

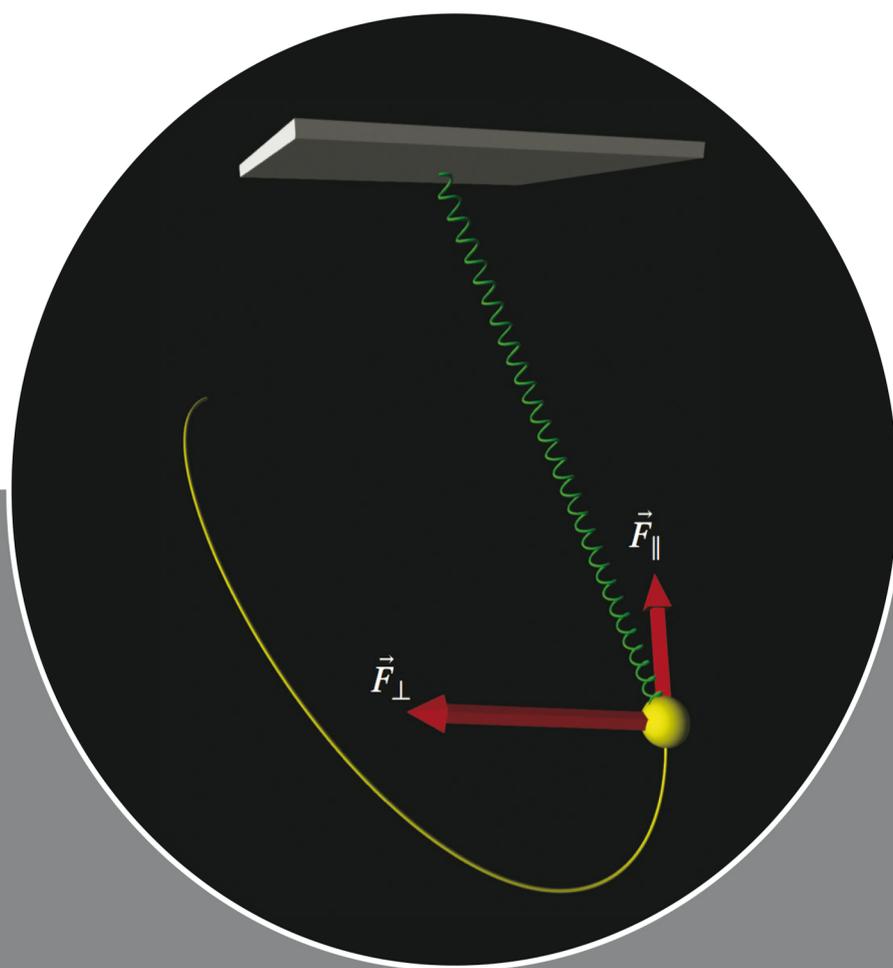
MATERIAL SUPLEMENTAR PARA ACOMPANHAR

FÍSICA BÁSICA

MATÉRIA E INTERAÇÕES

INTERAÇÕES ELÉTRICAS E MAGNÉTICAS

CHABAY • SHERWOOD



QUARTA EDIÇÃO

VOLUME DOIS

50 ANOS
LTC



GRÁTIS
videoaulas exclusivas!

Ondas

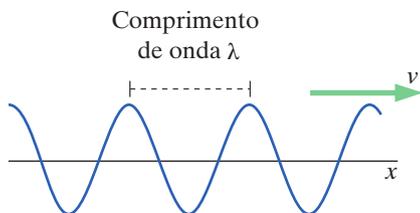
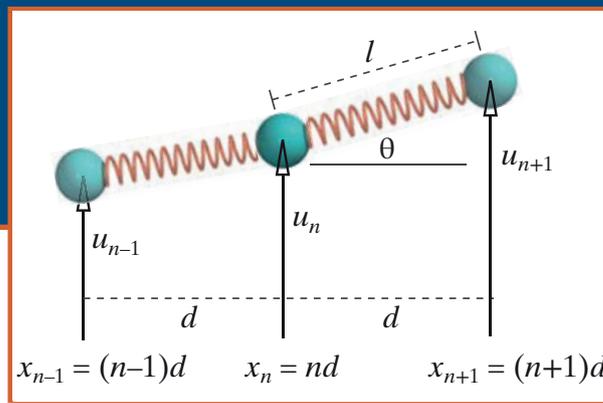


Figura S3.1 Uma onda senoidal que se propaga a uma velocidade v ; o comprimento de onda λ é a distância entre as cristas da onda.

$t = 0$ $(2\pi t/T) = 0$	$\uparrow E = E_{\text{máx}}$
$t = T/8$ $(2\pi t/T) = \pi/4$	$\uparrow E = 0,7E_{\text{máx}}$
$t = T/4$ $(2\pi t/T) = \pi/2$	$E = 0$
$t = 3T/8$ $(2\pi t/T) = 3\pi/4$	$\downarrow E = 0,7E_{\text{máx}}$
$t = T/2$ $(2\pi t/T) = \pi$	$\downarrow E = E_{\text{máx}}$
	\vdots
	\vdots
$t = T$ $(2\pi t/T) = 2\pi$	$\uparrow E = E_{\text{máx}}$

Figura S3.2 Fotografias do campo elétrico em uma posição particular, tomadas em instantes sucessivos.

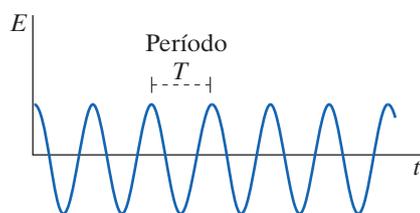


Figura S3.3 Gráfico de E_y em função do tempo t , como observado em uma posição particular.

OBJETIVOS

Após estudar este suplemento, você deve ser capaz de

- Determinar as posições de máximos e mínimos em padrões de interferência de duas ou mais fontes de luz.
- Calcular as propriedades de ondas mecânicas longitudinais e transversais.
- Determinar os padrões de “ondas estacionárias”.
- Fazer conexões entre os modelos corpuscular e ondulatório da luz.

S3.1 FENÔMENOS ONDULATÓRIOS

Em uma onda, a energia propaga-se de um ponto a outro sem transferência de matéria. Agite a extremidade de uma corda tensionada e um pulso correrá ao longo da corda, mas os átomos na corda irão mover-se apenas perpendicularmente (uma onda transversal), e não de uma extremidade à outra da corda. Golpeie uma extremidade de uma barra de alumínio, e um pulso sonoro irá propagar-se até a outra extremidade da barra sem que os átomos de alumínio se movam de uma extremidade à outra da barra (uma onda longitudinal). Bata palmas, e o ouvido da sua amiga será afetado pelo som que se propaga através do ar, mas suas mãos e o ar circundante permanecerão com você (a propagação do som no ar também é uma onda longitudinal). Uma onda eletromagnética pode transferir energia e momento para uma partícula carregada. A refração da luz ao passar de um meio a outro pode ser explicada considerando a luz como uma onda eletromagnética.

