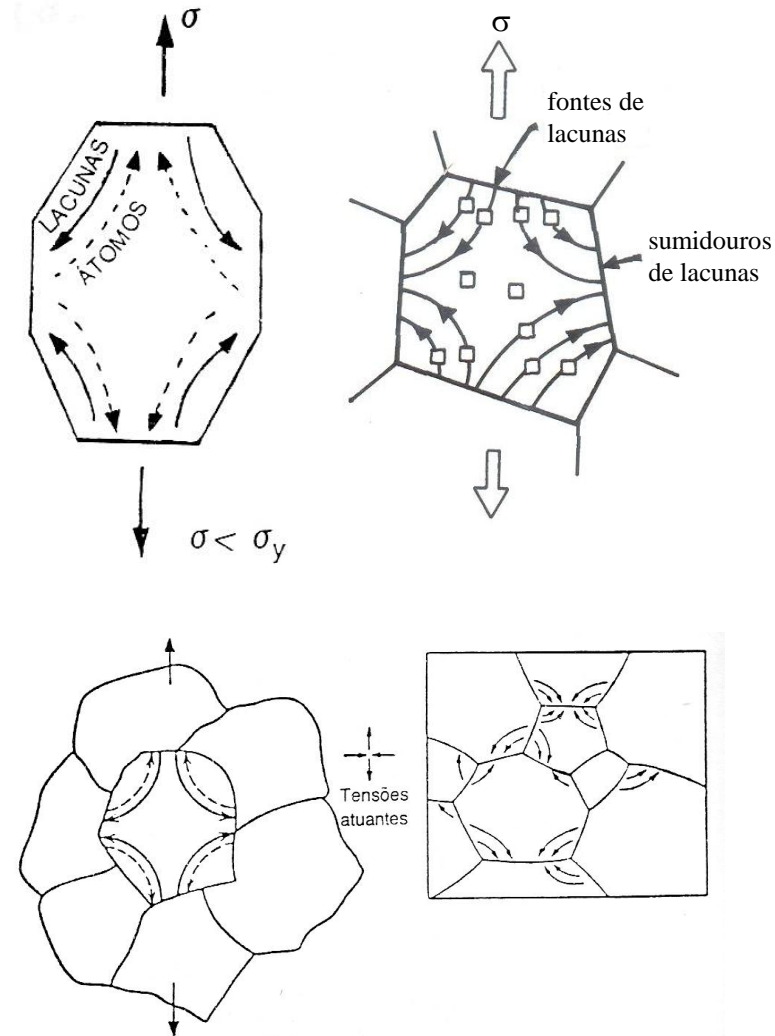
Matériaux	Métaux					Céramiques	Polymères
	$T_m$ K	$T_g$ K	0,4 $T_m$ K (°C)	0,5 $T_m$ K (°C)	0,6 $T_m$ K (°C)		
W	3680		1472 (1199)				
SiC	3110			1555 (1282)			
MgO	3073			1537 (1264)			
Mo	2880		1152 (879)				
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2323			1162 (889)			
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	2173			1087 (814)			
Ti	1943		777 (504)				
Fe	1809		724 (451)				
Ni	1726		690 (417)				
Cu	1356		542 (269)				
Al	933		373 (100)				
PA aromatique (Kevlar)*	913	648					548 (275)
PEEK*	613	423					368 (95)
Pb	600		240 (-33)				
PC*	573	423					344 (71)
PETP*	543	343					326 (53)
PS*	513	373					308 (35)
PP*	443	258					266 (-7)
PE (HD)*	413	153					248 (-25)
Hg	235		94 (-179)				

## Mecanismos de fluência:

Dois mecanismos são responsáveis pela fluência na região de fluência por difusão:

1) **Difusão no interior do grão (Nabarro-Herring):** as lacunas se movimentam de forma a produzir um aumento do comprimento dos grãos ao longo da direção de aplicação de tensões de tração. Assim, as lacunas se movem do topo e da base para as regiões laterais do grão. Os contornos perpendiculares à direção de aplicação da tensão de tração são distendidos e funcionam como fontes de lacunas. Os contornos paralelos à direção de aplicação de tensão de tração funcionam como sumidouros de lacunas. A variação do comprimento do grão é proporcional ao fluxo de lacunas.

2) Coble propôs um segundo mecanismo que supõe que a difusão ocorre nos **contornos de grão** ao invés de no volume do grão. Essa difusão resulta em escorregamento de contornos o que possibilita, também, alongamento de grãos na direção da aplicação da tensão de tração.

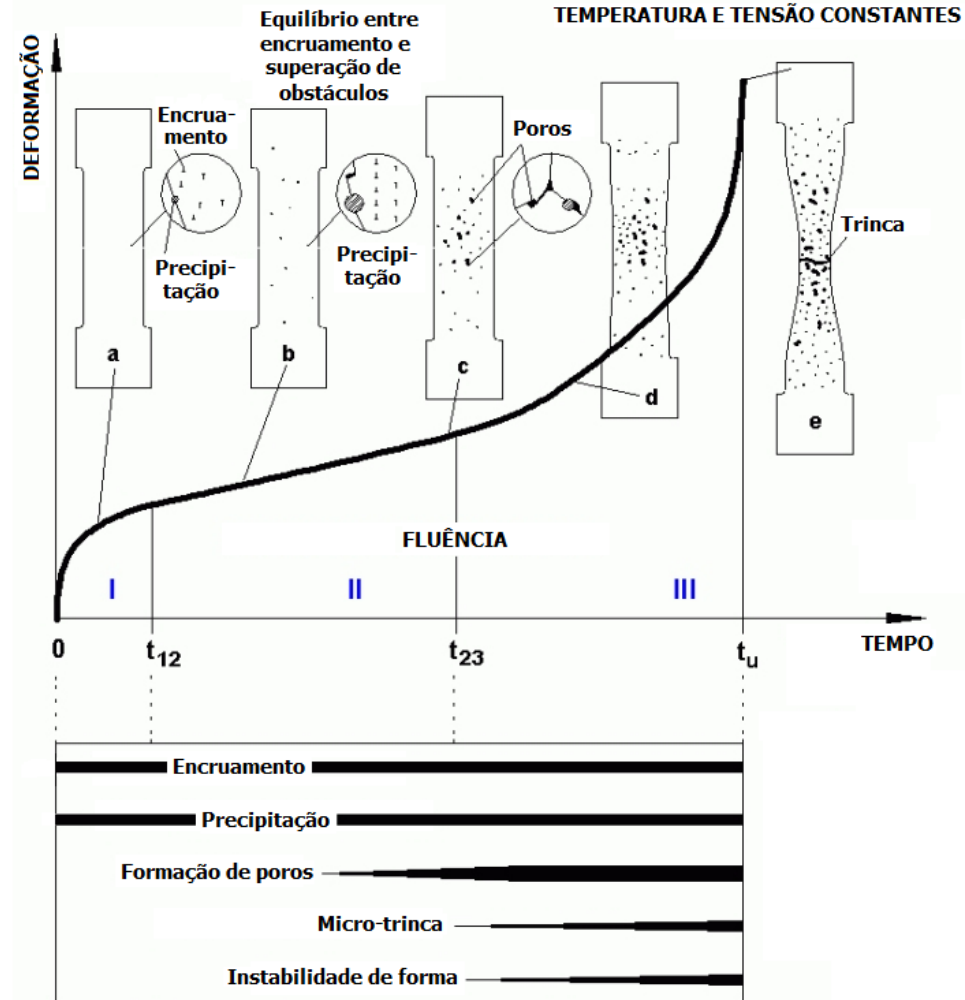


# Efeito da Temperatura sobre a Fluência

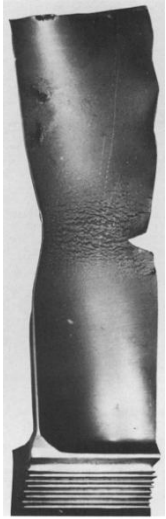
- Quando a temperatura é superior a  $0,4 T_F$ , os fenômenos difusivos tornam-se bastante significativos nos metais, e observam-se deformações plásticas em função do tempo, mesmo em tensões relativamente baixas. Esse é o fenômeno da **FLUÊNCIA**.

