EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

# Sistemas Elomecânicos

## Newton-Euler/Kirchhoff e Lagrange

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
3373-8650

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

# Objetivo

Modelar sistemas eletromecânicos com as teorias abordadas até então.

# Nessa aula ...

- Introdução/Objetivo
- Transdutores Eletro-Mecânicos
- Sistemas Eletro-Mecânicos
- Exemplos
    - Auto-falante eletromagnético
    - Dispositivo capacitivo
- Conclusões
- Próxima aula ...

# Introdução/Objetivo

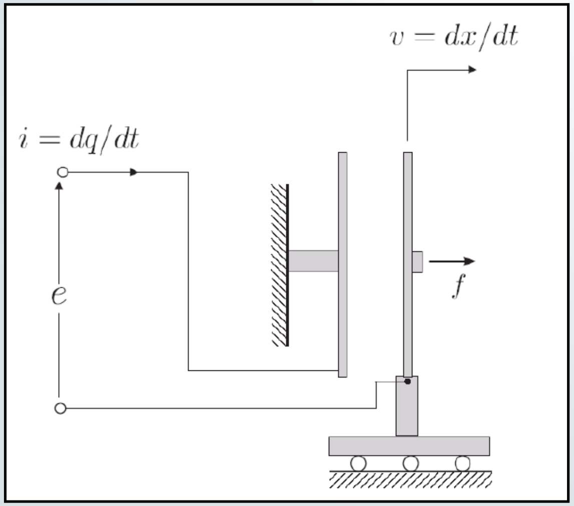
## Sistemas Eletro-Mecânicos

Sistema Mecânico

Transdutores eletromecânicos

Sistema Elétrico

Transdutores capacitivos




Microfones e acelerômetros capacitivos

Wii-mote

# Introdução/Objetivo

## Sistemas Eletro-Mecânicos

Sistema Mecânico

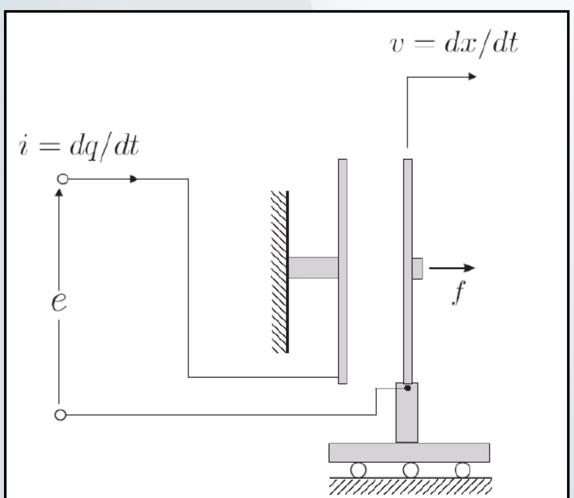
Transdutores eletromecânicos

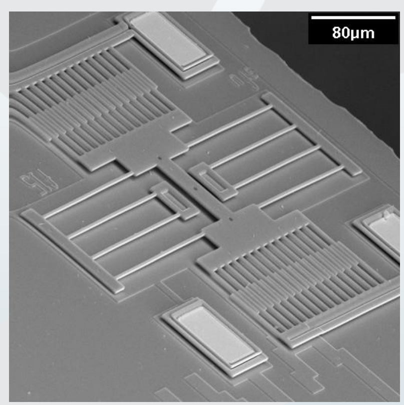
Sistema Elétrico

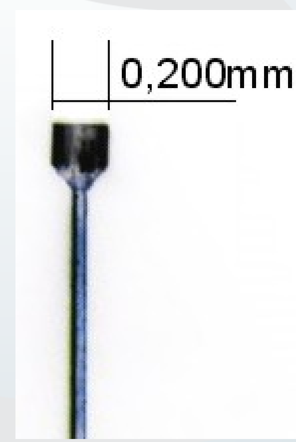
Transdutores capacitivos

Comb drive (sensor/atuador)

Sensores de pressão capacitivos (catéter)



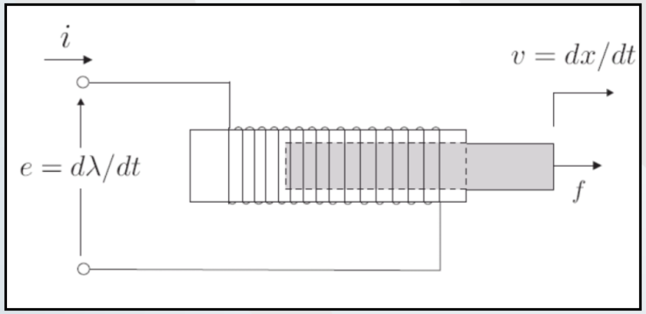



# Introdução/Objetivo

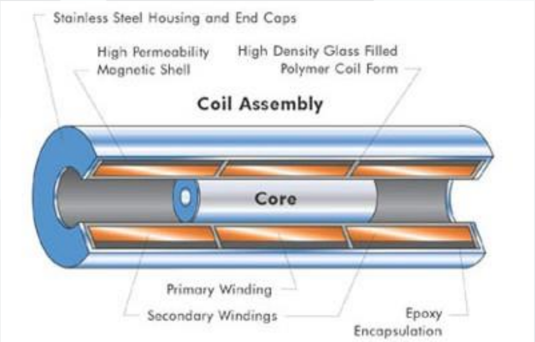
## Sistemas Eletro-Mecânicos

Sistema Mecânico ⟺ Transdutores eletromecânicos ⟺ Sistema Elétrico

Transdutores indutivos




LVDT (sensor de posição)