Na primeira parte deste suplemento, examinaremos outros fenômenos que podem ser explicados por um modelo ondulatório da luz, incluindo a interferência e a difração da radiação eletromagnética, bem como a reflexão e o espalhamento da luz. Em seguida, investigaremos ondas mecânicas, tais como ondas em uma corda. Finalmente, discutiremos a relação entre o modelo ondulatório da luz e o modelo de partículas (fótons) apresentado no volume 1.

Variação no tempo

Permanecendo em uma certa posição enquanto uma onda eletromagnética senoidal ou cossenoidal passa (Figura S3.1), você observa o campo elétrico variar no tempo segundo $E \cos(2\pi t/T)$. A quantidade dependente do tempo $(2\pi t/T)$ é chamada de *fase* da função cosseno. A fase $(2\pi t/T)$ aumenta de 2π rad (360°) sempre que t aumenta de uma quantidade T . A Figura S3.2 mostra, como uma série de fotografias instantâneas, o que você observaria em vários instantes, em uma posição do espaço, enquanto a Figura S3.3 mostra as mesmas observações como um gráfico de E_y versus t .

Obviamente também há um campo magnético que varia no tempo de forma cossenoidal e é perpendicular ao campo elétrico. Vamos nos concentrar aqui no campo elétrico da radiação eletromagnética, uma vez que ele tem um efeito muito maior sobre a matéria que o campo magnético.

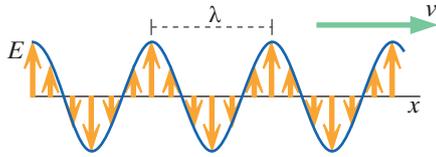


Figura S3.4 Campo elétrico variando com a posição em um instante particular.

Varição no espaço

Por outro lado, se você tirar uma fotografia em um instante particular, verá um padrão senoidal ou cossenooidal de campo elétrico variando no espaço, como mostrado na Figura S3.4.

Esse padrão no espaço pode ser expresso como $E \cos(2\pi x/\lambda)$, já que a fase total do cosseno, $(2\pi x/\lambda)$, aumenta de 2π rad (360°) sempre que x aumenta de uma quantidade λ . Perceba que se substituirmos x por t e λ por T esse gráfico poderia da mesma forma representar a variação temporal do campo elétrico em uma localização particular no espaço.

Tempo e espaço

Uma onda cossenooidal que se move para a direita pode ser descrita em termos de x e t da seguinte forma:

$$E \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Essa expressão captura os aspectos tanto temporais quanto espaciais, pois quando t aumenta é preciso um x maior (um movimento para a direita) para produzir a mesma fase $(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$ correspondente a uma crista particular da onda.

QUESTÃO Em que sentido viaja uma onda que é representada pela expressão $E \cos(2\pi t/T + 2\pi x/\lambda)$? (Repere no sinal +.)

Nesse caso, um t maior requer um x menor para produzir a mesma fase total, logo a expressão representa uma onda movendo-se para a esquerda.

Deslocamento de fase

Dependendo de como definimos $t = 0$ ou $x = 0$, uma onda pode não ser descrita exatamente na forma $E \cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$, já que ela pode não começar no seu valor máximo. Para levar isso em conta, podemos adicionar um “deslocamento” de fase constante φ e escrever $E \cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda + \varphi)$. O deslocamento de fase φ pode ter qualquer valor entre 0 e 2π rad (360°). Quando o deslocamento de fase entre duas ondas é 0 , dizemos que as ondas estão *em fase*. Quando o deslocamento de fase é não nulo, descrevemos as ondas como *fora de fase*.

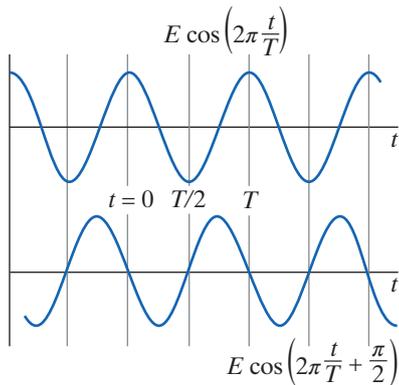


Figura S3.5 Um deslocamento de fase afeta o instante no qual o máximo ocorre. A curva de baixo difere da curva de cima por um deslocamento de fase de $\pi/2$.

Ponto de verificação 1 Considere dois exemplos de ondas cossenooidais no tempo, na posição $x = 0$ (Figura S3.5). Estude as duas curvas, e certifique-se de entender a relação entre elas.

Rotule o eixo das abscissas em unidades de meio período ($t = T/2, 2T/2, 3T/2$ etc.). Em seguida, esboce um gráfico de $E \cos(2\pi t/T + \pi)$ para certificar-se de compreender o que um deslocamento de fase significa. Sua curva pode ser considerada tanto como um deslocamento de fase de π radianos ou como o negativo da curva original. Ambos os pontos de vista são úteis.

Frequência angular

Durante a maior parte de nosso estudo de interferência, precisamos apenas da variação temporal de uma onda em uma posição particular, e nesse caso uma onda cossenooidal pode ser representada por qualquer das seguintes formas equivalentes:

$$\begin{array}{ll} E \cos(2\pi t/T + \varphi) & \text{forma básica} \\ E \cos(2\pi f t + \varphi) & \text{já que } f = 1/T \\ E \cos(\omega t + \varphi) & \text{em que } \omega = 2\pi f = 2\pi/T \end{array}$$

A frequência angular ω (conhecida do nosso estudo de órbitas e vibrações na mecânica clássica) é medida em radianos por segundo (2π rad/ T s). Em virtude da sua forma compacta, escreveremos normalmente $E \cos(\omega t + \varphi)$.

Intensidade

A frequência das ondas eletromagnéticas no intervalo visível é tão alta que não percebemos os máximos e mínimos individuais. Em vez disso, percebemos um tipo de média temporal. Essa média temporal é chamada de “intensidade”, e é o que podemos mais facilmente perceber e medir para qualquer tipo de onda.

No Capítulo 23, vimos que o fluxo de energia carregado pela radiação eletromagnética é proporcional ao quadrado do campo elétrico. Em um certo instante, o campo elétrico é $E \cos(\omega t)$ e o fluxo de energia instantâneo é proporcional a $[E \cos(\omega t)]^2$. Portanto, a média temporal do fluxo de energia é proporcional ao quadrado da amplitude (E^2).

Chamamos o fluxo de energia médio de intensidade, I , medida em watts por metro quadrado (W/m^2 ; veja as Figuras S3.6 e S3.7). Embora o campo elétrico em uma posição particular varie de forma senoidal, e o campo seja zero duas vezes a cada ciclo, em muitos casos de interesse a oscilação é tão rápida que percebemos apenas um fluxo de energia médio. Por exemplo, um ciclo da luz visível demora apenas cerca de 1×10^{-15} s e seu olho não pode detectar a variação senoidal dessas oscilações de tão alta frequência.

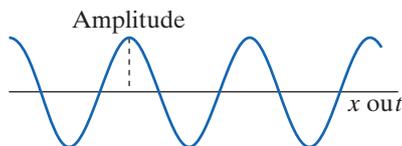


Figura S3.6 A amplitude é o máximo valor absoluto do campo elétrico em uma onda eletromagnética.

