



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Introdução FEM

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de
Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

3373-8650



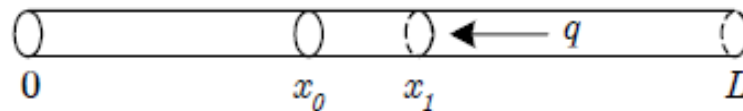
Motivação

Cilindro de comprimento L e raio desprezível, de maneira que o fluxo de calor aconteça na direção- x . A Lei de Fourier indica que o fluxo, q , é proporcional ao gradiente de temperatura u :

$$q = -\kappa u'$$

K é o coeficiente de condutividade térmica e o sinal negativo indica que o fluxo de calor acontece da maior para a menor temperatura. Entre os pontos x_1 e x_0 podemos equacionar o fluxo da seguinte maneira:

$$q(x_1) - q(x_0) = -\kappa(x_1)u'(x_1) + \kappa(x_0)u'(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} -(\kappa(x)u'(x))' dx.$$



Motivação

Uma fonte de calor externa ou interna,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

,pode causar o fluxo de calor

O balanço energético leva a:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[-(\kappa(x) u'(x))' - f(x) \right] dx = 0$$

Assim:

$$-(\kappa(x) u'(x))' = f(x) \quad \text{for all } 0 < x < L.$$

Motivação

A Lei de Newton também diz que a transferência de calor se dá a uma taxa proporcional a diferença de temperatura entre a peça e o ambiente (na equação, a temperatura do ambiente é tratada como nula). Assim,

$$-(\kappa u')' + \lambda u = f \quad \text{in } (0, L)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$q(0) = q(L) = 0,$$

$$u'(0) = u'(L) = 0.$$

EDO com
condições de
contorno!

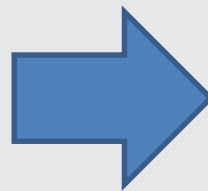
Motivação

Problemas Elásticos

Problemas Térmicos

Escoamento de Flúidos

Eletroestática



Equações
Diferenciais

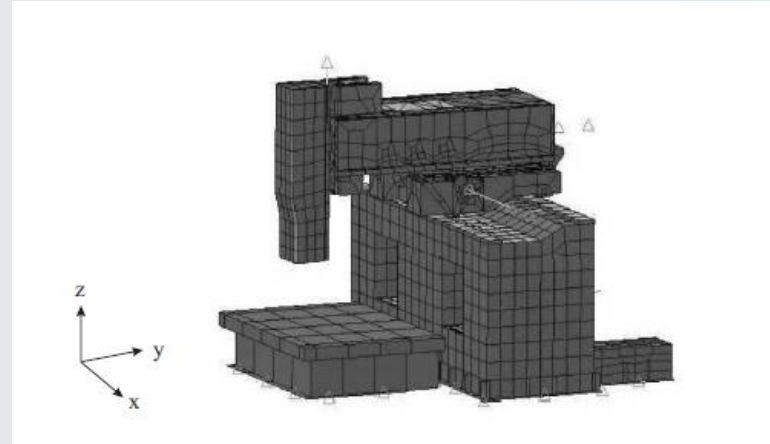


Condições
de
Contorno

Introdução

Exemplo: Centro de usinagem

Deformação Elástica
Modos de Vibrar
Comportamento Térmico



Equações
Diferenciais



Condições
de
Contorno



APROXIMAÇÃO

Sistemas de equações

$$Ku = F$$

Introdução

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}\}$$

Property Behavior Action

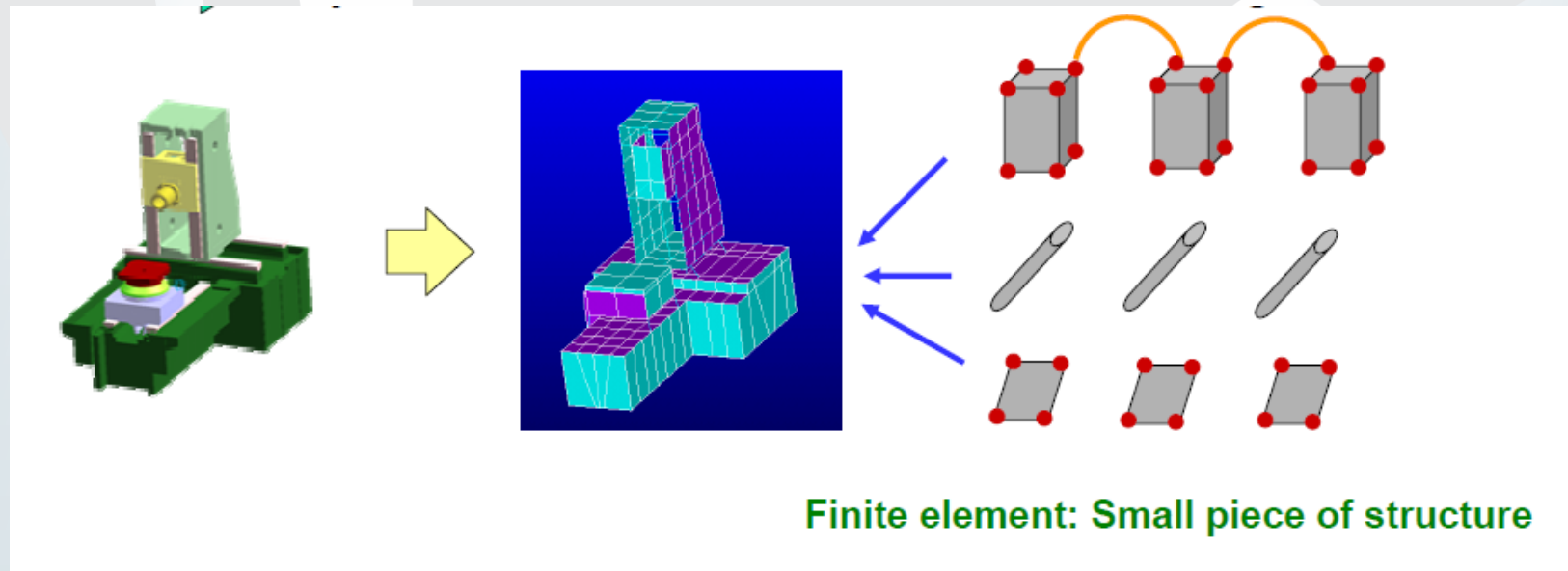
	Property $[\mathbf{K}]$	Behavior $\{\mathbf{u}\}$	Action $\{\mathbf{F}\}$
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dielectric permittivity	electric potential	charge