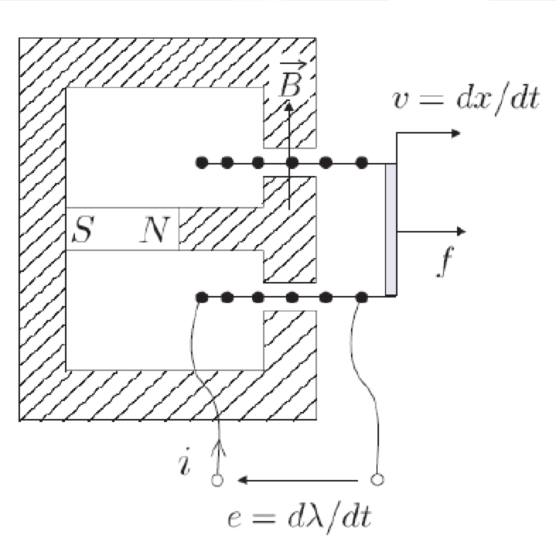


# Introdução/Objetivo

Sistemas Eletro-Mecânicos

Sistema Mecânico ⇐ **Transdutores eletromecânicos** ⇒ Sistema Elétrico

Bobina Móvel




Auto-falante

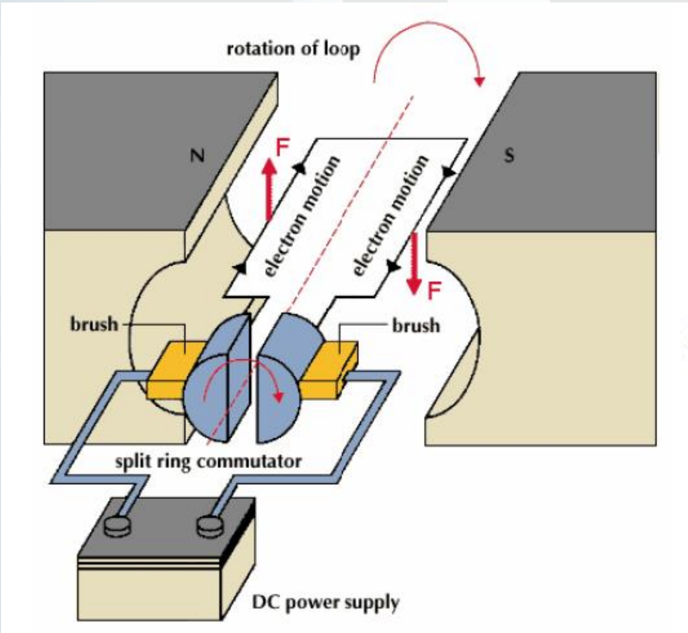
Excitador eletro-dinâmico

# Introdução/Objetivo

## Sistemas Eletro-Mecânicos

Sistema Mecânico ⟵ **Transdutores eletromecânicos** ⟶ Sistema Elétrico

Motores elétricos




Motores DC


Motores Lineares

# Introdução/Objetivo

O objetivo dessa aula é obter modelos de **sistemas eletro-mecânicos** usando parâmetros concentrados através de duas metodologias:

1. Utilizando a 2º Lei de Newton para modelar subsistemas mecânicos e as Leis de Kirchhoff para modelas subsistemas elétricos; e

2. Utilizando as Equações de Lagrange para modelar o sistema eletro-mecânico completo.

# Sistemas Mecânicos

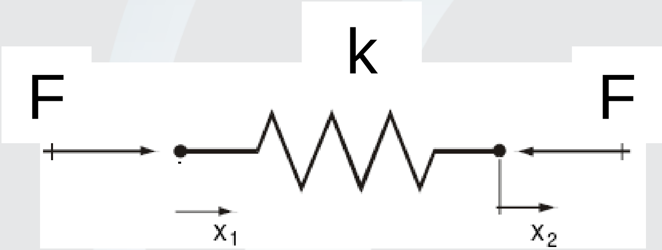
Três elementos básicos podem ser utilizados para modelar o movimento de corpos rígidos dinamicamente:

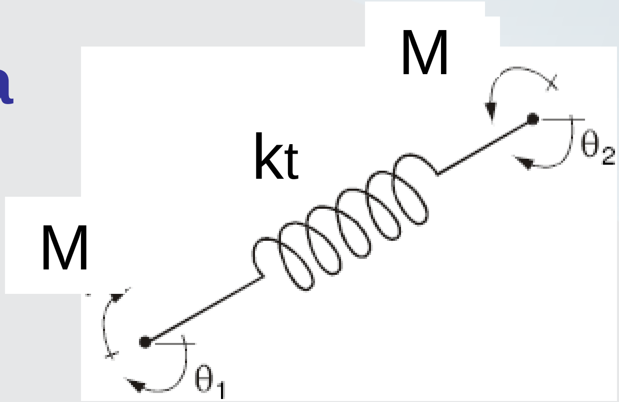
- o elemento **mola**
- o elemento **amortecedor**
- o elemento **inércia**

em suas versões translacionais e rotacionais.

# Sistemas Mecânicos

## Mola




$$F = k(x_1 - x_2) = kx$$

$$M = k_t(\theta_1 - \theta_2) = k_t\theta$$

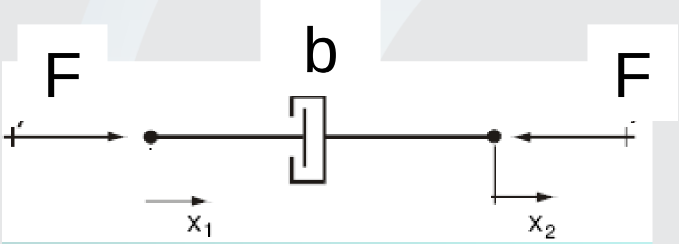
## Energia Potencial

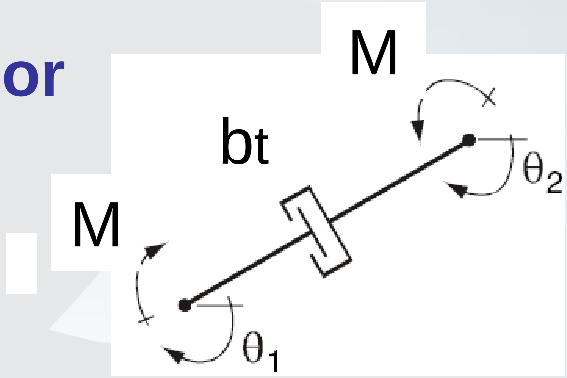
$$V = \frac{kx^2}{2}$$

$$V = \frac{k_t\theta^2}{2}$$

# Sistemas Mecânicos

## Amortecedor




$$F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = b\dot{x}$$

$$M = b_t(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = b_t\dot{\theta}$$

## Energia Dissipada

$$D = \frac{b\dot{x}^2}{2}$$

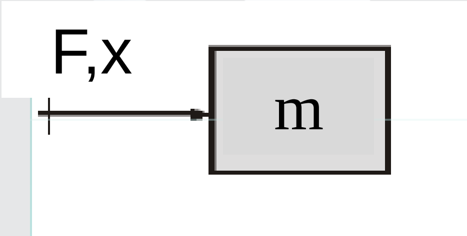
$$D = \frac{b_t\dot{\theta}^2}{2}$$

# Sistemas Mecânicos

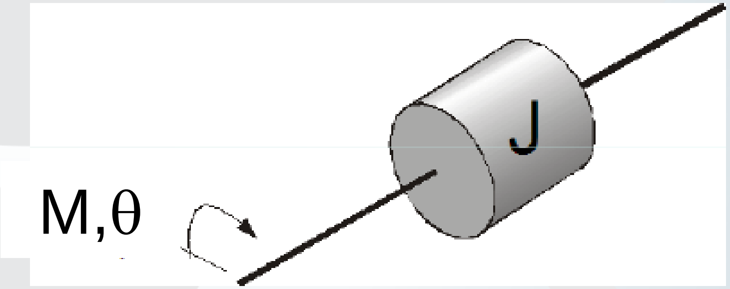
## Inércia (2D)

É a medida de resistência de um corpo ao movimento.