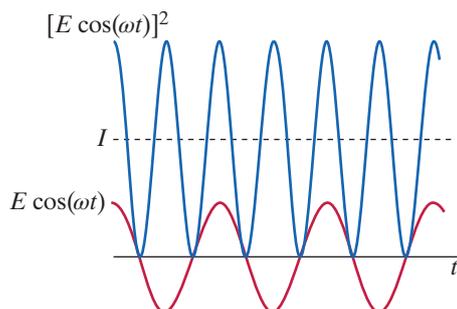


Figura S3.7 A média temporal do fluxo de energia é chamada de intensidade I .

INTENSIDADE E AMPLITUDE

A intensidade I (W/m^2) é proporcional à (amplitude)².

$$I \propto E^2 \text{ para a radiação eletromagnética.}$$

A intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude não apenas para radiação eletromagnética senoidal, mas também para outros tipos de ondas senoidais, como ondas na água e ondas sonoras. No caso da luz visível, a intensidade é obviamente também chamada de “brilho”. Para ondas sonoras, a intensidade corresponde ao volume do som. É a intensidade I , a média temporal do fluxo de energia, que geralmente medimos.

Ponto de verificação 2 Se o máximo campo elétrico em uma onda eletromagnética senoidal for triplicado, por qual fator a intensidade muda?

Interferência de duas ondas eletromagnéticas

De acordo com o princípio da superposição, o campo elétrico resultante em uma posição do espaço é simplesmente a soma vetorial dos campos elétricos produzidos por *todas* as fontes de campo elétrico. Esse princípio ainda é válido mesmo se os campos elétricos variam no tempo, logo podemos aplicar o princípio da superposição à radiação eletromagnética produzida por várias fontes diferentes.

No Capítulo 23, vimos que uma antena de rádio excitada por uma voltagem alternada senoidal (CA) produz campos elétricos e magnéticos propagantes cujas magnitudes também variam de forma senoidal. Começamos nosso estudo de múltiplas fontes de radiação considerando o caso simples de apenas duas fontes que emitem radiação senoidal. Muitas situações envolvem um grande número de fontes, como quando a luz atinge um espelho, mas uma análise cuidadosa do caso de apenas duas fontes revela muito claramente os principais aspectos dos fenômenos.

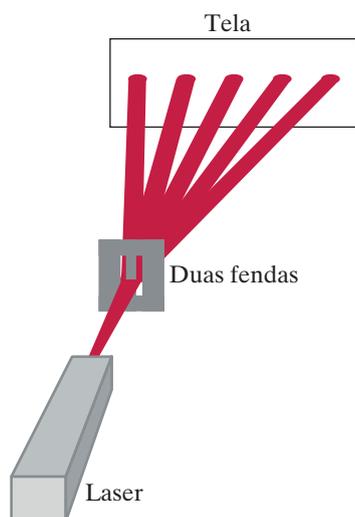


Figura S3.8 Luz laser ilumina duas fendas estreitas e produz um padrão de interferência sobre uma tela.

Padrão de interferência

Quando um laser ilumina duas fendas verticais estreitas em uma lâmina de metal, um padrão de múltiplas manchas luminosas pode ser observado sobre uma tela distante (Figura S3.8). Além disso, o brilho das manchas diminui à medida que a distância ao centro do padrão aumenta (essa variação no brilho não é mostrada na Figura S3.8).

QUESTÃO Um modelo corpuscular da luz prevê esse padrão?

Não. Um modelo corpuscular simples da luz prevê que veremos apenas duas manchas brilhantes, uma em frente de cada fenda. Entretanto, um modelo ondulatório da radiação eletromagnética permite que expliquemos tanto o número de manchas brilhantes quanto seu brilho relativo. Além disso, permite que façamos previsões quantitativas das posições das manchas claras e escuras sobre a tela, apenas aplicando o princípio da superposição.

Radiação monocromática coerente

Os lasers emitem luz com propriedades bastante especiais. A radiação eletromagnética em um feixe de laser é *coerente* (a fase das oscilações é a mesma) e *monocromática* (toda a radiação emitida tem o mesmo comprimento de onda). Como um laser produz luz coerente e monocromática, é uma boa fonte para utilização em experimentos com luz. Por outro lado, a luz de uma lâmpada incandescente comum é uma mistura de radiações de muitos comprimentos de onda, e não é coerente (os campos elétricos não oscilam em fase).

Podemos pensar nas duas fendas como duas fontes separadas de radiação eletromagnética, produzindo duas ondas eletromagnéticas que são coerentes e monocromáticas. Uma dedução no final deste suplemento mostra que para a região entre as fendas e a tela podemos tratar o fenômeno de interferência de dupla fenda como se as duas fendas fossem fontes de luz em fase.

Interferência construtiva

Considere duas antenas de rádio paralelas, próximas entre si, ambas excitadas pelo mesmo transmissor e emitindo ondas cossenoidais de campos elétricos da forma $E \cos(\omega t)$, com a mesma amplitude E e a mesma frequência angular ω (em que $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$). Por clareza, o campo magnético associado não é mostrado na Figura S3.9, nem mostramos o decaimento $1/r$ do campo elétrico radiativo. Como as ondas eletromagnéticas emitidas têm uma única frequência, elas são monocromáticas. Como a fase das ondas emitidas pelas duas fontes é a mesma, elas também são coerentes.

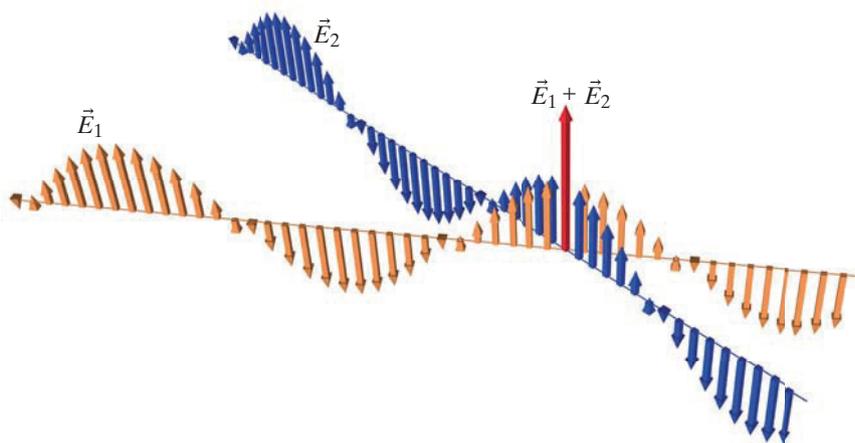


Figura S3.9 O campo elétrico irradiado por duas antenas de rádio. Na posição particular mostrada, os dois campos elétricos estão em fase e o campo resultante é o dobro do campo de cada antena.

Em uma posição qualquer do espaço o campo elétrico resultante obviamente é a superposição (soma vetorial) dos dois campos elétricos radiativos gerados pelas duas antenas. Na posição da Figura S3.9 em que mostramos o cruzamento de duas ondas, os dois campos elétricos somam-se em fase entre si:

$$E \cos(\omega t) + E \cos(\omega t) = 2E \cos(\omega t)$$

O campo elétrico máximo (ou amplitude) nessa posição particular é o dobro do campo elétrico devido a uma única antena. Dizemos que nessa posição as duas ondas interferem construtivamente.