Unknown

Introdução

Objetivo do método:

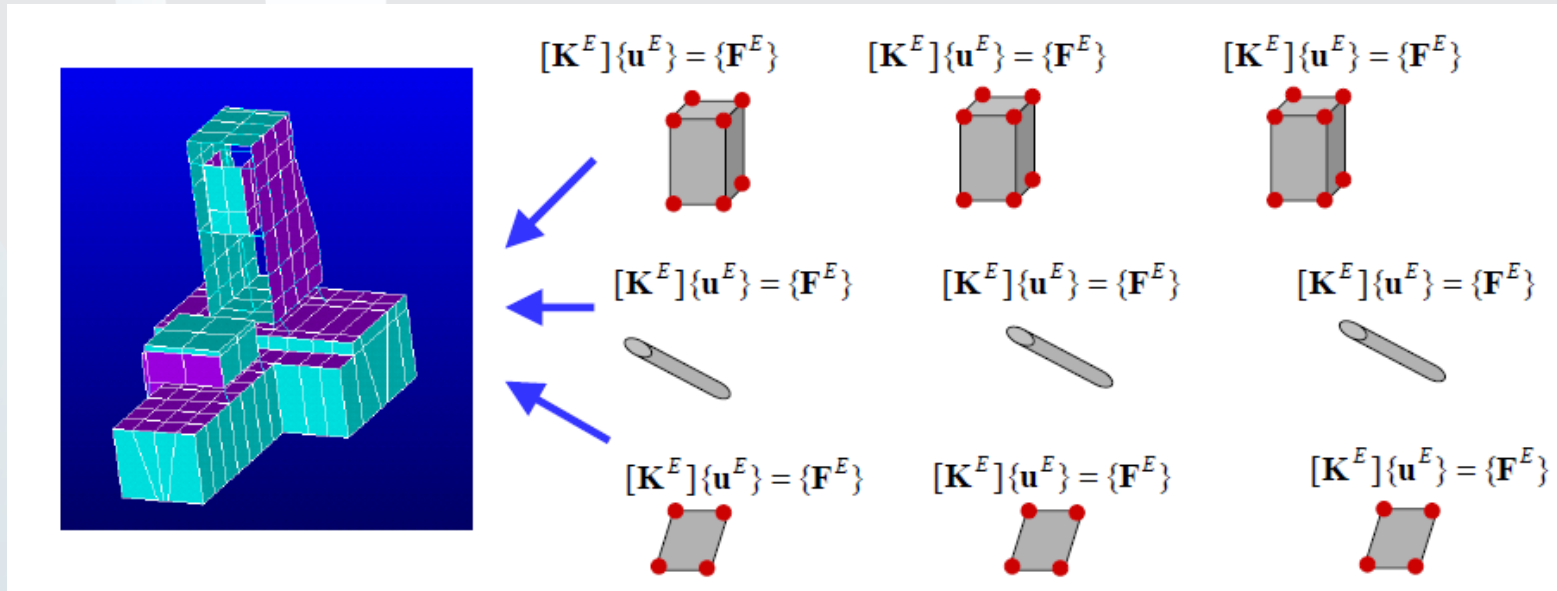
- dividir em domínios menores
- Aproximar a solução nesses domínios
- Impor a solução para domínio adjacentes
- Resolver as equações



Introdução

Objetivo do método:

- dividir em domínios menores
- Aproximar a solução nesses domínios
- Impor a solução para domínio adjacentes
- Resolver as equações



Introdução

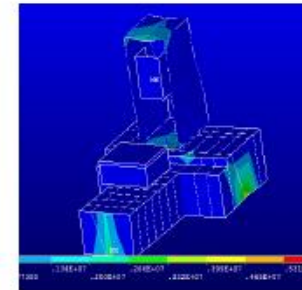
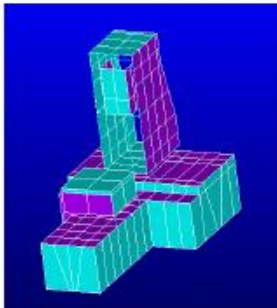
Objetivo do método:

- dividir em domínios menores
- Aproximar a solução nesses domínios
- Impor a solução para domínio adjacentes
- Resolver as equações