## CURVA DE FLUÊNCIA

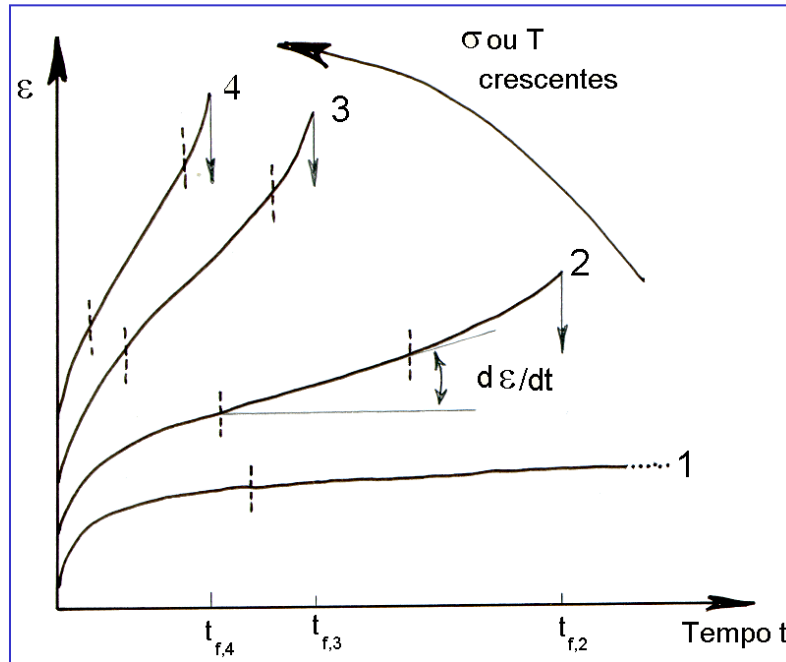
- Estágio I** ou **TRANSIENTE**: taxa de deformação  $d\varepsilon/dt$  **decrecente**; efeito do encruamento
- Estágio II** ou **ESTACIONÁRIO**: taxa de deformação  $d\varepsilon/dt$  (**constante**) é mínima; equilíbrio entre o encruamento e a superação de obstáculos por processos difusivos (por exemplo, ascensão de discordâncias)
- Estágio III** ou **TERCIÁRIO**: taxa de deformação  $d\varepsilon/dt$  **crescente**; desenvolvimento de **cavidades (poros)** que **levam à ruptura do material**



# Efeito da Temperatura e da Tensão sobre a Fluência



Falha por fluência de uma paleta de turbina de avião



$$T_4 > T_3 > T_2 > T_1$$



$$t_{f,4} < t_{f,3} < t_{f,2}$$

e

$$(\dot{\epsilon}_{\min})_1 < (\dot{\epsilon}_{\min})_2 < (\dot{\epsilon}_{\min})_3 < (\dot{\epsilon}_{\min})_4$$

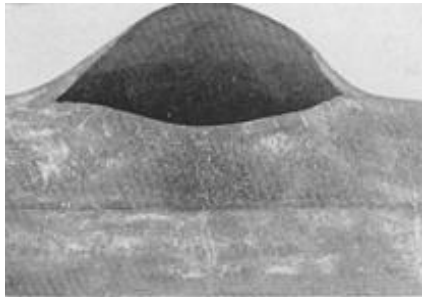
$$\sigma_4 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$$



$$t_{f,4} < t_{f,3} < t_{f,2}$$

e

$$(\dot{\epsilon}_{\min})_1 < (\dot{\epsilon}_{\min})_2 < (\dot{\epsilon}_{\min})_3 < (\dot{\epsilon}_{\min})_4$$



(a)

Falha por fluência de uma tubulação

- Obs.: no caso 1 o material **não rompe** no intervalo coberto pelo gráfico, e poderia permanecer por todo o tempo de operação sem quebrar.

# Efeito da Tensão e da Temperatura sobre a Fluência - Estágio II (estado estacionário)

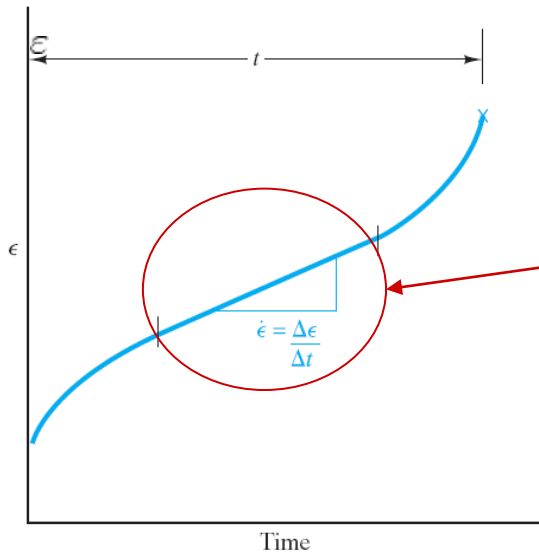


Figure 6-35 Simple characterization of creep behavior is obtained from the secondary-stage strain rate ( $\dot{\epsilon}$ ) and the time to creep rupture ( $t$ ).

Equação empírica geral:

**C**, **m** e **b** são constantes do material e **d** é o tamanho de grão (quando aplicável)

**Q** é a energia de ativação para fluência e **R** e **T** são constante dos gases e temperatura absoluta.

$$\dot{\epsilon} = \frac{C\sigma^m}{d^b} e^{\frac{-Q}{RT}}$$

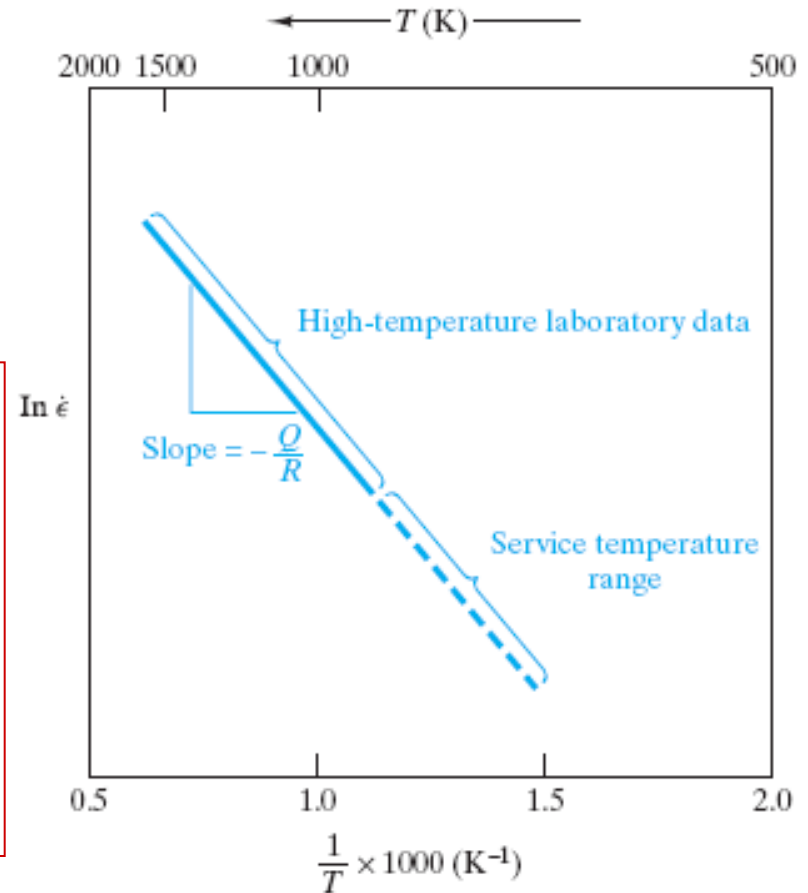


Figure 6-34 Arrhenius plot of  $\ln \dot{\epsilon}$  versus  $1/T$ , where  $\dot{\epsilon}$  is the secondary-stage creep rate and  $T$  is the absolute temperature. The slope gives the activation energy for the creep mechanism. Extension of high-temperature, short-term data permits prediction of long-term creep behavior at lower service temperatures.