Redistribuição do fluxo de energia

Acabamos de ver que, em uma posição em que as duas ondas cossenoidais se somam em fase, encontramos uma amplitude que é o dobro da amplitude produzida por uma única antena. (O campo elétrico nessa posição ainda oscila de forma senoidal, com a mesma frequência das duas ondas.)

QUESTÃO Se a amplitude é duas vezes maior, quantas vezes a intensidade (a média temporal do fluxo de energia) é maior?

A intensidade naquela posição (ou o brilho, no caso da luz visível) é quatro vezes maior do que seria para uma única antena.

Evidentemente isso fornece uma maneira de tornar a radiação mais intensa naquela posição, mas há algo estranho. As duas antenas irradiam o dobro da energia de uma única antena, então como a intensidade naquela posição pode ser quatro vezes maior? É claro que deve haver algum outro local em que a intensidade é menor que a de uma só das ondas.

Interferência destrutiva

Considere uma posição diferente, em que as duas ondas cossenoidais estejam fora de fase por 180° (Figura S3.10). Nessa posição, uma das ondas sofreu um deslocamento $\lambda/2$ a mais que a outra. Como as ondas começaram em fase, há agora uma diferença de fase de 180° (π rad).

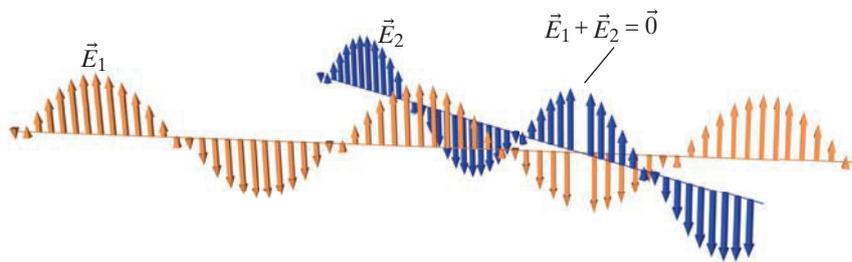


Figura S3.10 Em uma posição diferente, os dois campos elétricos estão fora de fase por 180° e levam a um campo nulo em todos os instantes.

QUESTÃO Qual é a amplitude (o máximo campo elétrico) na posição da Figura S3.10 em que mostramos dois raios que se cruzam?

Evidentemente o campo elétrico total é nulo em todos os instantes nessa posição, porque as duas ondas têm uma diferença de fase de 180° . Dizemos que essas ondas interferem destrutivamente nessa posição, e o fenômeno geral é chamado de “interferência”. Em física, o termo interferência refere-se em geral à superposição de ondas de múltiplas fontes. Dizemos que, em uma posição em que duas ondas se somam, elas interferem construtivamente, o que é uma linguagem muito peculiar, porém comumente utilizada em discussões técnicas.

Duas fontes senoidais produzem um padrão complexo de radiação no espaço. A intensidade da radiação em algumas posições é maior do que esperaríamos, e em outras posições é menor, ou mesmo nula. Se você observar a intensidade em todas as direções, pode-se mostrar que a energia total irradiada é o dobro da energia irradiada por uma antena, como seria de esperar. Ocorre simplesmente que a energia é redistribuída de um modo especial.

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE INTERFERÊNCIA

A soma de dois cossenos pode produzir um *máximo* com o dobro da amplitude e o quádruplo da intensidade. Isso ocorre quando a diferença de caminho é $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ etc.

A soma de dois cossenos pode produzir um *mínimo* com amplitude nula e intensidade nula. Isso ocorre quando a diferença de caminho é $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ etc.

QUESTÃO Você consegue observar interferência completamente destrutiva (ou seja, intensidade nula) em alguma posição com duas fontes que possuem frequências angulares diferentes ω_1 e ω_2 ? Por quê?

Não há posição em que as duas fontes se cancelem mutuamente em todos os instantes, porque, mesmo se as ondas se cancelassem em um certo momento, após um ciclo da primeira onda a segunda não teria retornado ao mesmo valor, de modo que não haveria cancelamento nesse instante posterior. Não apenas as frequências (ou frequências angulares) das fontes devem ser exatamente iguais, mas as fontes também devem ter uma fase relativa constante (devem ser coerentes).

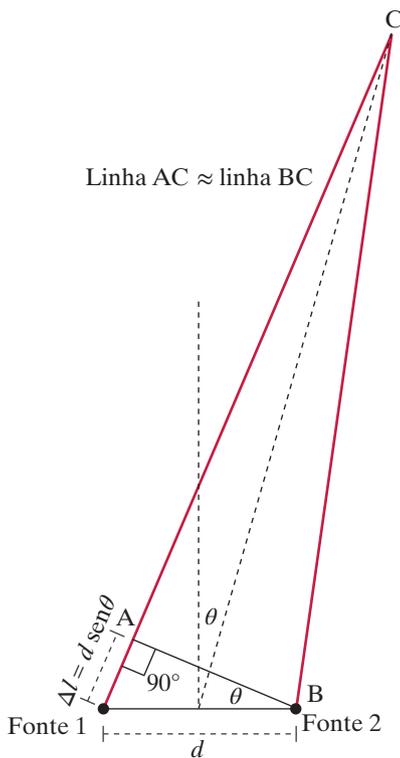


Figura S3.11 A diferença de caminho entre duas fontes que irradiam em fase. Próximo às fontes os caminhos são praticamente paralelos.

Prevendo o padrão de radiação de duas fontes

Devemos agora ser capazes de prever em que posições duas fontes em fase entre si produzirão máximos de intensidade. Tudo o que temos que fazer é descobrir onde as diferenças de caminho são múltiplos de um comprimento de onda. De modo equivalente, podemos descobrir onde a diferença de fase é um múltiplo de 360° (2π rad). Analogamente, podemos encontrar uma posição de intensidade nula descobrindo onde há uma diferença de caminho de meio comprimento de onda ou uma diferença de fase de 180° (π rad).

Imagine duas fontes que irradiam em fase, e considere a interferência em uma posição C em uma direção que forma um ângulo θ com relação à bissetriz perpendicular entre as duas fontes (Figura S3.11). Precisamos ser capazes de calcular a diferença de caminho Δl em termos do ângulo θ para determinar se pode haver um máximo ou um mínimo de intensidade na posição C.

Aproximação para posições de observação distantes

Na Figura S3.11, se a posição de observação C é muito distante das fontes (como é geralmente o caso em muitas aplicações da teoria), podemos fazer a aproximação de que, no triângulo retângulo ABC desenhado no diagrama, a base AC tem praticamente o mesmo comprimento que a hipotenusa BC. Essa aproximação é válida se a posição de observação C é suficientemente distante das fontes para que $\angle ACB$ seja um ângulo muito pequeno. Nesse caso, o caminho da fonte 1 até C é, com excelente aproximação, $\Delta l = d \sin \theta$ mais longo que o caminho da fonte 2 (caminho BC).

DIFERENÇA DE CAMINHO

$$\Delta l = d \sin \theta$$

Isso é geometria, não física. A física reside no fato de que, se a diferença de caminho Δl for um número inteiro de comprimentos de onda, haverá um máximo no ângulo θ determinado por $\Delta l = d \sin \theta$. Se Δl for $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ e assim por diante, haverá um mínimo (intensidade nula) no ângulo θ determinado por $\Delta l = d \sin \theta$.