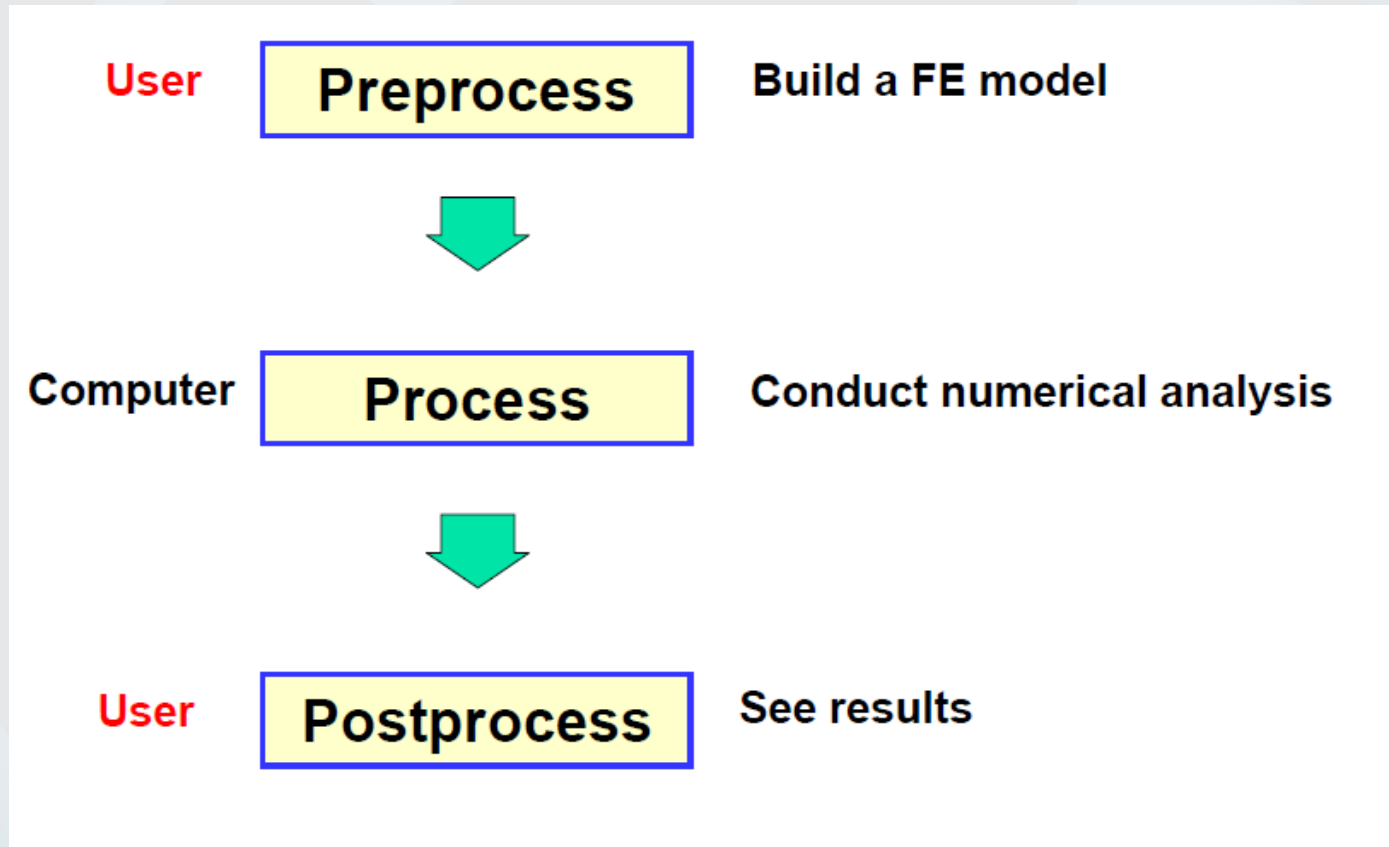
$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$



$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}\}$$



Metodologia

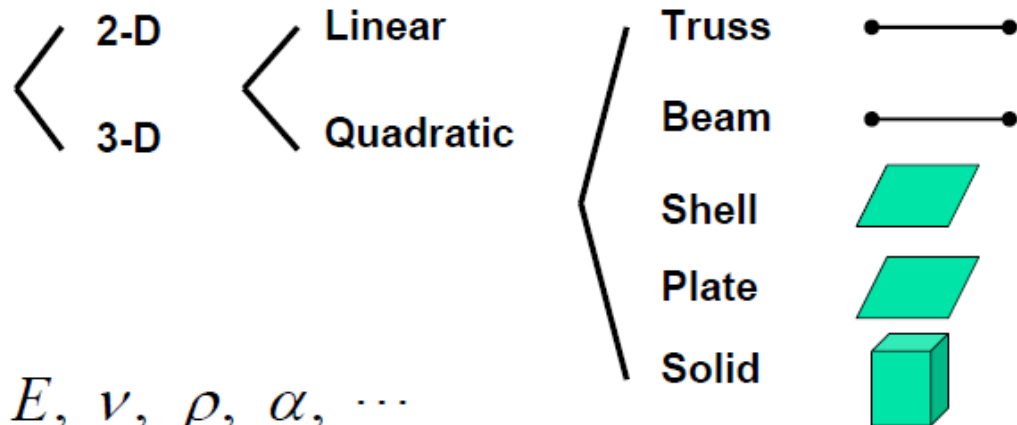


Metodologia - Pré-processamento

[1] Select analysis type

- Structural Static Analysis
- Modal Analysis
- Transient Dynamic Analysis
- Buckling Analysis
- Contact
- Steady-state Thermal Analysis
- Transient Thermal Analysis

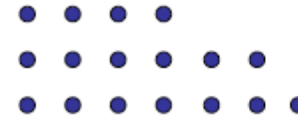
[2] Select element type



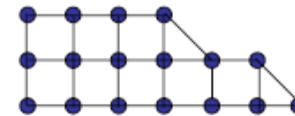
[3] Material properties $E, \nu, \rho, \alpha, \dots$

Metodologia - Pré-processamento

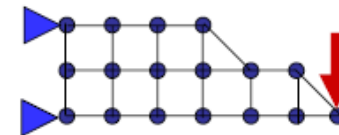
[4] Make nodes



[5] Build elements by assigning connectivity



[6] Apply boundary conditions and loads



Metodologia - Resolução

[7] Process

- Solve the boundary value problem



Métodos Numéricos para inversão de matriz, fatoração, solução de sistemas de equações