### Translação




### Rotação




### Energia Cinética

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$T = \frac{J\dot{\theta}^2}{2}$$

**3D**

$$T = \frac{\dot{\theta}^T J \dot{\theta}}{2}$$

# Leis da Física

Leis de Newton, Equações de Newton-Euler

Princípio do Impulso e da Quantidade de movimento

**2D**

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum M = J\ddot{\theta}$$

**3D**

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

$$\vec{H} = J\dot{\vec{\theta}}$$

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}}$$

## Leis da Física

### Equações de Lagrange

Princípio do Hamilton para um sistema de coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i$$

Coordenadas generalizadas: $x_i$

Lagrangiano: $L = T - V$

Força generalizadas: $Q_i$ $\delta W_{NC} = Q_i \delta x_i$

# Sistemas Elétricos

Três elementos básicos de sistemas elétricos podem ser utilizados para modelar o comportamento dinâmico de circuitos elétricos:

- o elemento **capacitor**
- o elemento **resistor**
- o elemento **indutor**

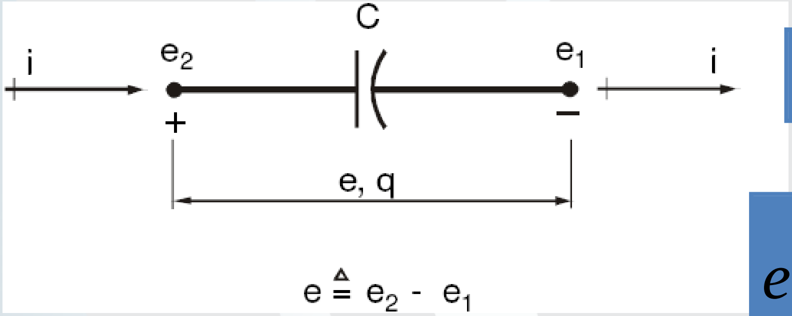
Os circuitos elétricos estão sujeitos a carga elétrica q e ao fluxo magnético $\lambda$, função da corrente i e da tensão e:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad e = \frac{d\lambda}{dt}$$

# Sistemas Elétricos

## Capacitor

Elemento composto por duas superfícies separadas por um material dielétrico.




$$q = Ce$$

$$e = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

q: Carga no capacitor (Coulombs)
e: tensão entre os terminais (Volts)
i : Corrente (Amperes)
C: Capacitância (Farads)

## Energia Elétrica

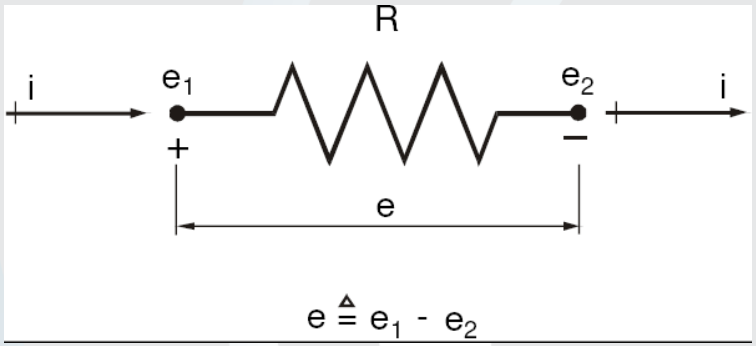
$$W_e(q) = \int_0^t ei\,dt = \int_0^q e\,dq = \frac{q^2}{2C}$$

## Co-Energia Elétrica

$$W_e^*(e) = eq - \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}Ce^2$$

# Sistemas Elétricos

## Resistor




$$e = Ri$$

e: Tensão (Volts)
i : Corrente (Amperes)
λ: Fluxo (Tesla)
R: Resistência (Ohms)

## Energia Dissipada (q)

$$D(q) = \frac{1}{2} R\dot{q}^2$$

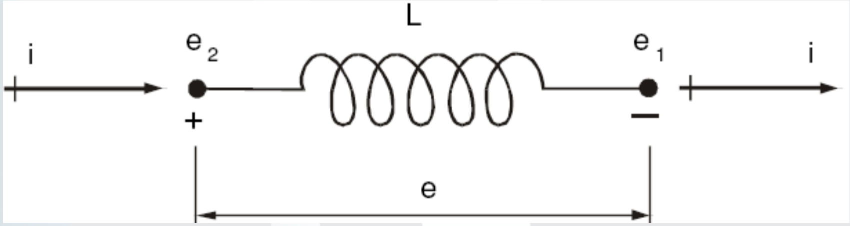
## Energia Dissipada (λ)

$$D(\lambda) = \frac{1}{2R}\dot{\lambda}^2$$

# Sistemas Elétricos

## Indutor

Ao passar por um indutor, a corrente elétrica gera um campo magnético.




$$\lambda = Li$$

$$e = L\frac{di}{dt}$$

λ: Fluxo magnético(Tesla)
e: Tensão (Volts)
i : Corrente (Amperes)
L: Indutância (Henrys)

## Energia Magnética

$$W_m(\lambda) = \int_0^t eidt = \int_0^\lambda id\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$$

## Co-Energia Magnética

$$W_m^*(i) = \lambda i - W_m(\lambda) = \frac{1}{2}Li^2$$

# Leis da Física

## Leis de Kirchhoff

**Lei das Correntes nos Nós**: A somatória das correntes que chegam em um nó de um circuito é igual à somatória das correntes que saem deste nó.

**Lei da Tensão nas Malhas**: A somatória das diferenças de potencial elétrico ao longo de uma malha percorrida num mesmo sentido é igual a zero.

# Sistemas Elétricos

## Equações de Lagrange
## Formulação de Carga

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=E_k$$

Lagrangiano: $$L(\dot{q}_k, q_k)=W_m{}^{*}(\dot{q}_k)-W_e(q_k), \quad i_k=\dot{q}_k$$

Trabalho dos componentes não-conservativos: $$\delta W_{NC}=E_k\delta q_k$$

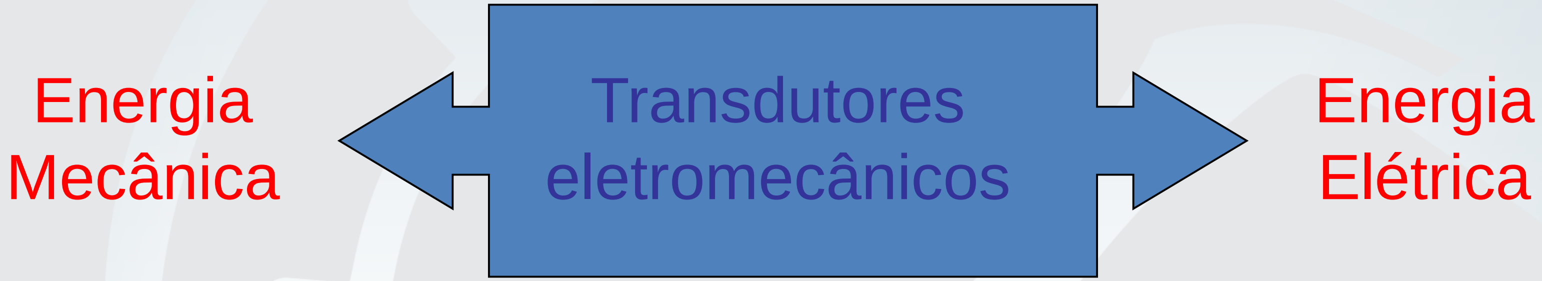
## Equações de Lagrange
## Formulação de Fluxo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{\lambda}_k}-\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}=I_k$$