Perceba a importância do espaçamento d entre as fontes. Em particular, se $d < \lambda$ você jamais pode obter interferência completamente construtiva, exceto em $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$, porque $d \sin \theta$ é sempre menor que λ . Se $d < \lambda/2$ você nunca pode obter intensidade nula (interferência completamente destrutiva).

Intensidade em função do ângulo

A Figura S3.12 mostra um gráfico do padrão de intensidade em função do ângulo para duas fontes em fase entre si e separadas por uma distância d , em que nesse caso específico $d = 4,5\lambda$. Em algumas direções (Máx₀, Máx₁ etc.), a diferença de caminho $\Delta l = d \sin \theta$ entre as duas ondas cossenoidais é zero ou um número inteiro de comprimentos de onda, as amplitudes somam-se em fase e a intensidade I é quatro vezes maior que a intensidade de uma única fonte. Em outras direções (Mín₁, Mín₂ etc.), a diferença de caminho $\Delta l = d \sin \theta$ entre as duas ondas cossenoidais é meio comprimento de onda (ou $3\lambda/2$, $5\lambda/2$ etc.), as ondas estão fora de fase por 180° , e a intensidade I é nula.

QUESTÃO Por que a intensidade é máxima em $\theta = 0^\circ$ (posição Máx₀) e $\theta = 180^\circ$?

Em 0° e 180° , os caminhos têm o mesmo comprimento para as duas fontes, logo as ondas estão em fase, produzindo uma intensidade máxima.

QUESTÃO Na Figura S3.12, $d = 4,5\lambda$. Por que a intensidade é igual a zero em $\theta = 90^\circ$ (posição Mín₅) e em $\theta = -90^\circ$?

Em 90° e -90° , a diferença de caminho das duas fontes é $4,5\lambda$, logo as duas ondas estão fora de fase por $0,5\lambda$, o que corresponde a uma diferença de fase de 180° . Isso produz interferência completamente destrutiva.

Começando de $\theta = 0$, à medida que θ aumenta a intensidade decai rapidamente a zero na posição Mín₁. A variação exata da intensidade com o ângulo pode ser calculada somando as duas ondas cossenoidais com uma diferença de fase variável, e isso foi feito no programa de computador utilizado para criar o diagrama. No entanto, para muitos propósitos é suficiente apenas determinar onde estão os máximos e os mínimos. Um esboço qualitativo de um padrão de intensidade entre máximos e mínimos será apropriado para nossos propósitos nesta discussão.

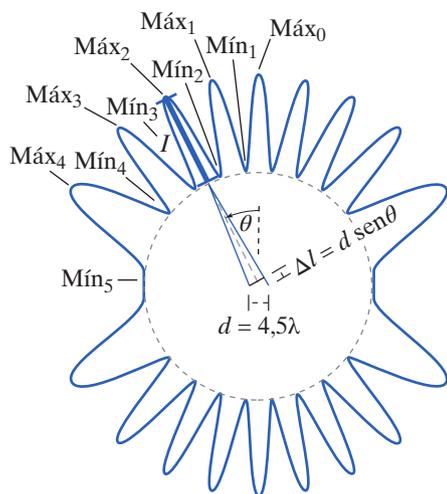


Figura S3.12 O padrão de intensidade para duas fontes. A barra indica a intensidade I na posição de um máximo (Máx₂).

Ponto de verificação 3 As duas fontes na Figura S3.12 estão separadas por uma distância $d = 4,5\lambda$. **(a)** Calcule o ângulo θ em que se encontra o primeiro mínimo (posição Mín₁ na Figura S3.12). (*Dica:* qual deve ser a diferença de caminho $d \sin \theta$ nessa direção?) **(b)** À medida que θ aumenta além da posição do primeiro mínimo, a intensidade cresce rapidamente até um segundo máximo, e em seguida cai a um mínimo, cresce novamente e assim por diante. Calcule o ângulo θ na posição Máx₄ na Figura S3.12. (*Dica:* quanto deve valer $d \sin \theta$ nessa direção?)

Resumo: interferência de duas fontes

Eis um resumo dos principais pontos até aqui:

POSIÇÕES DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Intensidade máxima ($4I_0$) quando $\Delta l = d \sin \theta$ é $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ etc.
 Intensidade mínima (zero) quando $\Delta l = d \sin \theta$ é $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ etc.
 Intensidade zero é impossível se $d < \lambda/2$.

Se as fontes são coerentes mas *não* estão em fase, você precisa levar em consideração essa diferença de fase, além daquela associada a Δl .

Interferência de dupla fenda

Mencionamos anteriormente o fenômeno da interferência de dupla fenda, observável com uma fonte de luz laser. Temos agora condições de relacionar o espaçamento entre as fendas, os ângulos em que encontramos máximos e mínimos e o comprimento de onda da luz laser.

Em uma vista de cima (Figura S3.13), mostramos o laser, as duas fendas e um padrão de intensidade sobre a tela, que pode ser medido quantitativamente com um

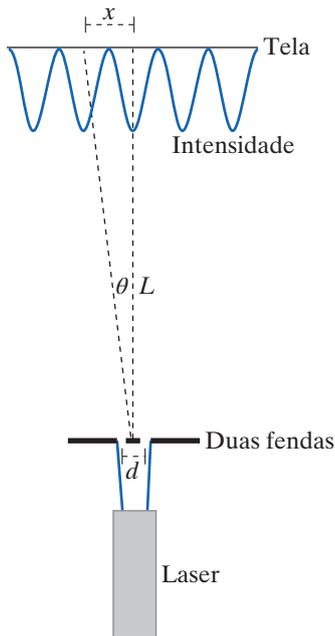


Figura S3.13 Vista superior de um laser, duas fendas e um padrão de interferência sobre uma tela.

medidor de intensidade luminosa. Suponha que a distância entre as fendas seja $d = 0,5 \text{ mm}$, a distância das fendas à tela seja $L = 2 \text{ m}$, e a distância medida na tela entre o máximo central e o máximo seguinte seja $x = 2,4 \text{ mm}$.

QUESTÃO Calcule o comprimento de onda dessa luz laser.

No segundo máximo, $d \sin \theta = \lambda$, logo $\sin \theta = \lambda/d$. Para pequenos ângulos, $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, logo $\lambda/d \approx x/L$. Temos portanto

$$\lambda = \frac{xd}{L} = \frac{(2,4 \times 10^{-3} \text{ m})(0,5 \times 10^{-3} \text{ m})}{(2 \text{ m})} = 6 \times 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

Esse comprimento de onda está na porção vermelha do espectro visível. Foram experimentos semelhantes a esse que assentaram o que agora sabemos sobre os comprimentos de onda da luz visível.

Varição de intensidade dos máximos de interferência

Podemos prever as posições dos máximos e mínimos de interferência. Entretanto, ainda não encontramos uma explicação para a possível variação no brilho dos máximos. Para explicar por que em alguns casos o máximo central pode ser muito mais brilhante do que os demais, precisaremos considerar a difração de uma única fenda, discutida na Seção S3.3.