A equação pode ser linearizada com a aplicação do logaritmo, que é uma equação de Arrhenius.



# Outros Fatores que afetam a fluência em metais

- ✓ Estrutura cristalina:  $\uparrow$  complexa  $\Rightarrow \uparrow$  resistência à fluência
- ✓ Precipitados:  $\uparrow$  fração  $\Rightarrow \uparrow$  resistência à fluência
- ✓ Contornos de grão:  $\uparrow$  tamanho de grão  $\Rightarrow \uparrow$  resistência à fluência



← Pá de turbina para aviões a jato com grãos orientados feita por solidificação direcional



Pá de turbina monocristalina: o canal em forma de espiral permite que apenas um grão cresça na peça →



# IMPACTO

Ensaio de tração convencional:  $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-5} \sim 10^{-1} [s^{-1}]$

Solicitações de impacto:  $\dot{\varepsilon} \approx 10^2 \sim 10^4 [s^{-1}]$



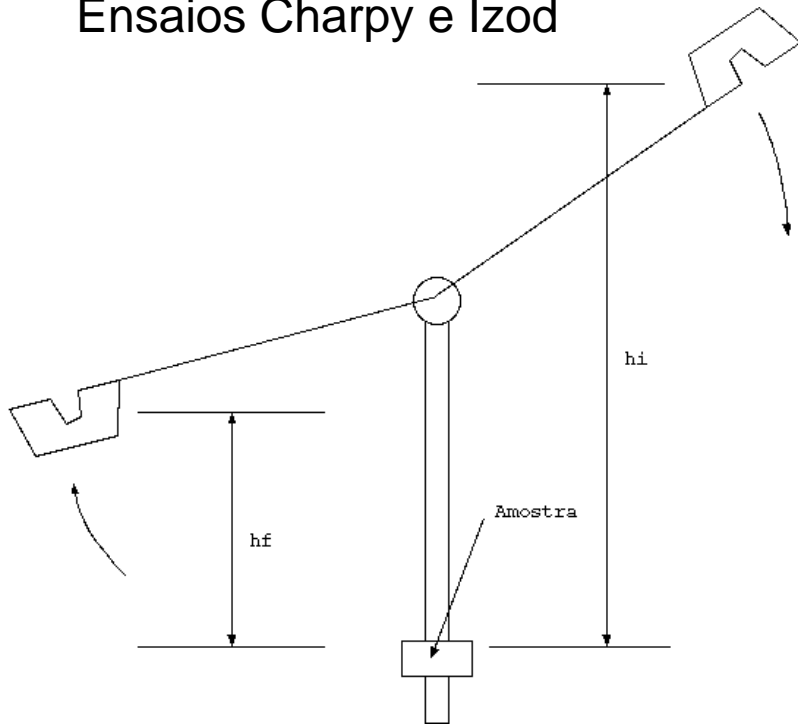
**PÊNDULO PARA  
PLÁSTICOS,  
LEITURA DIGITAL**



**PÊNDULO PARA  
METAIS, LEITURA  
ANALÓGICA**

# Ensaio de impacto (Pêndulo)

## Ensaio Charpy e Izod



$$W_f = mg(h_i - h_f)$$

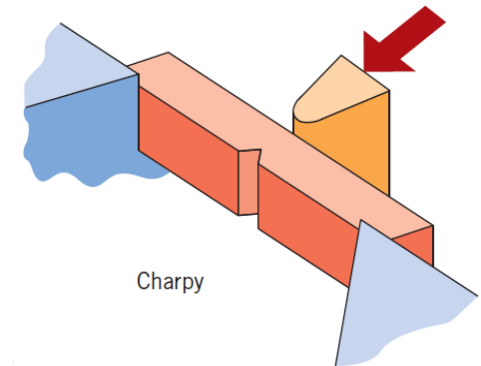
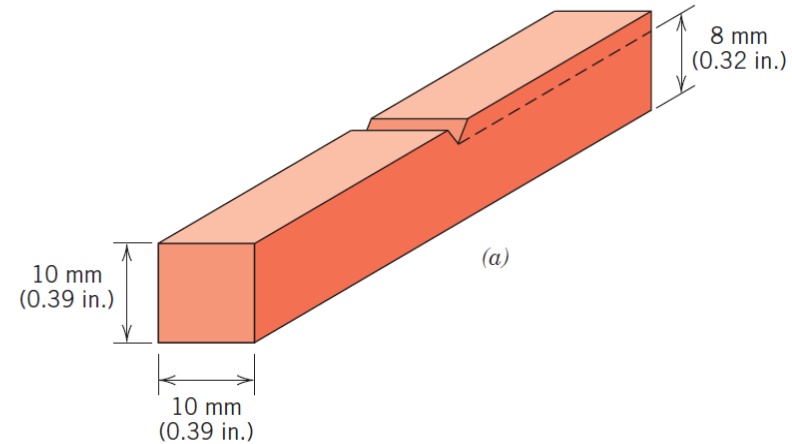
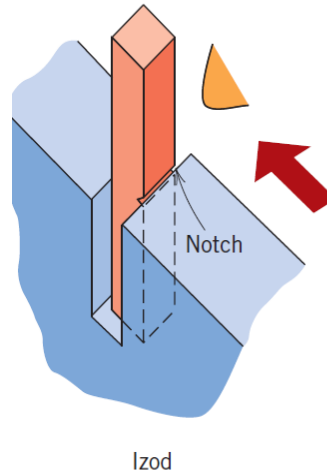
$W_f$ : trabalho de fratura

$m$ : massa do pêndulo

$g$ : aceleração da gravidade

$h_i$ : altura inicial do pêndulo

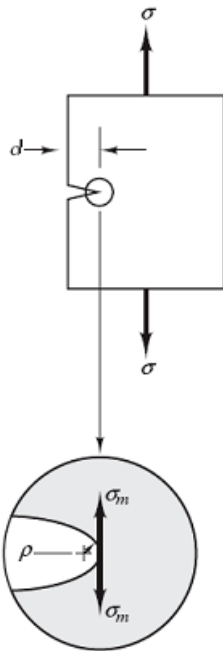
$h_f$ : altura final do pêndulo



*Detalhes dos corpos de prova e da forma de ensaios Charpy e Izod*

# Efeito da concentração de tensões na fratura <sup>20</sup>

- As **resistências à fratura medidas** para a maioria dos materiais frágeis são significativamente **menores** do que aquelas calculadas a partir das **energias das ligações atômicas**.
- A **presença de defeitos e trincas** (pequenos e frequentemente microscópicos), no interior ou na superfície do material, implica em **amplificação da tensão** na extremidade do defeito. A magnitude da concentração de tensões depende da geometria e da orientação do defeito.
- É por isso que, p.ex., a resistência mecânica de vidros é na, prática, muito menor do que sua resistência mecânica teórica (aquela que seria necessária para romper as ligações atômicas)



•O entalhe introduz um fator de concentração de tensões  $f_c$  que pode ser expresso pela equação de Keating.