Metodologia – Pós-processamento

[8] Postprocess

- See the results

Displacement

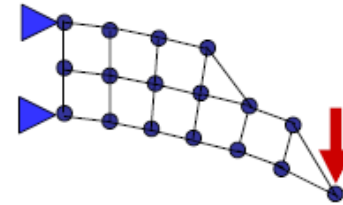
Stress

Strain

Natural frequency

Temperature

Time history



Metodologia – Elementos

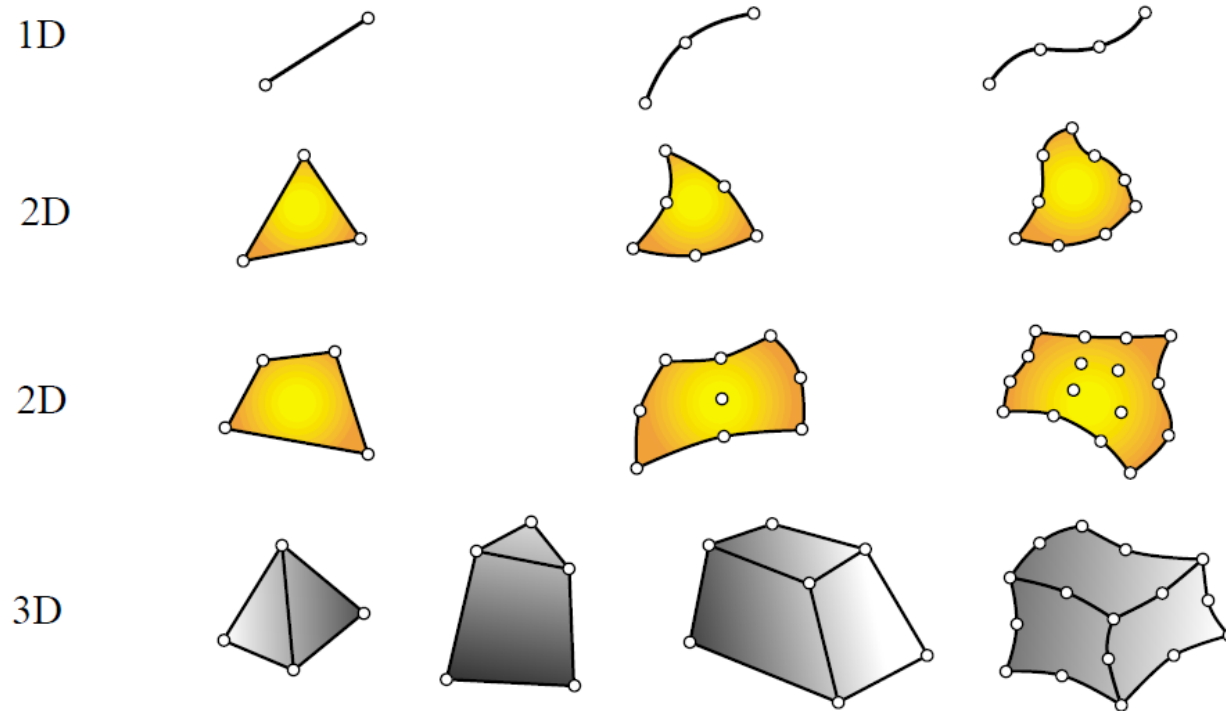


FIGURE 6.3. Typical finite element geometries in one through three dimensions.

Metodologia – Elementos

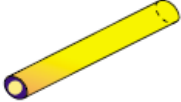

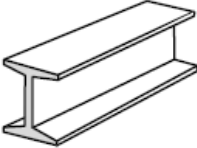

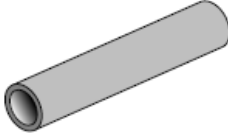

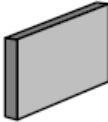

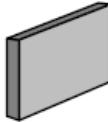
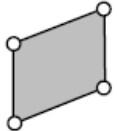
Physical Structural Component	Mathematical Model Name	Finite Element Idealization
	bar	
	beam	
	tube, pipe	
	spar (web)	
	shear panel (2D version of above)	

FIGURE 6.4. Examples of primitive structural elements.

Metodologia – Elementos

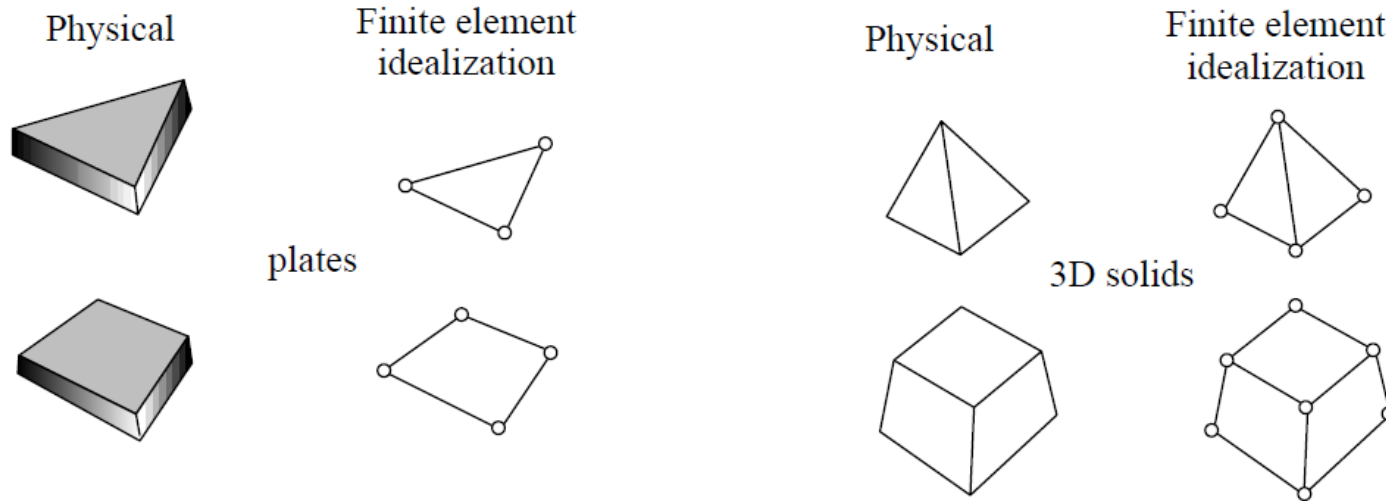


FIGURE 6.5. Continuum element examples.