Comprimento de onda, diferença de caminho e distância entre as fontes

Os efeitos de interferência que descrevemos aparecem em situações nas quais a diferença de caminho dos dois raios é maior que mas comparável ao comprimento de onda da radiação eletromagnética. No caso de ondas de rádio que consideramos na seção anterior, d , o espaçamento entre as antenas, era muitas vezes maior que o comprimento de onda, resultando em diferenças de caminho de até 4λ . No caso da interferência de dupla fenda com um laser, o espaçamento entre as fendas ($0,5 \text{ mm}$, ou $5 \times 10^{-4} \text{ m}$) era quase 1000 vezes o comprimento de onda da luz (cerca de 500 nm , ou $5 \times 10^{-7} \text{ m}$). No entanto, como a superfície sobre a qual observamos o padrão de interferência estava muito distante das fendas, a diferença de caminho para as duas ondas era ainda apenas umas poucas vezes maior que o comprimento de onda da luz.

Interferometria

Uma aplicação moderna desse fenômeno de interferência é medir distâncias muito pequenas. Um feixe de laser é dividido em dois, e espelhos guiam um dos feixes até um objeto de interesse, do qual o feixe é refletido até uma tela em que há interferência com o outro feixe de laser. Se o objeto desloca-se mesmo uma fração de um comprimento de onda da luz visível, há um deslocamento facilmente observável do padrão de interferência sobre a tela. Esse uso dos fenômenos de interferência para medir pequenas variações na distância é chamado de “interferometria”.

S3.2 INTERFERÊNCIA DE MÚLTIPLAS FONTES: DIFRAÇÃO

Até aqui discutimos efeitos de interferência produzidos por duas fontes coerentes. “Difração” é o termo utilizado para descrever efeitos de interferência envolvendo um grande número de fontes; “interferência” descreve efeitos envolvendo apenas poucas fontes. Nesta seção discutiremos diversos exemplos de difração.

Difração de raios X

Luz na região de raios X do espectro pode interagir com os elétrons em um átomo de um objeto cristalino sólido. Para investigar a estrutura de um cristal, é necessário produzir um feixe monocromático e coerente de raios X e encontrar uma forma de

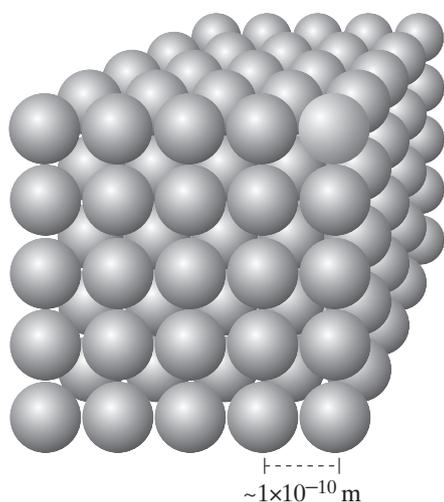


Figura S3.14 Parte de uma rede cristalina cúbica simples. Outros arranjos geométricos mais complexos também são possíveis.

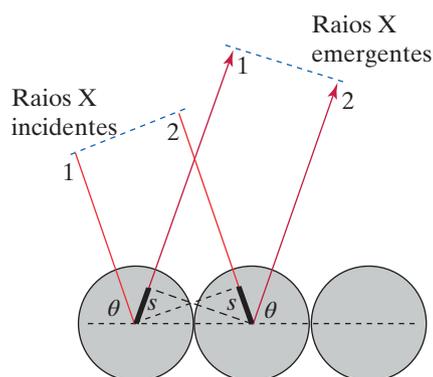


Figura S3.15 Reirradiação da camada superior de átomos em um sólido cristalino. Note que θ é medido a partir da superfície, não da normal à superfície.

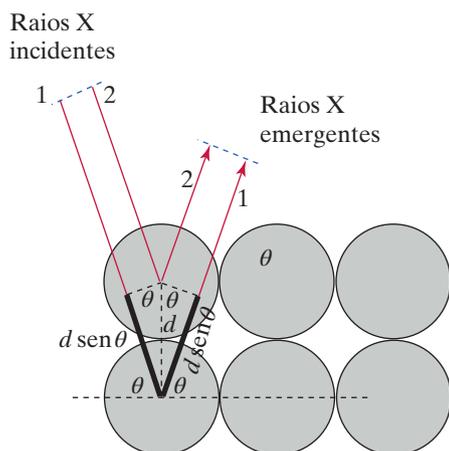


Figura S3.16 A reirradiação das duas camadas superiores envolve uma diferença de caminho adicional.

medir com precisão o comprimento de onda dessa radiação. A difração de raios X, uma técnica que pode ser utilizada para estudar a estrutura de cristais ou de moléculas individuais em um cristal, também pode ser utilizada para preparar um feixe monocromático de raios X e medir com precisão o comprimento de onda desse feixe. Devido a sua importância, discutiremos a difração de raios X em algum detalhe.

Em um cristal, átomos ou moléculas são arranjados em uma matriz tridimensional regular, chamada de *rede*, como mostrado na Figura S3.14. Se radiação eletromagnética de um único comprimento de onda atinge um cristal, elétrons em todos os átomos são acelerados e reirradiam. Podemos esperar encontrar reirradiação de alta intensidade apenas naquelas direções em que a diferença de caminho para átomos adjacentes é λ , 2λ , 3λ e assim por diante. Lidar com uma matriz tridimensional de fontes pode ser geometricamente complexo, mas limitaremos nossa discussão a alguns casos simples que ilustram o princípio básico.

Comprimento de onda de raios X: $\lambda \approx d$

O espaçamento entre átomos em um sólido cristalino é da ordem de magnitude dos tamanhos atômicos, ou cerca de 1×10^{-10} do metro. Vimos que efeitos de interferência requerem que o comprimento de onda λ seja comparável ao espaçamento d , ou cerca de 1×10^{-10} m. Essa radiação eletromagnética é chamada de raios X. Raios X têm comprimentos de onda muito curtos em comparação à luz visível: a luz violeta tem um comprimento de onda de 400 nm, ou 4000×10^{-10} m, cerca de 4000 vezes o comprimento de onda dos raios X.

Uma maneira comum de produzir raios X é disparar um feixe de elétrons de altíssima energia contra um bloco de metal, como o cobre. Esses elétrons altamente energéticos algumas vezes arrancam um elétron da camada interna do átomo de cobre. Logo em seguida um elétron de uma camada externa ocupa o espaço vazio, e a correspondente grande queda de energia do átomo é acompanhada pela emissão de luz de alta energia e pequeno comprimento de onda. Esse é o mecanismo de produção utilizado em equipamentos médicos de raios X.

Condições para interferência construtiva

Para apreciar a ideia básica por trás da difração de raios X, consideraremos um feixe de raios X, de um único comprimento de onda, que atinge um cristal simples, em que os átomos estão arranjados em uma grade retangular. Se os raios X incidem formando um ângulo θ com a superfície, a primeira camada de átomos irá reirradiar com interferência construtiva em um ângulo θ , à semelhança de uma reflexão simples, porque nessa direção há uma diferença de caminho nula entre fontes adjacentes (átomos na primeira camada). Ao longo do caminho 1 na Figura S3.15, há um comprimento extra s para o raio emergente, e ao longo do caminho 2 há o mesmo comprimento extra s para o raio incidente. Em outros ângulos, a diferença de caminho não seria nula e, a menos que a diferença de caminho seja um número inteiro de comprimentos de onda, não haveria interferência construtiva. Vamos considerar somente o caso em que observamos um máximo no ângulo de reflexão simples.