•Nestas condições a tensão máxima  $\sigma_{\max}$  é dada pela equação de Griffith.

$$f_c = 1 + 2 \left( \frac{d}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

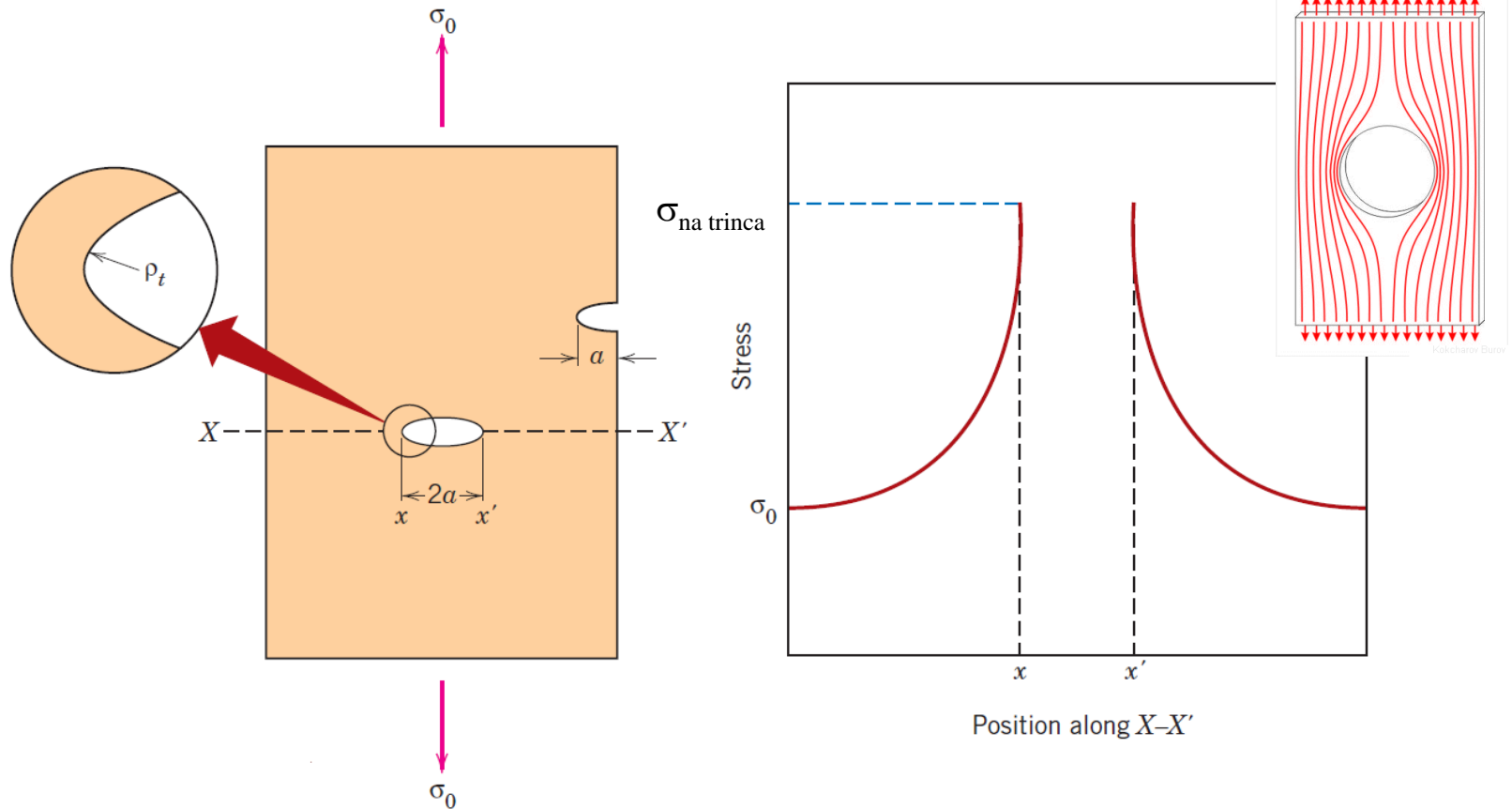
$$\sigma_{\max} = 2\sigma \left( \frac{d}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$d$  = profundidade do entalhe

$\rho$  = raio da extremidade do entalhe  
(pode ser microscópico)