Métodos de Aproximação

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \text{ and } u(1) = 0 \end{cases}$$

Função tentativa:

$$\tilde{u} = ax(1 - x)$$

$$\tilde{u}(0)=0$$

$$\tilde{u}(1)=0$$

Métodos de Aproximação

Substituindo a função tentativa, calculamos o resíduo:

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1-x) + x$$

O resíduo deve ser nulo em toda a faixa $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 wR \, dx = \int_0^1 w \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\ &= \int_0^1 w \{-2a - ax(1-x) + x\} dx = 0 \end{aligned}$$

Formulação
FORTE

Métodos de Aproximação

Mas como escolher o ω ?

Method	Description
Collocation	$w_i = \delta(x - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$ where x_i is a point within the domain
Least Squares	$w_i = \partial R / \partial a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ where R is the residual and a_i is an unknown coefficient in the trial function
Galerkin	$w_i = \partial \tilde{u} / \partial a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ where \tilde{u} is the selected trial function

Métodos de Aproximação

Mas como escolher o ω ?

1. Collocation Method. The Dirac delta function, $\delta(x - x_i)$, is used as the test function, where the sampling point x_i must be within the domain, $0 < x_i < 1$. In other words,

$$w = \delta(x - x_i) \quad (2.1.4)$$

Let $x_i = 0.5$ and we substitute the test function into the weighted residual, Eq. (2.1.3), to find $a = 0.2222$. Then, the approximate solution becomes $\tilde{u} = 0.2222x(1 - x)$.

Métodos de Aproximação

Mas como escolher o ω ?

2. Least Squares Method. The test function is determined from the residual such that

$$w = \frac{dR}{da} \quad (2.1.5)$$

Applying Eq.(2.1.5) to Eq. (2.1.2) yields $w = -2 - x(1 - x)$. Substitution of the test function into Eq. (2.1.3) results in $a = 0.2305$. Then $\tilde{u} = 0.2305x(1 - x)$.

Métodos de Aproximação

Mas como escolher o ω ?

3. Galerkin's Method. For Galerkin's method, the test function comes from the chosen trial function. That is,

$$w = \frac{d\tilde{u}}{da} \quad (2.1.6)$$

For the present trial function, $w = x(1 - x)$. Applying this test function to Eq. (2.1.3) gives $a = 0.2272$ so that $\tilde{u} = 0.2272x(1 - x)$. Comparison of these three approximate solutions to the exact solution at $x = 0.5$ is provided in Table 2.1.1. As seen in the comparison, all three methods result in reasonably accurate approximate solutions to Eq. (2.1.1).

Métodos de Aproximação

Mas como escolher o ω ?

$$x = 0.5$$

Exact Solution	Collocation	Least Squares	Galerkin
0.0566	0.0556	0.0576	0.0568

Formulação Forte

Conseguimos resolver um sistema de equações ao invés da EDO!

Encontramos um a e temos uma aproximação para a solução da EDO:

$$\tilde{u} = 0.2272x(1 - x).$$

Mas será é fácil resolver assim?

Ainda não dividimos o espaço em regiões menores e precisamos fazer derivadas e integrais!!

Formulação FRACA

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du$$

Annotations for the equation above:

- u → u na
- v → v x ls
- uv → Mew
- ∫ → integral
- v → vestido
- du → de
- Uniforme



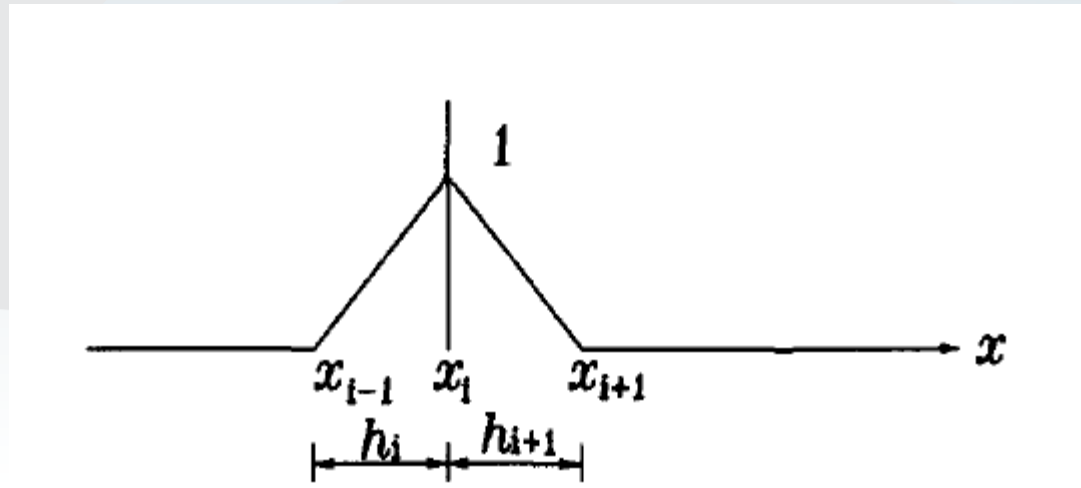
Formulação FRACA

Integral por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) dx + \left[w \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

Essa formulação combina com Galerkin e Funções piecewise (funções tentativas)!