Lagrangiano: $$L(\dot{\lambda}_k, \lambda_k)=W_e{}^{*}(\dot{\lambda}_k)-W_m(\lambda_k), \quad e_k=\dot{\lambda}_k$$

Trabalho dos componentes não-conservativos: $$\delta W_{NC}=I_k\delta\lambda_k$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos



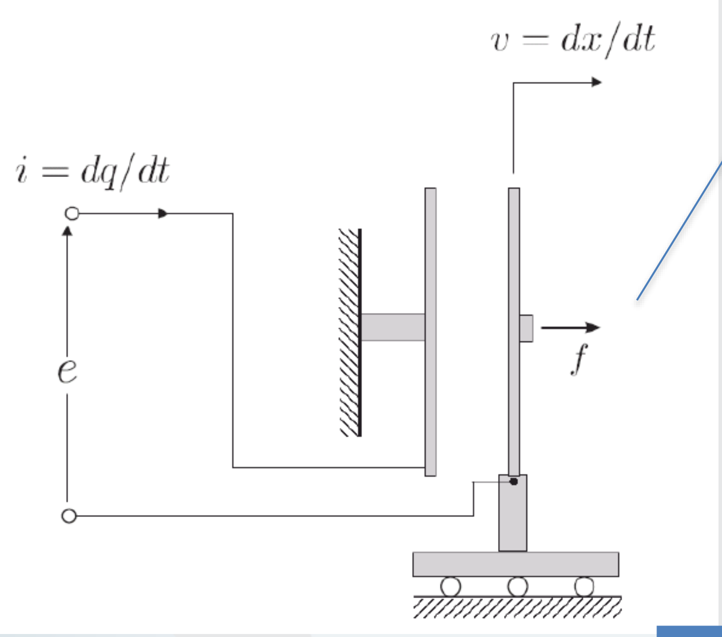

Existem dois tipos de transdutores:

1. Os que transferem e podem armazenar energia:
   i. Transdutor capacitivo: capacitor com placa móvel
   ii. Transdutor indutivo: indutor com núcleo móvel
2. Os que somente transferem energia
   i. Bobina móvel
   ii. Motor elétrico

# Transdutores Eletro-Mecânicos

## Capacitor com placa móvel

Armazena energia, transformando energia mecânica em elétrica




**Balanceia a força de atração eletrostática**

Comportamento do capacitor:

$$q = C(x)e$$

$$W_e(q) = \frac{q^2}{2C(x)}$$

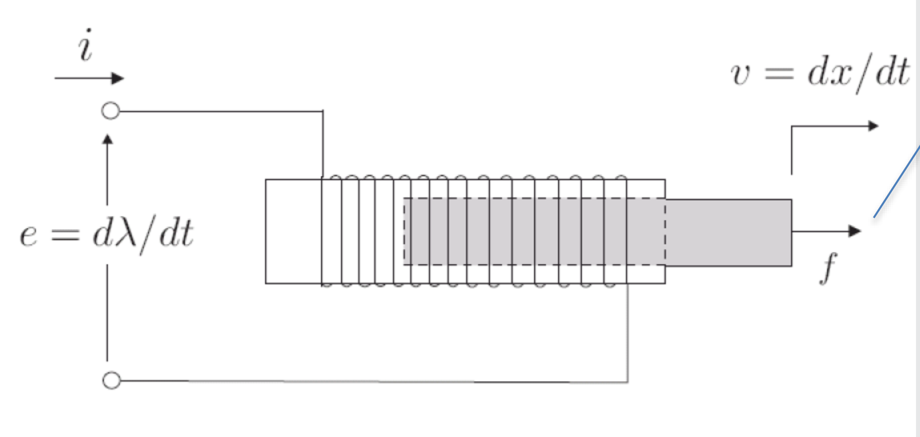
Por ser um sistema conservativo:

$$f = \frac{\partial W_e}{\partial x} = -\frac{q^2}{2C(x)^2} C'(x) = -\frac{e^2}{2} C'(x)$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos

## Indutor com núcleo móvel

Armazena energia, transformando energia mecânica em magnética




**Segura o núcleo em equilíbrio**

Comportamento do indutor:

$$\lambda = L(x)i$$

$$W_m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L}$$

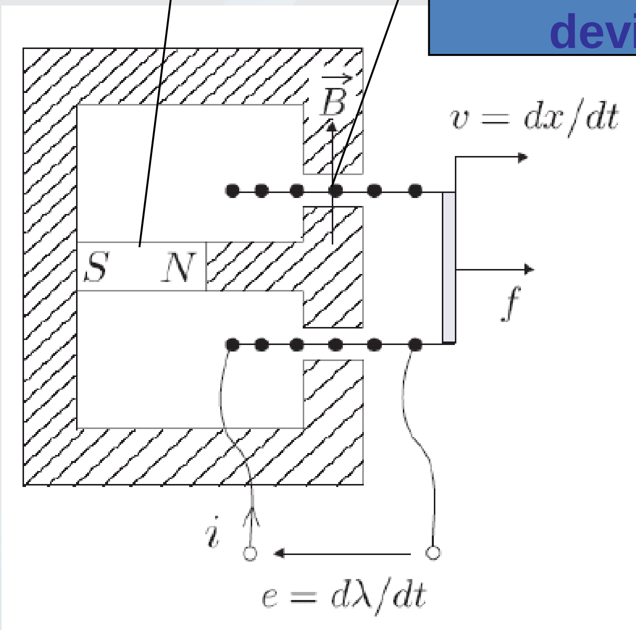
Por ser um sistema conservativo:

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\lambda^2}{2L(x)^2} L'(x) = -\frac{i^2}{2} L'(x)$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos

**Imã permanente**

**Fluxo magnético devido ao imã**




**<u>Bobina móvel</u>**

A **Lei de Lorentz** afirma que uma partícula de carga em movimento com velocidade v (entrando da lousa no desenho) em um campo magnético fica sujeita a força de Lorentz:

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Vamos investigar mais a Lei de Lorentz!

# Transdutores Eletro-Mecânicos

A **Lei de Lorentz** afirma que uma partícula de carga em movimento com velocidade v em um campo elétrico e/ou magnético fica sujeita a força de Lorentz:

$$\vec{f} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Força elétrica

Força magnética

$\vec{E}$ Campo Elétrico. Definição: Campos Elétricos são causados por partículas elétricas (Lei de Gauss) ou por campos magnéticos variantes (Lei de Lorentz).