$\sigma$  = tensão aplicada

# Concentração de tensões numa **trinca elíptica** e Resistência a Fratura $K_{Ic}$



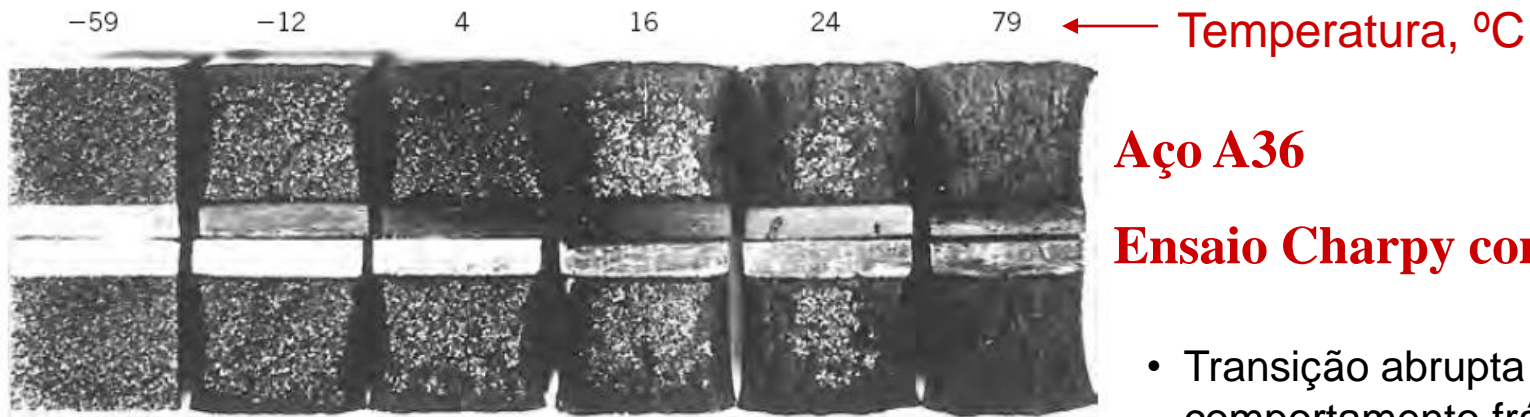
$$K_{Ic} = C \sigma_o \sqrt{\pi a_c}$$

$K_{Ic}$  = tenacidade a fratura

$\sigma_o$  = tensão aplicada

$a_c$  = tamanho crítico da trinca

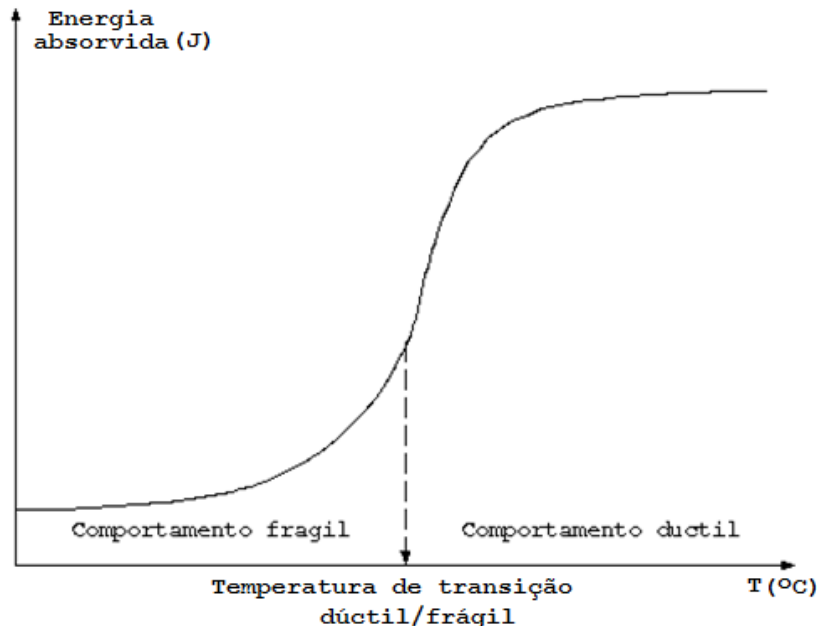
# TRANSIÇÃO DÚCTIL-FRÁGIL



**Aço A36**

**Ensaio Charpy com entalhe V**

**Energia absorvida no ensaio Charpy em função da temperatura**



- Transição abrupta de um comportamento frágil, em baixa temperatura, para um comportamento dúctil, em alta temperatura.
- Depende fortemente da geometria da amostra e do critério para definição da temperatura de transição ⇒ cuidado em projeto para que um material não sofra essa transição em operação.
- Pode ser observada em metais CCC e HC, polímeros e em cerâmicas (em temperaturas elevadas).

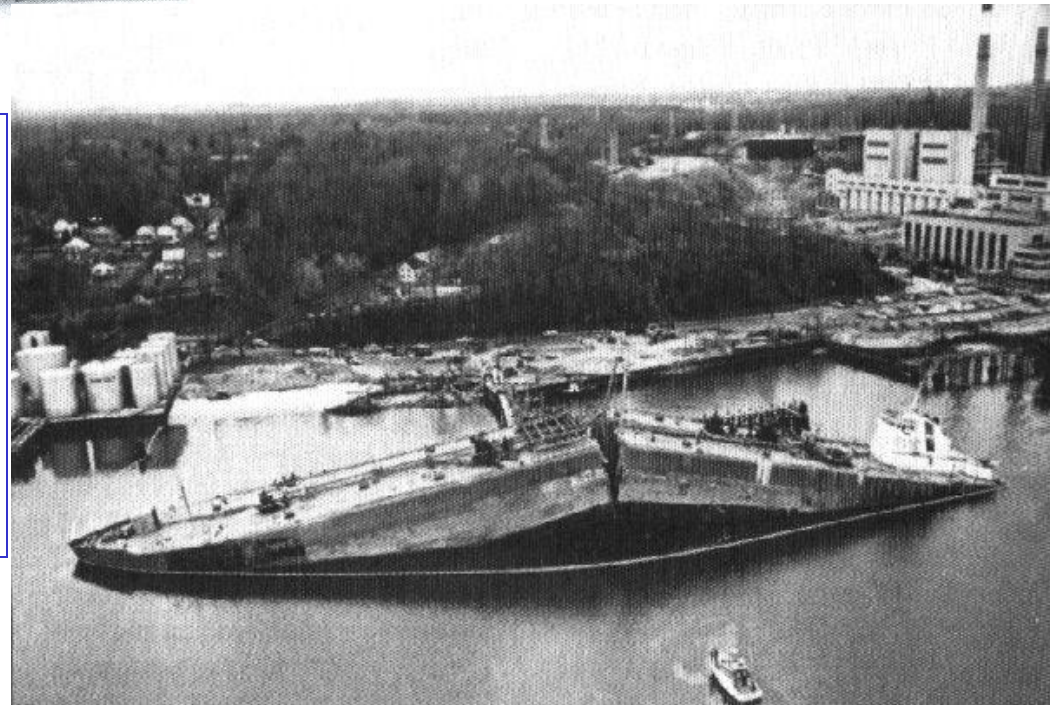
# Transição Dúctil-Frágil



Ruptura de uma ponte metálica no Canadá, acontecida em 1951. A estrutura rompeu de forma frágil numa noite de inverno (-30°C), num momento em que a ponte não estava sequer submetida a uma grande solicitação.

- Não se deve construir estruturas utilizando materiais que apresentem a temperatura de transição dúctil-frágil acima da temperatura de serviço, para evitar fraturas frágeis e catastróficas.

'Liberty ships' = navios que rompem ao meio durante a fabricação por soldagem. Os navios foram fabricados para transportar alimentos, remédios e vestimentas para os aliados dos EUA na Europa. Alguns navios romperam ao meio durante a fabricação, outros durante a viagem para a Europa e outros chegaram intactos.



## HISTORY UNDER THE MICROSCOPE

### **Constance Fligg Elam Tipper: British Metallurgist and SEM Pioneer (1894-1995)**

Constance Tipper was a British metallurgist and crystallographer. Her major research contribution was discovering why during the Second World War the Liberty Ships were breaking in two. Using an early SEM and working from the Engineering Department at the University of Cambridge, UK, Tipper established that there is a critical temperature below which the fracture in steel changes from ductile to brittle.



The Liberty Ships in the North Atlantic were subjected to such low temperatures that they would have been susceptible to brittle failure. The full implications of her work were not realized until the 1950s but after that, the ‘Tipper test’ became the standard method for determining this form of brittleness in steel. The U.S. produced 2,751 Liberty Ships between 1941 and 1945. Only two now remain afloat.

*Editor’s note: An award has been created by the World Academy in Tipper’s name, with the first recipient being ASM member, Diana Lados from Worcester Polytechnic Institute.*

Constance Tipper



# Fadiga



- Até o momento, foram estudadas *solicitações estáticas ou monotônicas* (a força mantém-se constante ou cresce ou decresce *continuamente*).



- Nas aplicações de engenharia, entretanto, freqüentemente encontram-se *solicitações cíclicas* (ex. eixos, molas, asas de avião, bio-implantes, ...), que implicam em um **processo de falha denominado de FADIGA**.

- A *fadiga* é responsável por um grande número das falhas mecânicas observadas nos componentes de engenharia e por um grande número de acidentes com vítimas fatais.



- A fadiga ocorre com um componente submetido a solicitações dentro do regime elástico (isto é, para tensões inferiores ao limite de escoamento) → o fenômeno deve ser levado em conta em projetos de engenharia.
- A fadiga ocorre em todas as classes de materiais (metálicos, cerâmicos, poliméricos e compósitos).