Funções Piecewise



$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{for } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{for } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

♣ **Example 2.3.1** Consider the same problem as given in Eq. (2.1.1). It is rewritten here

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \text{ and } u(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

The weak formulation is also rewritten as below:

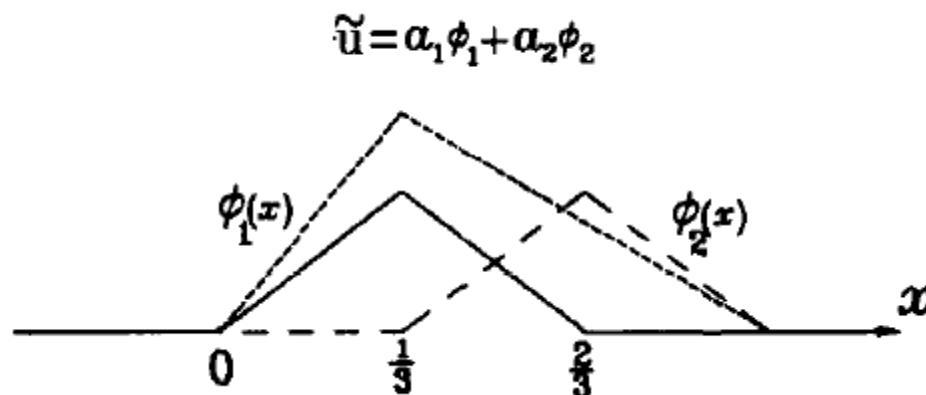
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) dx + \left[w \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

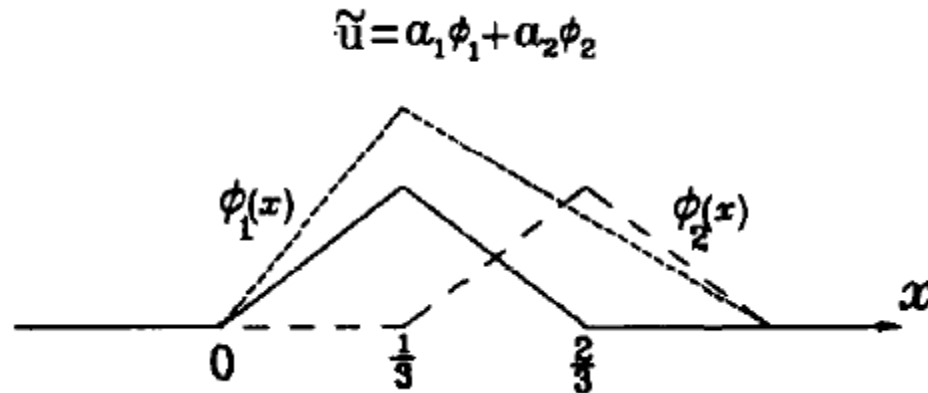
A trial function is chosen such that $\tilde{u} = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$ in which a_1 and a_2 are unknown constants to be determined, and ϕ_1 and ϕ_2 are defined as below:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3x - 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3 - 3x, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$



Vamos resolver o nosso exemplo!



$$\tilde{u} = \begin{cases} a_1(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ a_1(2 - 3x) + a_2(3x - 1), & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ a_2(3 - 3x), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

$$w_i = \partial \tilde{u} / \partial a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

where \tilde{u} is the selected trial function

Use of Galerkin's method yields the following test functions

$$w_1 = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

and

$$w_2 = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3x - 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3 - 3x, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Averaged weighted residuals are

$$I_1 = \int_0^1 \left(-\frac{dw_1}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w_1 \tilde{u} + xw_1 \right) dx = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(-\frac{dw_2}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w_2 \tilde{u} + xw_2 \right) dx = 0$$

Formulação FRACA

where $[w \frac{d\tilde{u}}{dx}]_0^1$ is omitted because $w_1(0) = w_1(1) = w_2(0) = w_2(1) = 0$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Formulação FRACA

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{3}} [-3(3a_1) - 3x(3a_1x) + x(3x)]dx + \\ &\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [3(-3a_1 + 3a_2) - (2 - 3x)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) \\ &+ x(2 - 3x)]dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 0dx \\ &= -6.222a_1 + 2.9444a_2 + 0.1111 = 0 \\ I_2 &= \int_0^{\frac{1}{3}} 0dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [-3(-3a_1 + 3a_2) \\ &- (3x - 1)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(3x - 1)]dx + \\ &\int_{\frac{2}{3}}^1 [3(-3a_2) - (3 - 3x)(3a_2 - 3a_2x) + x(3 - 3x)]dx \\ &= 2.9444a_1 - 6.2222a_2 + 0.2222 = 0 \end{aligned}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Formulação FRACA

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} [-3(3a_1) - 3x(3a_1x) + x(3x)]dx +$$
$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [3(-3a_1 + 3a_2) - (2 - 3x)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2)$$
$$+ x(2 - 3x)]dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 0dx$$
$$= -6.222a_1 + 2.9444a_2 + 0.1111 = 0$$

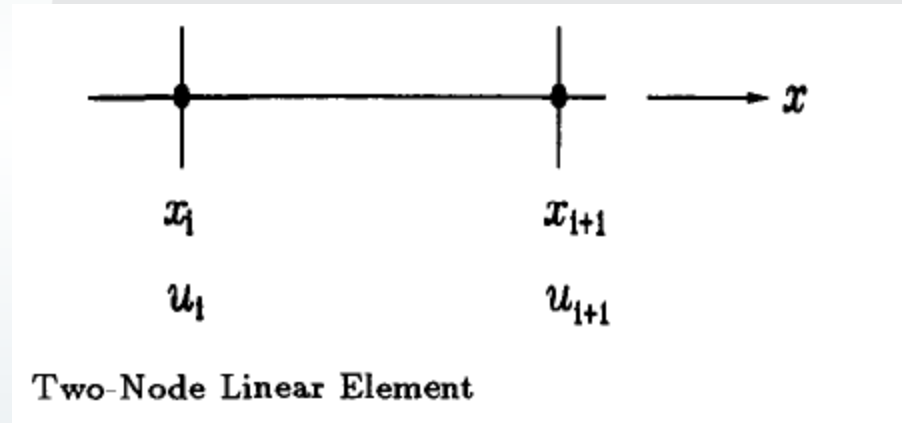
$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{3}} 0dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [-3(-3a_1 + 3a_2)$$
$$- (3x - 1)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(3x - 1)]dx +$$
$$\int_{\frac{2}{3}}^1 [3(-3a_2) - (3 - 3x)(3a_2 - 3a_2x) + x(3 - 3x)]dx$$
$$= 2.9444a_1 - 6.2222a_2 + 0.2222 = 0$$

Sistemas de equações!