# Eletromagnetismo

A Lei de Gauss é uma das 4 Equações de Maxwell. Ela relaciona o fluxo ($\Phi_E$) com a carga total atravessando uma superfície (Q). A relação entre essas quantidades é dada pela constante elétrica $\varepsilon_0$:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Essa lei pode ser descrita de maneira integral

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

fluxo elétrico

$\vec{E}$ Campo elétrico

Área

# Eletromagnetismo

A Lei de Gauss é uma das 4 Equações de Maxwell. Ela relaciona o fluxo ($\Phi_E$ ou $\lambda$) com a carga total atravessando uma superfície (Q). A relação entre essas quantidades é dada pela constante elétrica $\varepsilon_0$:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Essa lei pode ser descrita de maneira diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Densidade de carga (Coloumb/m$^3$)

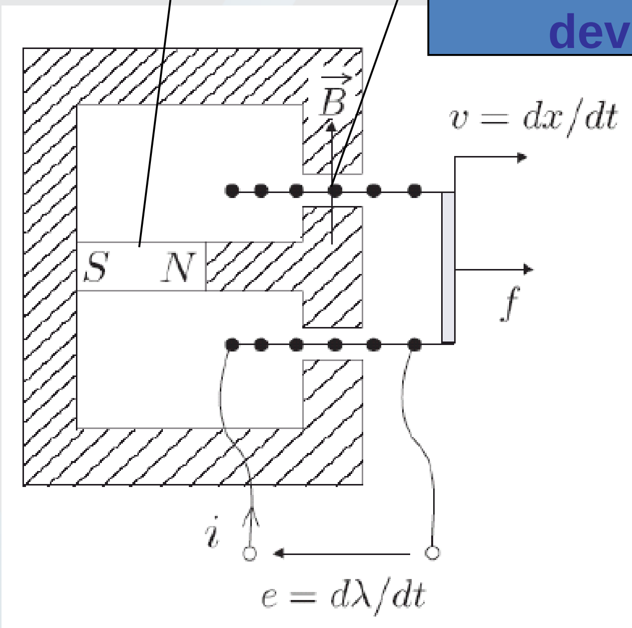
divergente

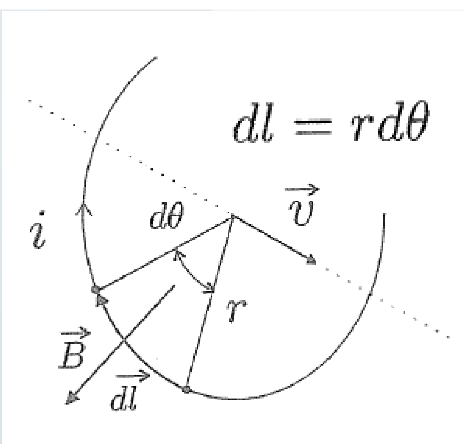
$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\epsilon}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos

Imã permanente

Fluxo magnético devido ao imã




## Bobina móvel

0

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Sabendo que: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$

Para um comprimento elementar:

$$\overrightarrow{df} = dq\left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}\right) = \mathrm{i}d\vec{l} \times \vec{B} = \mathrm{i\ dl\ B} = \mathrm{i\ rd}\theta\ B$$

Integrando sobre dθ, a força na bobina é

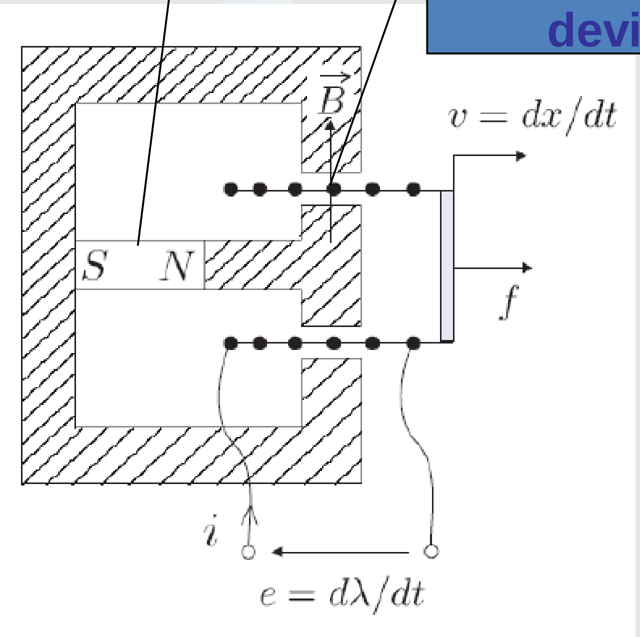
$$f = -i\ 2\pi nr\ B = -Ti$$

* Esse v é a velocidade da carga

# Transdutores Eletro-Mecânicos

**Imã permanente**

**Fluxo magnético devido ao imã**




**<u>Bobina móvel</u>**

A **Lei de Faraday** afirma que o incremento da tensão *de* em um comprimento elementar *dl* na direção da corrente induzida pelo movimento da bobina é:

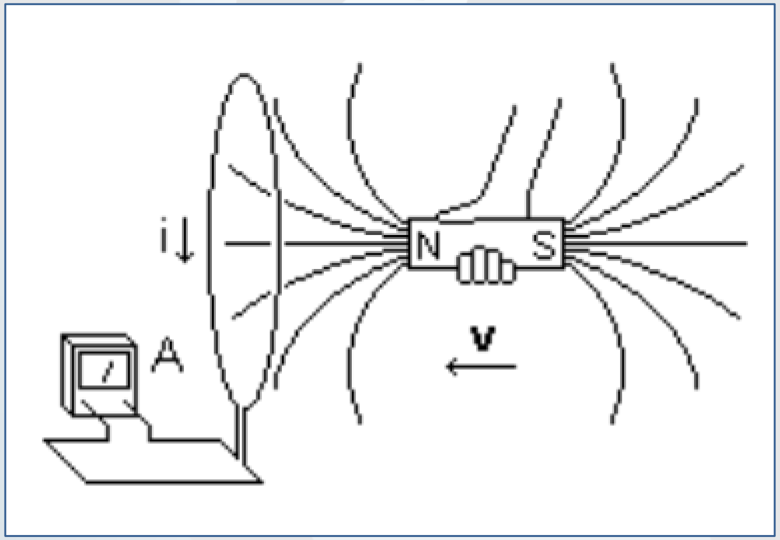
$$de = \vec{v} \times \vec{B}.\vec{dl}$$

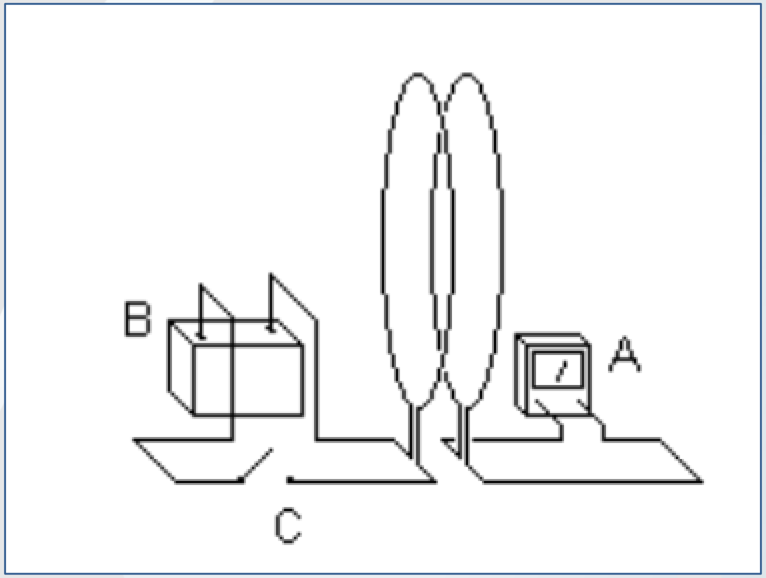
Vamos investigar mais a Lei de Faraday!