# Ensaio de fadiga

Máquina servo-hidráulica de ensaio de fadiga



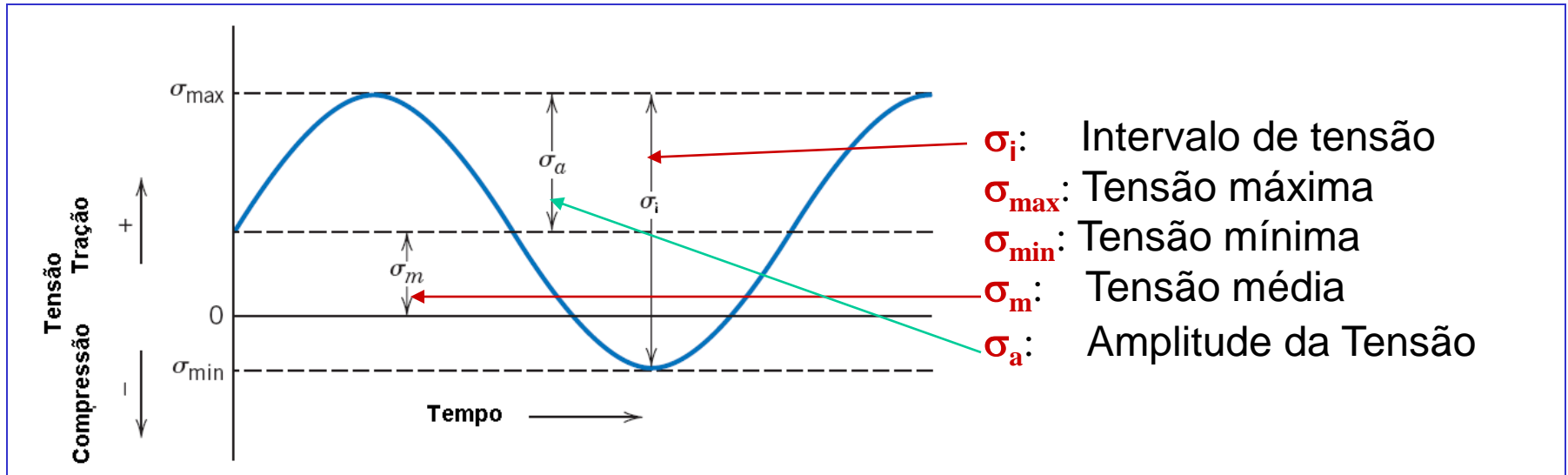
Corpos de prova antes e depois do ensaio



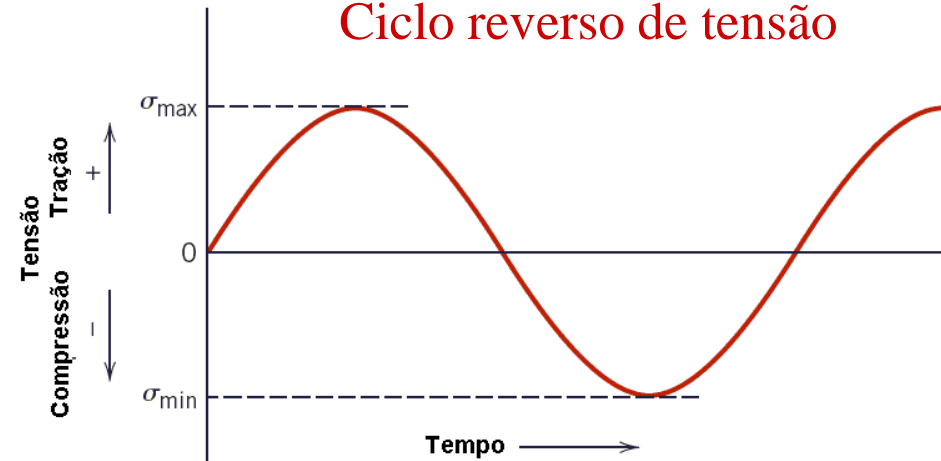
Ensaio de fadiga a quente em material resistente ao calor



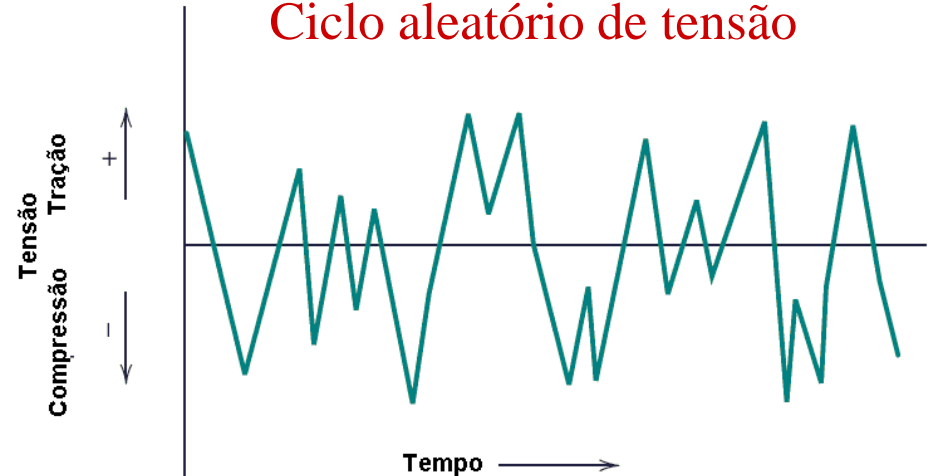
# Parâmetros da Solicitação Cíclica



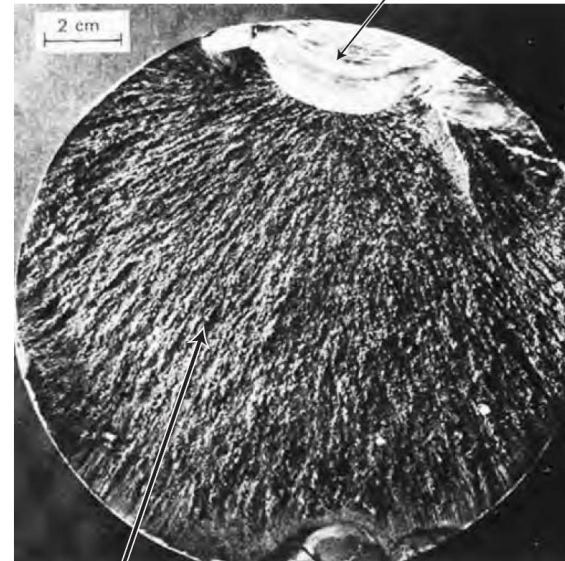
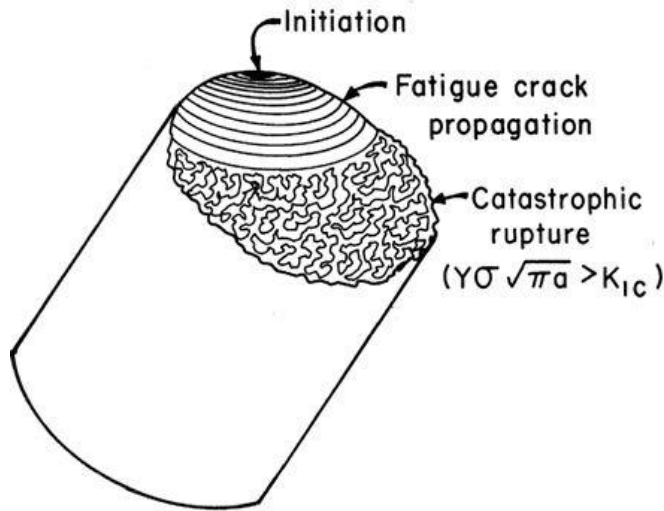
## Ciclo reverso de tensão