$a_1 = 0.0488$
 $a_2 = 0.0569$

Formulação de Elementos Finitos de Galerkin

Vamos dividir o problema em subdomínios chamados elementos para resolver um problema complexo.

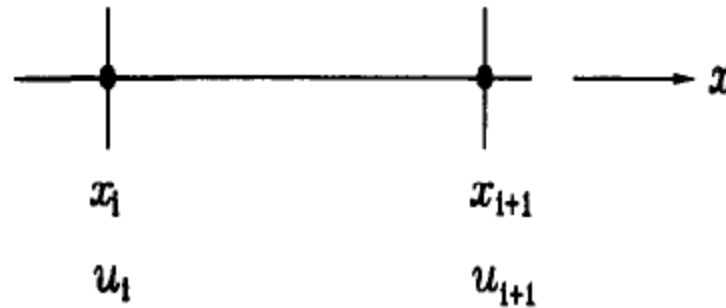


Elementos de 2 nós!

Função tentativa: $u = c_1 x + c_2$

Formulação de Elementos Finitos de Galerkin

Função tentativa: $u = c_1 x + c_2$



Two-Node Linear Element

$$u(x_i) = c_1 x_i + c_2 = u_i$$

$$u(x_{i+1}) = c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1}$$

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Formulação de Elementos Finitos de Galerkin

$$u(x_i) = c_1 x_i + c_2 = u_i$$

$$u(x_{i+1}) = c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1}$$

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Vamos rearranjar os termos (por em evidência u_i e u_{i+1})

$$u = H_1(x)u_i + H_2(x)u_{i+1}$$

H: funções de forma

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Formulação de Elementos Finitos de Galerkin

$$u = H_1(x)u_i + H_2(x)u_{i+1}$$

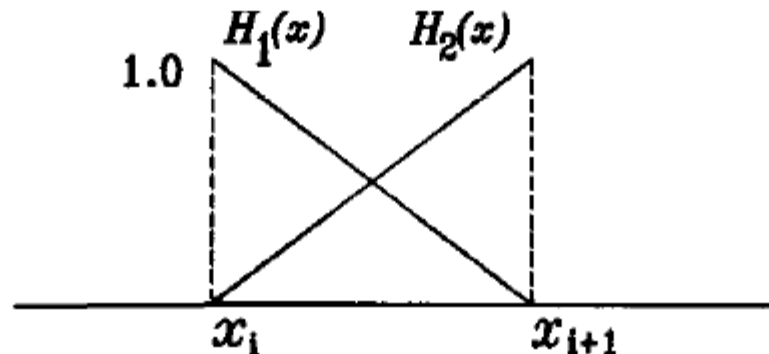
$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

H: funções de forma
O que sabemos delas?

$$H_1(x_i) = 1, H_1(x_{i+1}) = 0, H_2(x_i) = 0, H_2(x_{i+1}) = 1$$



Soma sempre
1!

Linear Shape Functions

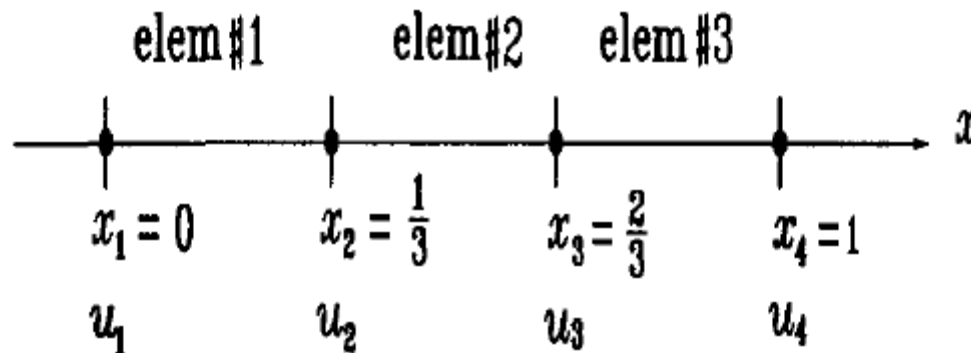
Vamos resolver o nosso exemplo!

♣ **Example 2.3.1** Consider the same problem as given in Eq. (2.1.1). It is rewritten here

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \text{ and } u(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Formulação fraca com n elementos ($n=3$ no exemplo):

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wu + xw \right) dx + \left[u'w \right]_0^1 = 0$$



Vamos resolver o nosso exemplo!

Vamos olhar só esse termo

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wu + xw \right) dx + \left[u'w \right]_0^1 = 0$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Vamos olhar só esse termo

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wu + xw \right) dx + \left[u'w \right]_0^1 = 0$$

The trial function u is expressed as

$$u = H_1(x)u_i + H_2(x)u_{i+1} \quad (2)$$

and test functions for Galerkin's method are $w_1 = H_1(x)$ and $w_2 = H_2(x)$. Putting these u and w into Eq. (2.4.13) gives

$$\begin{aligned} & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{Bmatrix} [H_1' H_2'] + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} [H_1 H_2] \right) dx \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} dx \end{aligned} \quad (2.)$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

$$\begin{aligned} & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{Bmatrix} [H'_1 H'_2] + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} [H_1 H_2] \right) dx \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} dx \end{aligned} \quad (2.)$$

Calculando ...

$$- \begin{bmatrix} \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h_i}{6} (x_{i+1} + 2x_i) \\ \frac{h_i}{6} (2x_{i+1} + x_i) \end{Bmatrix}$$

h depende do tamanho do elemento (conhecidas), u são as quantidades no nós e x as posições dos nós (conhecidas)

Vamos resolver o nosso exemplo!

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h_i}{6}(x_{i+1} + 2x_i) \\ \frac{h_i}{6}(2x_{i+1} + x_i) \end{Bmatrix}$$

Para os 3 elementos:

Element #1

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \end{Bmatrix}$$

Element #2

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0741 \\ 0.0926 \end{Bmatrix}$$

Element #3

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1296 \\ 0.1481 \end{Bmatrix}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!