# Transdutores Eletro-Mecânicos

A **Lei de Faraday** afirma que se o fluxo do campo magnético através da superfície limitada por um circuito varia com o tempo, aparece nesse circuito uma força eletromotriz (fem) induzida - *e*.

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$




http://coral.ufsm.br/gef/Eletro/eletro18.pdf

# Transdutores Eletro-Mecânicos

A **Lei de Faraday** afirma que se o fluxo do campo magnético através da superfície limitada por um circuito varia com o tempo, aparece nesse circuito uma força eletromotriz (fem) induzida - *e*.

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$d\lambda = dAREA\ B = dx\ l\ B$$

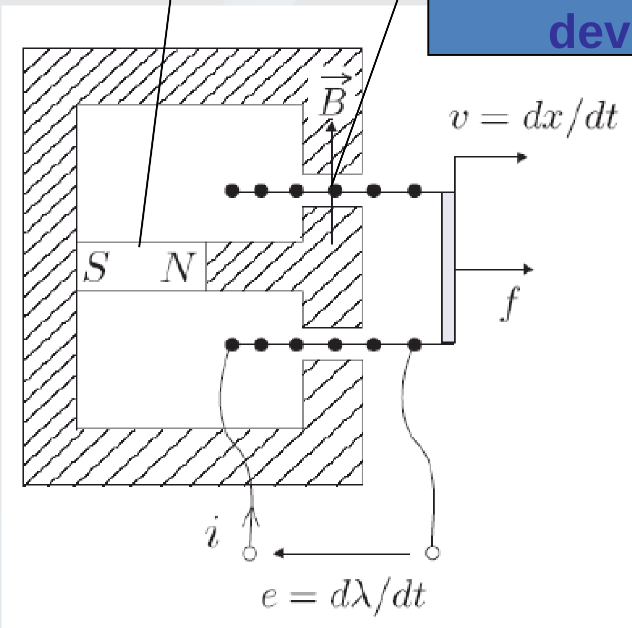
$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx}{dt}\ l\ B = \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B}\right).\vec{l}$$

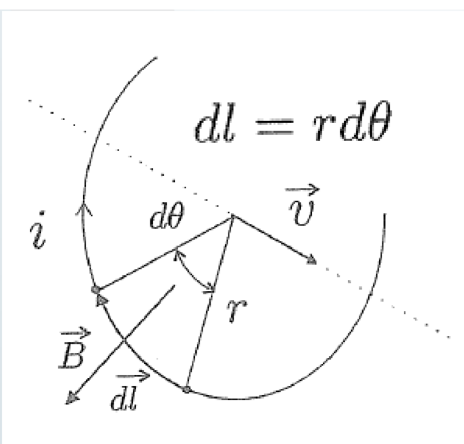
$$\boxed{de = \vec{v} \times \vec{B}.\vec{dl}}$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos

Imã permanente

Fluxo magnético devido ao imã




## Bobina móvel

A **Lei de Faraday** afirma que o incremento da tensão *de* em um comprimento elementar *dl* na direção da corrente induzida pelo movimento da bobina é:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx}{dt}\, l\, B = \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B}\right).\vec{l}$$

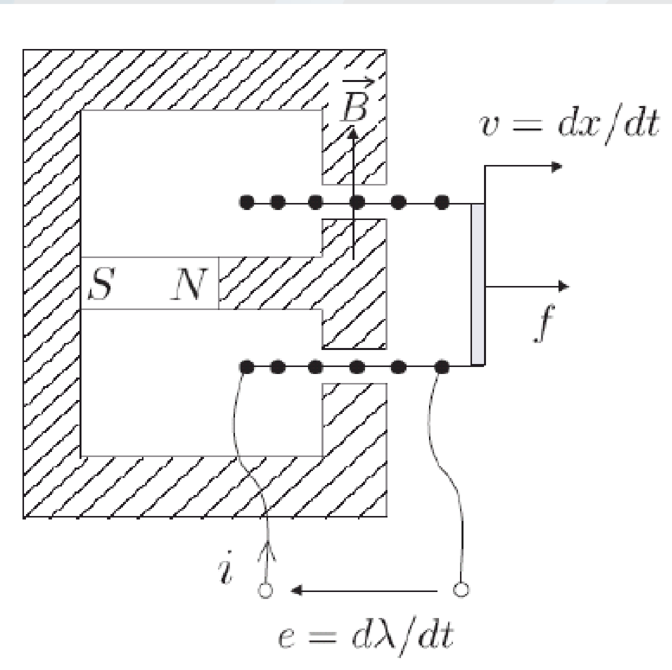
$$de = (\vec{v} \times \vec{B}).\overrightarrow{dl} = v\, B\, r\, d\theta$$

Integrando sobre dθ, a queda de tensão na bobina é

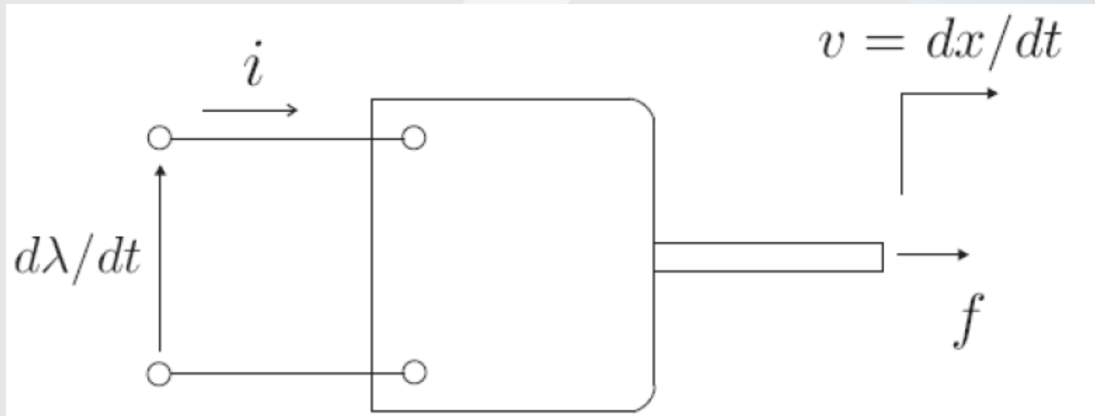
$$e = 2\pi n r\, B\, v = T\, v$$

# Transdutores Eletro-Mecânicos

## Bobina móvel




Representação simbólica




$$\boxed{\begin{aligned} e &= Tv \\ -Ti &= f \end{aligned}}$$

(Faraday)
(Lorentz)

Unidade de T: V.s/m ou N/A

$$\boxed{T = 2\pi n r}$$

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## MODELAGEM DE SISTEMAS ELETRO-MECÂNICOS

Sistema Mecânico

Transdutores eletromecânicos

Sistema Elétrico

2º Lei de Newton, Equações de Newton-Euler

Equações de Lagrange

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## MODELAGEM DE SISTEMAS ELETRO-MECÂNICOS

Sistema Mecânico

Transdutores eletromecânicos

Sistema Elétrico

Leis de Kirchhoff (para circuitos elétricos)