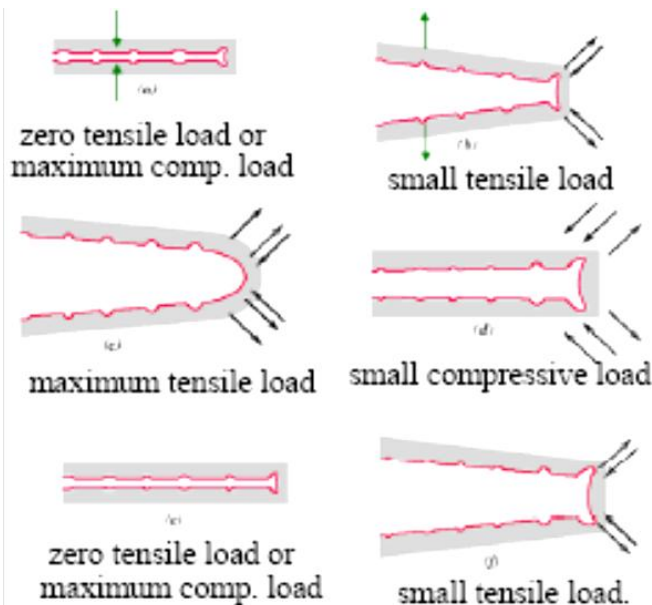
## Ciclo aleatório de tensão



Mecanismo de crescimento de trinca estável



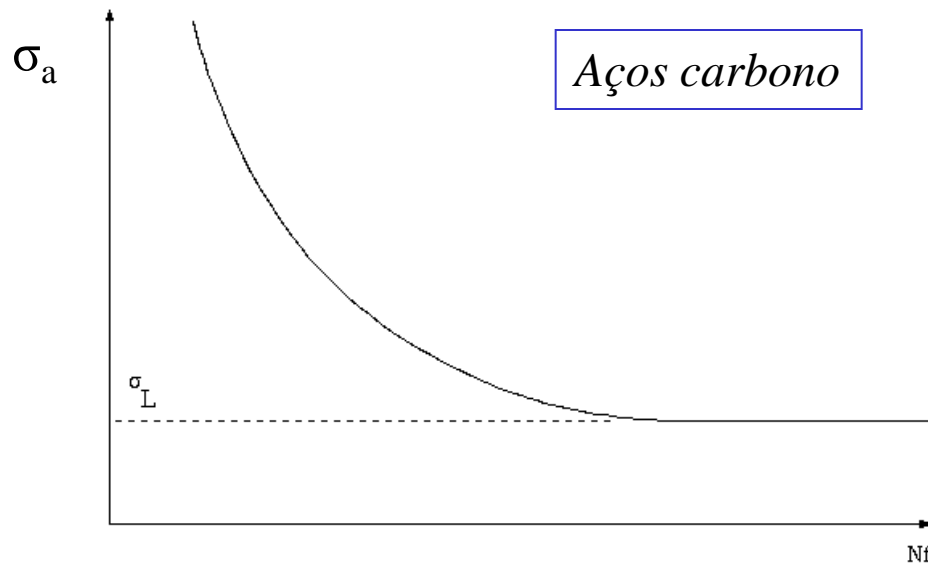
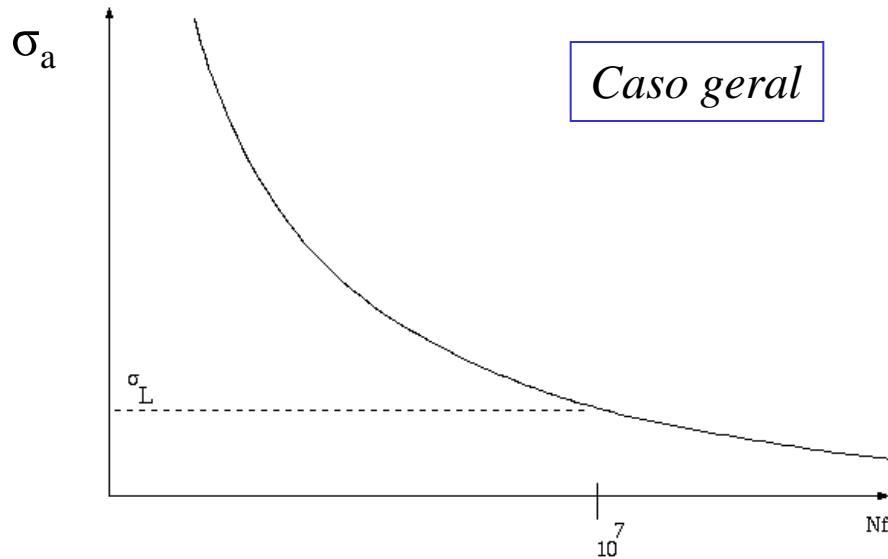
Mecanismo de crescimento de trinca instável



- Double notch at crack tip, extends along **shear** planes
- under tensile loading and then blunts due to deformation
- Compression closes crack and shear occurs in opposite sense
- leading to sharp notches again
- And then again and again.....

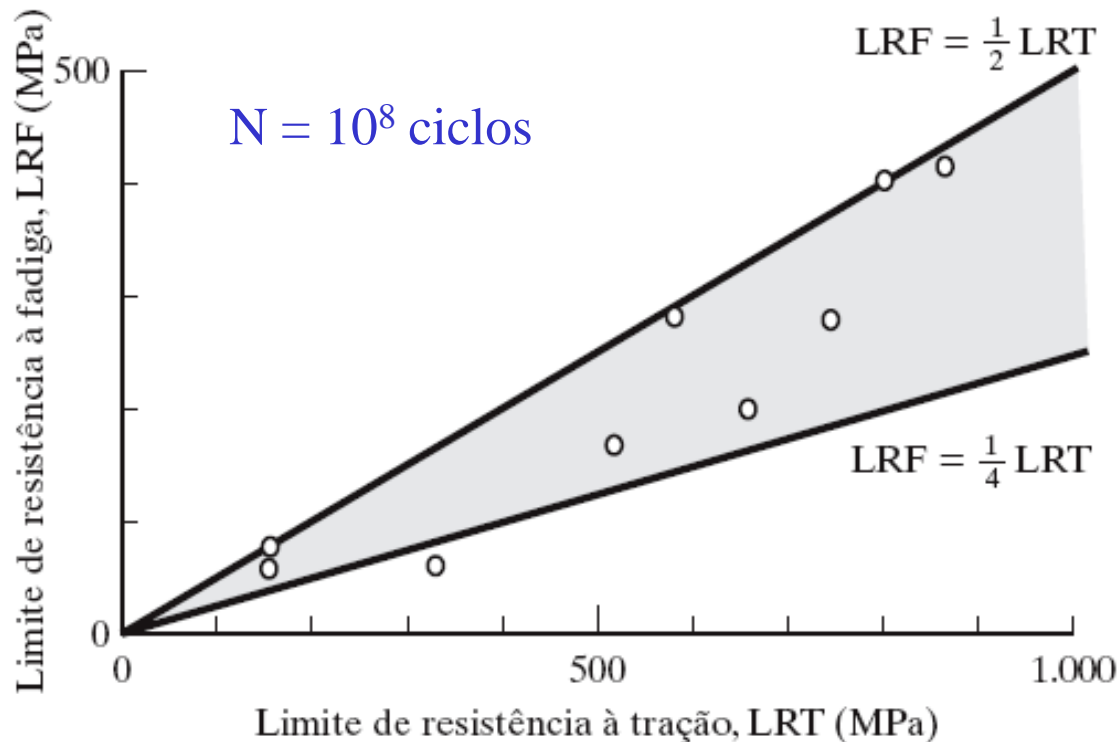
Sometimes this process leaves markings on the fracture surface; **Beachmarks** and/or **Striations**. Indicate position of crack tip at some point in time.

## Curva $\sigma$ -N (curva de Wöhler)



- O ensaio é realizado em frequência constante e com um valor de  $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  fixo para um grande número de amostras em cada nível de amplitude de tensão.
- Faz-se o gráfico do número médio de ciclos necessários para a ruptura do material.
- Define-se o limite de fadiga ( $\sigma_L$ , *endurance limit*) como sendo o nível de amplitude de tensão abaixo do qual não se observa a ruptura por fadiga.
- Para aços-carbono, aços baixa liga e ferros fundidos há um limite de fadiga bem definido, para os demais materiais convencionam-se um número de  $10^7$  ciclos para a definição do limite de fadiga.