A reirradiação de outras camadas atômicas, abaixo da camada superficial, não precisa estar em fase com aquela da camada superior, exceto em condições especiais. Na Figura S3.16, se a distância de centro a centro entre as camadas é d , há uma diferença $2d \sin \theta$ entre os comprimentos dos caminhos da radiação eletromagnética que acelera elétrons em um átomo na camada superior (que reirradia) e aquela que acelera elétrons em um átomo na camada seguinte (que também reirradia).

Se a diferença de caminho $2d \sin \theta$ não é igual ao comprimento de onda λ (ou algum múltiplo de λ), as duas camadas superiores de átomos não irão reirradiar em fase segundo um ângulo θ . Também em algum outro ângulo os átomos na camada superior não irão reirradiar em fase entre si. Portanto, se orientar a superfície do cristal segundo um ângulo θ em relação ao feixe de raios X, você pode ou não obter

um feixe intenso de raios X reirradiado (refletido) do cristal no ângulo de reflexão. Você obterá uma “reflexão” intensa somente se a seguinte condição for satisfeita:

CONDIÇÃO PARA INTERFERÊNCIA CONSTRUTIVA DE RAIOS X

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad \text{em que } n \text{ é um inteiro}$$

Note que, se as duas camadas superiores reirradiam em fase, a reirradiação de todas as demais camadas também estará em fase.

Esse efeito, chamado de difração de raios X porque envolve um enorme número de fontes, pode ser utilizado para deduzir o espaçamento d entre camadas de um cristal. Suponha que você tenha uma fonte de raios X de comprimento de onda único e conhecido λ . Você direciona um feixe desses raios X para o cristal, segundo um ângulo θ , e procura por um feixe intenso no ângulo de reflexão. Se não há um feixe intenso ali, você muda um pouco o ângulo e procura novamente. (Típicamente, gira-se o cristal em vez do grande aparato que produz o feixe de raios X.) Se encontrar uma reflexão intensa em um ângulo particular θ , você sabe que o espaçamento entre as camadas de átomos é $d = n\lambda / (2 \sin \theta)$. Você pode ter que realizar algumas verificações adicionais para determinar o valor de n , que poderia ser 1, 2, 3 e assim por diante. A Figura S3.17 mostra um padrão de interferência construtiva extraído de um cristal de tungstênio.

Os raios X produzidos por alguns tipos de fontes de raios X têm um espectro contínuo de comprimentos de onda. Como se pode produzir um feixe de raios X de comprimento de onda único a partir dessas fontes?

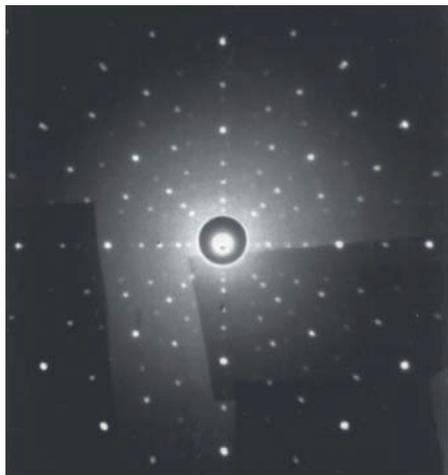


Figura S3.17 Padrão de difração de raios X mostrando máximos de interferência de um cristal único de tungstênio.

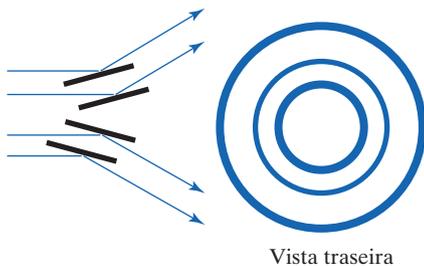


Figura S3.18 Difração de raios X com um pó de cristais em orientações aleatórias.

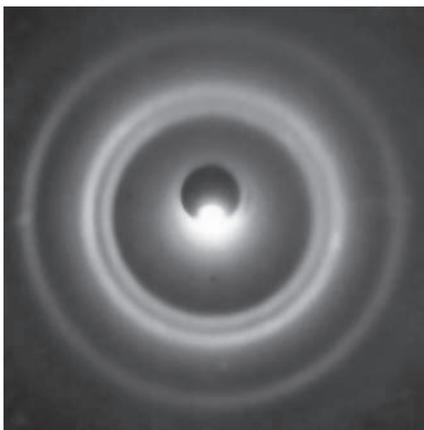


Figura S3.19 Padrão de difração de raios X obtido do fluoreto de lítio policristalino.

QUESTÃO Suponha que você dispõe de um cristal com espaçamento d entre as camadas atômicas conhecido. Explique brevemente como utilizar esse cristal e um feixe de raios X de múltiplos comprimentos de onda para produzir um feixe de comprimento de onda único, que pode ser utilizado em experimentos com cristais cuja estrutura é desconhecida.

Dados o espaçamento d entre as camadas atômicas e o comprimento de onda desejado λ , podemos obter uma grande intensidade precisamente para aquele comprimento de onda segundo o ângulo θ que satisfaz $2d \sin \theta = \lambda$. Se dirigirmos o feixe de raios X para o cristal segundo esse ângulo, obteremos uma forte reflexão para o comprimento de onda desejado, enquanto outros comprimentos de onda não produzirão um feixe intenso naquela direção.

A difração de raios X é uma ferramenta extremamente poderosa que tem sido usada para determinar a estrutura de uma enorme variedade de cristais. Ela também pode ser utilizada com materiais policristalinos, materiais na forma de um pó de minúsculos cristais orientados em direções aleatórias. Nesse pó que contém um número muito grande de minúsculos cristais, haverá alguns cristais cuja orientação com relação ao feixe de raios X satisfaz fortuitamente a condição $2d \sin \theta = n\lambda$, e nesse caso haverá uma intensa reirradiação em um anel que circunda o feixe incidente de raios X, segundo o ângulo apropriado (Figura S3.18). Um filme de raios X exposto a essa reirradiação mostra anéis cujos diâmetros revelam muito sobre a estrutura cristalina, mesmo se não dispomos de um grande cristal único. Um padrão de difração do fluoreto de lítio em pó é mostrado na Figura S3.19.

Uma camada de átomos que reirradiam em fase não precisa ser paralela à superfície de um cristal. Uma camada consiste em qualquer plano geométrico que corta o cristal de forma que muitos átomos repousam sobre esse plano (para produzir uma grande intensidade de reirradiação). Além disso, se o cristal é composto de mais de um tipo de átomo (como os cristais de NaCl, por exemplo), medidas precisas da intensidade podem fornecer informações sobre o arranjo dos diferentes átomos, uma vez que diferentes átomos reirradiam diferentes quantidades de energia.