Equações de Lagrange (para sistemas elétricos)

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## MODELAGEM DE SISTEMAS ELETRO-MECÂNICOS

Sistema Mecânico

Transdutores eletromecânicos

Sistema Elétrico

Equações de Maxwell (Lei de Ámpere, as Leis de Guauss e a Lei de Faraday)

Lei de Lorentz

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## MODELAGEM DE SISTEMAS ELETRO-MECÂNICOS

Sistema Mecânico ⟷ Transdutores eletromecânicos ⟷ Sistema Elétrico

Equações de Maxwell (Lei de Ámpere, as Leis de Guauss e a Lei de Faraday)

Lei de Lorentz

Equações de Lagrange para sistemas eletro-mecânicos

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## EQUAÇÕES DE LAGRANGE, FORMULAÇÃO DE CARGA

Lagrangiano

$$L(\dot{x}_i, x_i, \dot{q}_k, q_k) = T + W_m^{*} - V - W_e$$

Trabalho Virtual dos componentes não conservativos

$$\delta W_{NC} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta x_i + \sum_{k=1}^{n} E_k \delta q_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k \qquad k = 1 \ldots n$$

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## EQUAÇÕES DE LAGRANGE, FORMULAÇÃO DE FLUXO

Lagrangiano $$L\left(\dot{x}_i, x_i, \dot{\lambda}_k, \lambda_k\right) = T + W_e^* - V - W_m$$

Trabalho Virtual dos componentes não conservativos $$\delta W_{NC} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta x_i + \sum_{k=1}^{n} I_k \delta \lambda_k$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1 \ldots m}$$

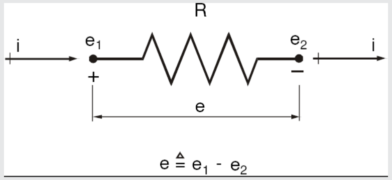
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\lambda}_k} - \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = I_k \qquad k = 1 \ldots n}$$

# Sistemas Eletro-Mecânicos

## EQUAÇÕES DE LAGRANGE, ELEMENTOS DISSIPATIVOS

### Formulação de fluxo

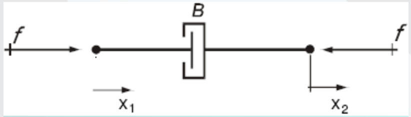
$$D(\lambda) = \frac{1}{2R}\dot{\lambda}^2$$



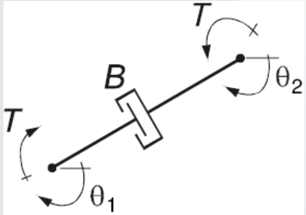

### Formulação de carga

$$D(q) = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

### Parte Mecânica



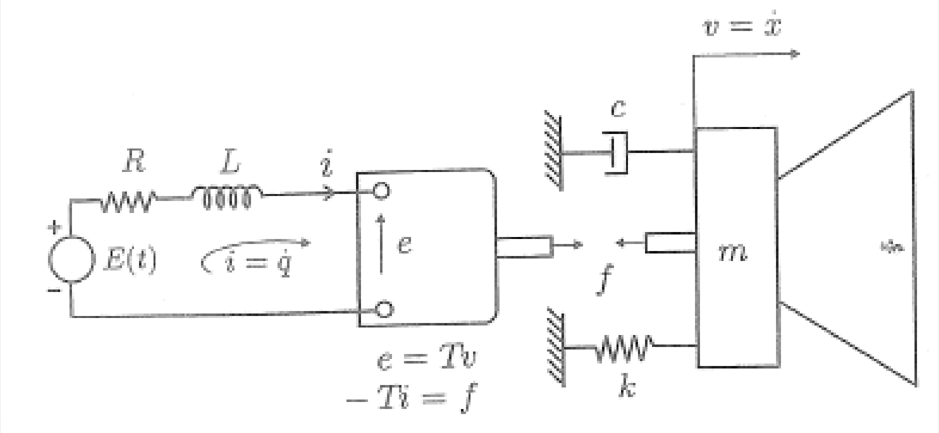

$$D = \frac{b\dot{x}^2}{2}$$




$$D = \frac{b_t\dot{\theta}^2}{2}$$

# Exemplos

## Alto-falante Eletromagnético




**Equações de Lagrange, Formulação de carga**

$$L(\dot{x}, x, \dot{q}, q) = T + W_m^{\;*} - V - W_e$$

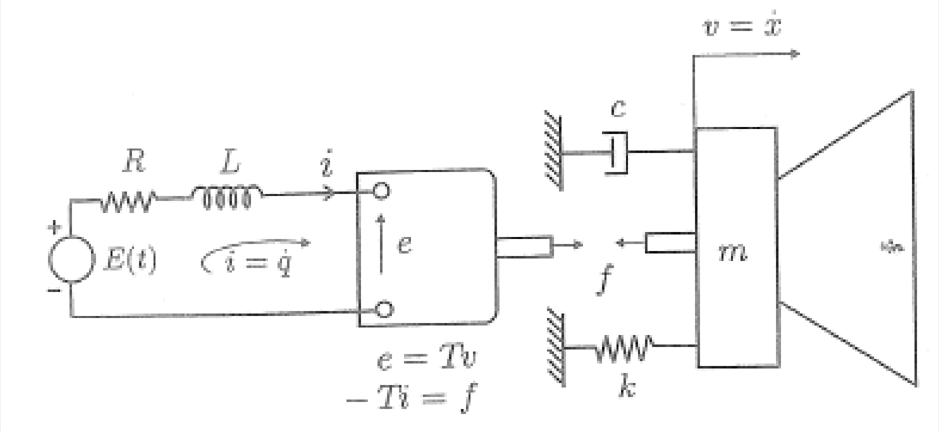
**Energia cinética:** $$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

**Energia potencial:** $$V = \frac{1}{2} kx^2$$

**Energia elétrica:** $$W_e = 0$$

# Exemplos

## Alto-falante Eletromagnético




**Equações de Lagrange, Formulação de carga**

$$L(\dot{x}, x, \dot{q}, q) = T + W_m^{\ *} - V - W_e$$

**Energia magnética:**

$$W_m^{\ *} = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + W_m^{\ *}{}_{transdutor}$$

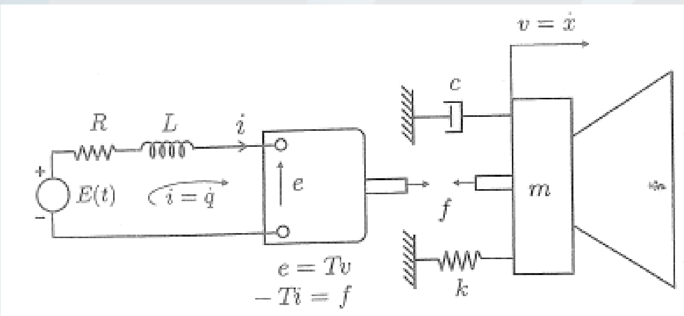
**Energia magnética do transdutor:**

$$W_m^{\ *}{}_{transdutor} = \int_0^t eidt = \int_0^t Tvidt = Ti(x - x_0)$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + Ti(x - x_0) - \frac{1}{2}kx^2}$$