# LIMITE DE RESISTÊNCIA A TRAÇÃO E LIMITE DE FADIGA



**Figura 8.16** Gráfico dos dados da Tabela 8.4 que mostra como o limite de resistência à fadiga geralmente vale de um quarto à metade do limite de resistência à tração.

Para muitas ligas metálicas existe uma correlação entre o limite de resistência a tração e o limite de fadiga

**Tabela 8.4** Comparação entre o limite de resistência à fadiga (LRF) e o limite de resistência à tração (LRT) para algumas das ligas da Tabela 6.1

	<b>Liga</b>	<b>LRF (MPa)</b>	<b>LRT (MPa)</b>
1.	Aço carbono 1040	280	750
2.	Aço 8630 de baixa liga	400	800
3.	a. Aço inoxidável 304		515
3.	b. Aço inoxidável 304	170	
7.	a. Alumínio 3003-H14	62	150
8.	b. Magnésio AM100A	69	150
9.	a. Ti-5Al-2,5Sn	410	862
10.	Bronze com alumínio, 9% (liga de cobre)	200	652
11.	Monel 400 (liga de níquel)	290	579
12.	Zinco AC41A	56	328

- Entender o efeito do tempo e da temperatura no comportamento mecânico dos materiais é importante para prever o seu desempenho em serviço.
- Os modelos mecânicos compostos por elementos hookianos e newtonianos são importantes para compor equações que simulam o comportamento viscoelástico dos materiais, cuja resposta depende da taxa de deformação.
- A curva de fluência apresenta 3 estágios, cujas taxas de deformação podem ser descritas como: decrescente, estacionária e crescente.
- O segundo estágio da curva de fluência caracteriza-se pela dependência em relação à tensão aplicada e temperatura, de acordo com a equação experimental:

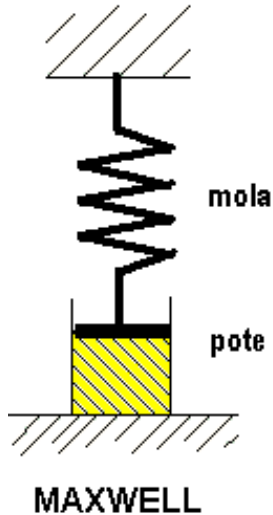
$$\dot{\epsilon} = \frac{C \sigma^m}{d^b} e^{\frac{-Q}{RT}}$$
- Os ensaios de fluência, resistência a impacto e resistência a fadiga ajudam a prever o comportamento do material em serviço.

- **Capítulo do Callister (7ª ed.,2008) tratado nesta aula**
  - Comportamento viscoelástico : seção 15.4
  - Fluência : seção 8.12 a 8.15
  - Concentração de tensões : 8.5
  - Impacto : seção 8.6
  - Fadiga : seção 8.7 e 8.8
  
- Textos complementares indicados
  - Callister, 5 ed. :Comportamento viscoelástico : 16.7; Fluência : seção 8.13 a 8.15; Impacto : seção 8.6; Fadiga : seção 8.7 e 8.8
  - Shackelford, Ciência dos materiais, 6ª ed., 2008, Fluência: 6.5; Deformação viscoelástica: 6.6; Impacto e Fadiga: 8.1 a 8.3
  - Sperling, Introduction to physical polymer science, 4ª ed, 2006, Viscoelasticidade, capítulo 10: seção 10.1 a 10.1.2.2 e 10.2 a 10.2.3 e Apêndice 10.2 (Experiência: Viscoelasticidade do queijo)



## Modelo de Maxwell

### modelo para descrever relaxação de tensão



A tensão  $\sigma$  é imposta para uma deformação fixa  $\epsilon$ .

A deformação total num modelo de Maxwell é aditiva:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{elast}} + \epsilon_{\text{visc}}$$

para tração:  $\epsilon_{\text{elast}} = \sigma/E$  e  $d\epsilon_{\text{visc}}/dt = \sigma/\eta$

$E$  = módulo de elasticidade

$$\rightarrow d\epsilon/dt = (1/E)(d\sigma/dt) + \sigma/\eta$$

Considerando uma deformação constante ( $d\epsilon/dt = 0$ ):

$$d\sigma/dt + E \sigma/\eta = 0 \quad \text{ou} \quad d\sigma/dt = -E \sigma/\eta$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t E/\eta)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$$

Módulo de relaxação

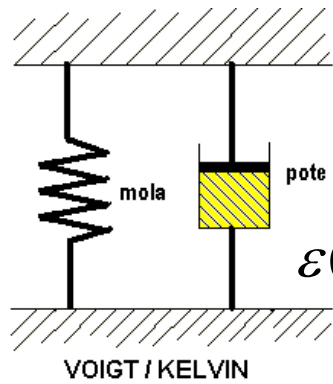
$$E_r(t) = \sigma(t) / \epsilon_0$$

Integrando e tomando a tensão inicial igual a tensão imposta

$\sigma_0$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t \frac{E}{\eta}}$$

Quando  $t = \eta/E$ , o valor original da tensão fica reduzida em  $1/e$  ( $e = 2,718$ ),  $\sigma = 0,3679\sigma_0$ , e o tempo  $t$  é conhecido como **tempo de relaxação  $\tau$** .



$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{G} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_R}} \right]$$

# Modelo de Voigt-Kelvin

## modelo para descrever fluência

**PARA APRENDER MAIS:**  
viscoelasticidade

Os componentes MOLA e POTE partilham a tensão e são sujeitos a mesma deformação:

$$\sigma = \sigma_{\text{elástico}} + \sigma_{\text{viscoso}}$$

$$\sigma = G\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{G\varepsilon}{\eta} + \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{G}{\eta} dt = \frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma}{G} - \varepsilon}$$

Integrando :

$$\frac{G}{\eta} t = \ln \frac{\frac{\sigma}{G}}{\frac{\sigma}{G} - \varepsilon}$$

e rearranjando:

$$\frac{\sigma}{G} = \left( \frac{\sigma}{G} - \varepsilon \right) e^{\frac{G}{\eta} t} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{G} \left[ 1 - e^{-\frac{Gt}{\eta}} \right]$$

e para  $t = 0 \rightarrow \sigma = \sigma_0$  e  $\varepsilon = 0$  :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{G} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_R}} \right]$$

$\tau_R = \eta/G$  é o *tempo de retardação* e está relacionado com o intervalo de tempo entre a aplicação da tensão e a deformação.

# Modelo de 4 elementos modelo para descrever FLUÊNCIA aplica-se uma tensão $\sigma_o$ e observa-se $\epsilon(t)$

$\sigma_o =$  tensão aplicada em  $t = 0$  s

Curva	$G_1$ (dinas/cm <sup>2</sup> )	$\eta_1$ (P)	$G_2$ (dinas/cm <sup>2</sup> )	$\eta_2$ (P)	$\sigma_o$ (dinas/cm <sup>2</sup> )
I	$5 \times 10^9$	$5 \times 10^{11}$	$10^9$	$5 \times 10^9$	$10^9$
II	$10^{11}$	$5 \times 10^{11}$	$10^9$	$5 \times 10^9$	$10^9$
III	$5 \times 10^9$	$5 \times 10^{10}$	$10^9$	$5 \times 10^9$	$10^9$

$G$  e  $\eta$  são sensíveis a variação da temperatura.

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_o}{G_1} + \frac{\sigma_o}{G_2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_R}} \right] + \frac{\sigma_o}{\eta_1} t$$