Element #1

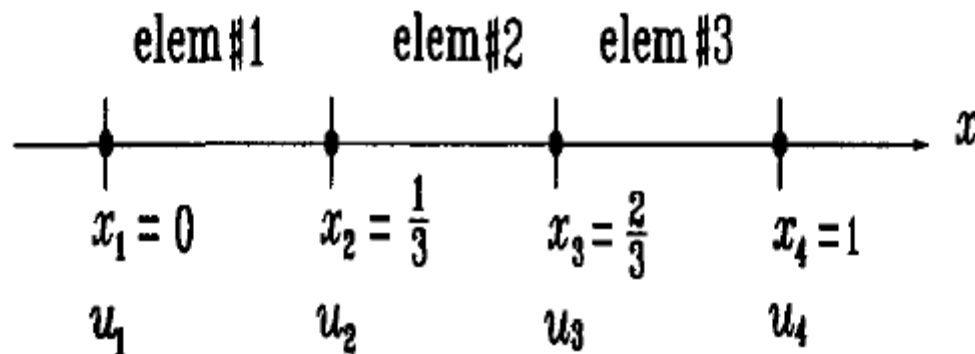
$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.944 & -3.111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Somando todas as contribuições (3 elementos)

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 - u'(0) \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 + u'(1) \end{Bmatrix} = 0$$





Vamos resolver o nosso exemplo!

Condição de Contorno de Dirichlet: $u_1=0$ e $u_4=0$

Condição de Neumann: $u'_1=?$ e $u'_4=?$

Vamos impor as condições:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$


Vamos resolver o nosso exemplo!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo $u_1=0$, $u_2=0.0448$, $u_3=0.0569$ e $u_4=0$

Vamos resolver o nosso exemplo!

$u_1=0$, $u_2=0.0448$, $u_3=0.0569$ e $u_4=0$. Lembrando que

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Elemento 1: $0 < x < 1/3$

$$u = H_1(x)u_1 + H_2(x)u_2 = 0.1344x. \ddagger$$

$$U=0 H_1 + 0.0448 H_2 = 0.0448*(x-0)/(1/3-0)=0.1344x$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

$u_1=0$, $u_2=0.0448$, $u_3=0.0569$ e $u_4=0$. Lembrando que

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Elemento 2: $1/3 < x < 2/3$

$$U = u_2 * H_1 + u_3 * H_2 =$$

$$= 0.0448 * (2/3 - x) / (1/3) + 0.0569 * (x - 1/3) / (1/3) = 0.0327 + 0.0363x$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

$u_1=0$, $u_2=0.0448$, $u_3=0.0569$ e $u_4=0$. Lembrando que

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Elemento 3: $2/3 < x < 1$

$$\begin{aligned} U &= u_3 * H_1 + u_4 * H_2 = \\ &= 0.0569 * (1-x) / (1/3) + 0 = 0.1707 - 0.1707x \end{aligned}$$

Vamos resolver o nosso exemplo!

Agora sabemos o valor de u para qualquer x :

$$0 < x < 1/3: \quad u = 0.0344x$$

$$1/3 < x < 2/3: \quad u = 0.0327 + 0.0363x$$

$$2/3 < x < 1: \quad u = 0.1707 - 0.1707x$$

Resolvemos o problema de maneira aproximada e sistemática!

Ex.

Considere a EDP

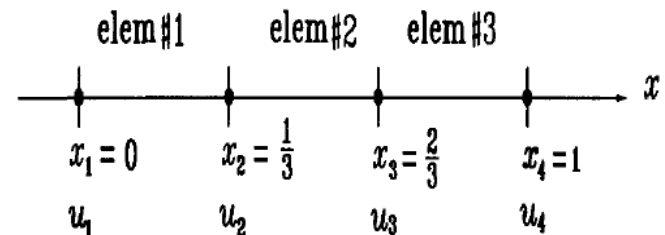
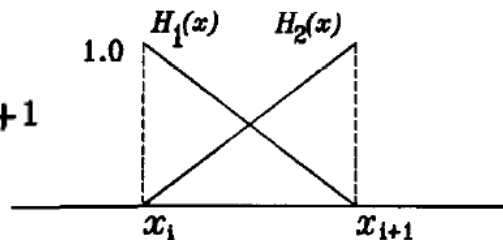
$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = f(x), \quad 0 < x < L$$
$$u(0) = 0 \quad \text{and} \quad u(L) = 0$$

Para resolvê-la utilizando o Método dos Elementos Finitos, vamos utilizar a formulação fraca onde u é a função que aproxima a solução da EDP e ω é o peso definido de acordo com a proposta de Galerkin ($\omega = \partial u \partial a$):

$$\int_0^L \left\{ -a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + bw \frac{du}{dx} + cwu \right\} dx = \int_0^L wf(x) dx - \left[aw \frac{du}{dx} \right]_0^L$$

Essa abordagem é bem resolvida quando utilizamos para a função que aproxima a solução uma *piecewise function*

$$u = H_1(x)u_i + H_2(x)u_{i+1}$$



Ex.

1	Ao definir o material do componente, ...	Você define quais são as <i>shape functions</i> H1 e H2 que serão utilizadas.
2	Ao definir o tipo de elemento da malha, ...	Você altera $\left[aw \frac{du}{dx}\right]_0^L$ na formulação fraca.
3	Ao resolver o seu problema pelo Métodos dos Elem. Finitos, ...	Você altera os coeficientes a,b e c da EDO.
4	Ao definir as condições de contorno, ...	Você resolve um sistema de equações algébricas ao invés de uma equação diferencial.
5	Ao definir quantos nós a sua malha terá e quais o graus de liberdade eles terão, ...	Você define o tamanho do sistema de equações algébricas que precisa ser resolvido.
6	Ao definir o carregamento, ...	Você altera $\int_0^L wf(x)dx$ da formulação fraca



EESC • USP

www.eesc.usp.br