# Exemplos

## Alto-falante Eletromagnético




**Equações de Lagrange, Formulação de carga**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k \qquad k = 1 \ldots n$$

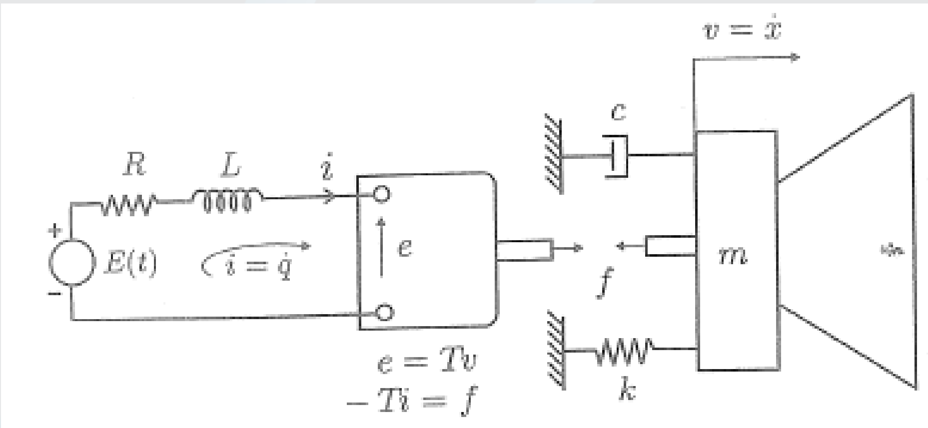
**Trabalho dos componentes não-conservativos:** $\delta W_{NC} = E\delta q$

**Energia dissipada:** $D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2$

**Lagrangiano:** $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + Ti(x - x_0) - \frac{1}{2}kx^2$

# Exemplos

## Alto-falante Eletromagnético




Equações de Lagrange, Formulação de carga

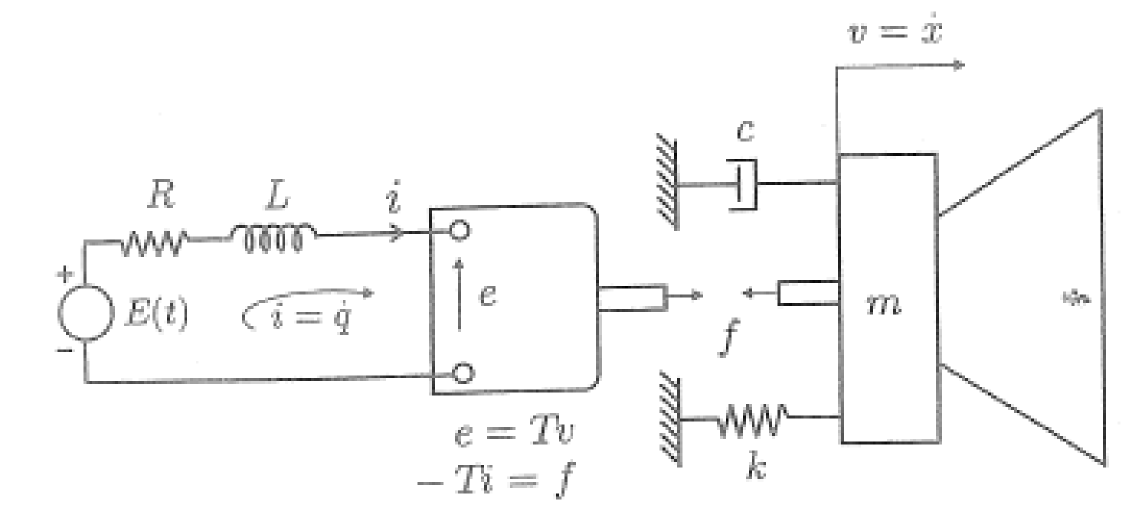
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=E
\end{aligned}\right\}$$

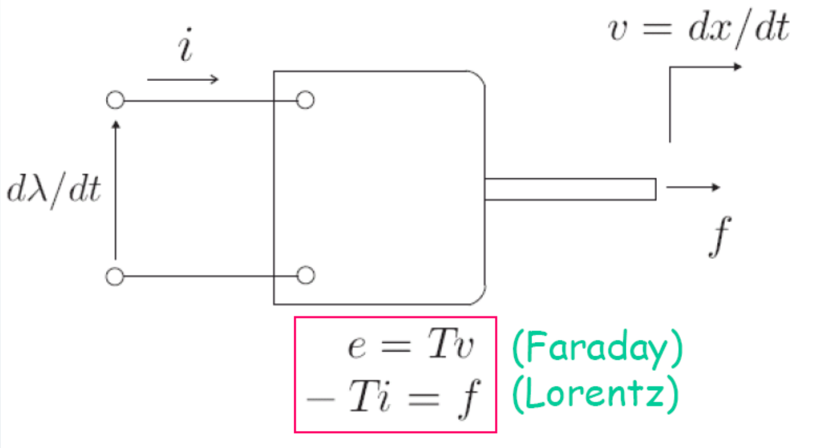
$$\boxed{\begin{aligned}
&m\ddot{x}+c\dot{x}+kx-T\dot{q}=0\\
&T\dot{x}+L\ddot{q}+R\dot{q}=E(t)
\end{aligned}}$$

# Exemplos

Vamos fazer por Newton?

## Alto-falante Eletromagnético

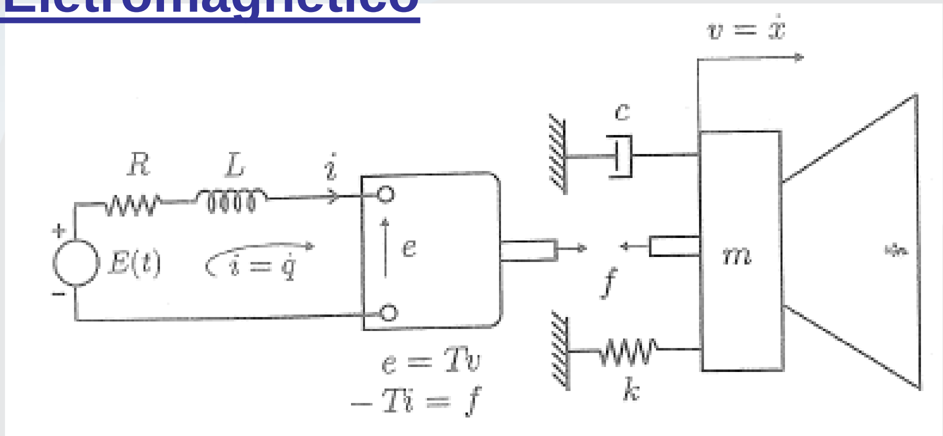


# Exemplos

Vamos fazer por Newton?

## Alto-falante Eletromagnético




**Lei de Faraday (transdutor bobina móvel)**

**Lei de Lorentz (transdutor bobina móvel)**

**2º Lei de Newton (massa m)**

**Lei da Tensão das Malhas no Circuito**

EESC • USP

www.eesc.usp.br