Ponto de verificação 4 Sabe-se que o espaçamento entre planos vizinhos de átomos em um certo cristal é 2×10^{-10} m. Um feixe monocromático de raios X,

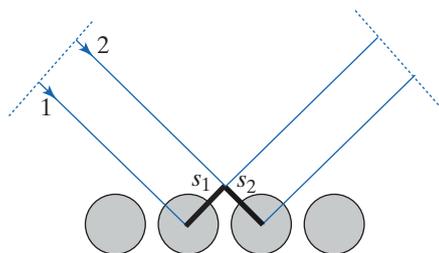


Figura S3.20 Somente quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão temos $s_1 = s_2$, de modo que $\Delta l = 0$.

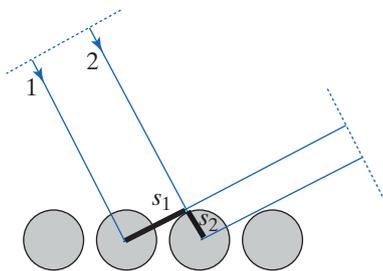


Figura S3.21 Segundo qualquer outro ângulo, $s_1 \neq s_2$, logo Δl é não nulo.

de comprimento de onda $0,96 \times 10^{-10}$ m, é direcionado para o cristal. Em que ângulo se deve esperar encontrar um máximo de interferência?

Reflexão da luz visível: $\lambda \gg D$

Por que vemos uma reflexão da luz visível em uma superfície polida segundo um único ângulo? Quando luz visível em vez de raios X atinge um cristal, ela acelera elétrons no material, e de fato há reirradiação em todas as direções. Entretanto, a condição de difração de raios X para diferentes camadas, $2d \sin \theta = n\lambda$, não é relevante para a luz visível, já que a distância entre camadas atômicas é extremamente pequena em comparação ao comprimento de onda da luz visível ($d \approx 1 \times 10^{-10}$ m, $\lambda \approx 5000 \times 10^{-10}$ m). A diferença de caminho para a reirradiação de camadas adjacentes é desprezível, e camadas adjacentes estão praticamente em fase.

Como o espaçamento interatômico d é muito menor que λ para a luz visível, haverá interferência construtiva entre duas ondas somente se a diferença de caminho é nula, logo observaremos apenas um máximo de intensidade. Como pode ser visto na Figura S3.20, para interações com átomos na camada superficial, $\Delta l = 0$ somente se o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Em qualquer outro ângulo, a diferença de caminho é não nula (Figura S3.21), e há interferência destrutiva. A interação da radiação incidente com as camadas mais internas de átomos é essencialmente a mesma, já que as camadas estão muito próximas entre si em comparação ao comprimento de onda da radiação.

Superfícies metálicas

A reflexão da luz visível em uma superfície metálica é bastante diferente da reflexão em materiais isolantes transparentes como água ou vidro. Os elétrons móveis em um metal são acelerados muito facilmente. Os elétrons móveis próximos à superfície ganham muita energia, logo concluímos que há pouca energia disponível para transferir aos elétrons mais distantes da superfície. Deve ocorrer de a intensidade da radiação (e portanto a intensidade do campo elétrico) no interior do metal ser pequena. Como isso acontece? Presumivelmente há tanta energia reirradiada por elétrons acelerados nas imediações da superfície do metal que há um campo muito pequeno no interior do metal. Não há efeitos relevantes de interferência entre camadas em diferentes profundidades com relação à superfície. Obviamente há os efeitos usuais de interferência envolvendo elétrons em diferentes posições na superfície, de modo que há uma intensidade forte apenas no ângulo de “reflexão”, e os metais servem como bons espelhos.

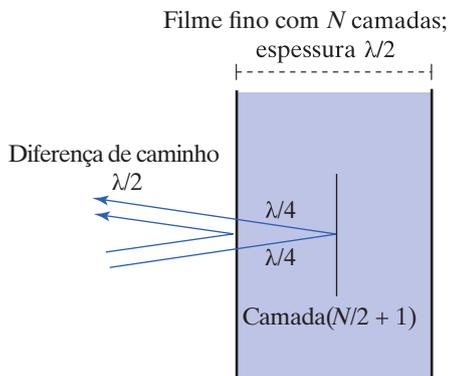


Figura S3.22 Luz visível atinge um filme muito fino de matéria. Considere pares de camadas como a camada 1 e a camada $(N/2 + 1)$ etc.

Interferência de filmes finos

Apesar do que dissemos sobre a condição $2d \sin \theta = n\lambda$ para camadas adjacentes em relação à luz visível, pode haver interessantes efeitos de interferência quando a luz visível atinge um filme fino ou um material transparente com espessura de poucos comprimentos de onda, como uma bolha de sabão ou uma camada fina de óleo fluando sobre uma poça d’água. Esses efeitos de interferência em filmes finos dependem criticamente da exata espessura do filme fino.

Suponha por simplicidade que luz incidente com uma frequência única atinja a superfície de um filme fino quase frontalmente (raios praticamente paralelos à superfície, como na Figura S3.22). Suponha que o filme fino tenha uma espessura de apenas meio comprimento de onda ($\lambda/2$). Embora esse seja um filme muito fino, ainda assim ele contém um grande número N de camadas atômicas: N é cerca de $(250 \times 10^{-9} \text{ m} / 1 \times 10^{-10} \text{ m}) = 2500$ camadas atômicas.

Na Figura S3.22, considere combinar em um par a primeira camada de átomos com a camada atômica número $(N/2 + 1 = 1251)$, combinar a segunda camada atômica com a camada atômica número $(N/2 + 2 = 1252)$ e assim por diante. A

camada atômica número ($N/2 = 1250$) é combinada com a camada atômica número $N = 2500$ (a última camada). A diferença de caminho para cada um desses pares é $\lambda/2$, logo cada par produz uma intensidade nula, e a intensidade reirradiada total é zero para um filme fino cuja espessura é $\lambda/2$.

Por argumentos semelhantes, você pode mostrar que haverá uma reirradiação nula para filmes com espessuras iguais a $\lambda/2, 2\lambda/2, 3\lambda/2, 4\lambda/2$ e assim por diante — qualquer múltiplo inteiro de $\lambda/2$. Para filmes com espessuras a meio caminho entre aquelas ($\lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$ etc.), pode-se mostrar que há reirradiação máxima, embora uma prova formal esteja além do escopo desta discussão.

QUESTÃO Um filme de sabão ou uma camada de óleo, quando iluminados por luz branca comum, mostram um arco-íris de cores. Explique sucintamente por que isso ocorre.

Para uma dada espessura de filme, algum comprimento de onda pode ter o tamanho exato para produzir interferência inteiramente construtiva e ser brilhante, mas outros comprimentos de onda não teriam o tamanho correto e teriam brilho fraco. Se a espessura do filme não for uniforme, ou você olhar de um ângulo diferente, o comprimento de onda que produz interferência totalmente construtiva irá mudar.

Em uma bolha de sabão que dura um longo tempo, cada vez mais líquido escoar para o fundo da bolha. A parte de cima torna-se muito fina, mais fina que um quarto de comprimento de onda da luz, mesmo para a luz violeta, que tem o menor comprimento de onda da luz visível. Esse filme muito fino parece não reirradiar quase nenhuma luz (parece preto), porque há apenas um pequeno número de camadas atômicas, em contraposição aos vários milhares que contribuem quando a espessura é um quarto de comprimento de onda.

Um fenômeno intimamente relacionado de interferência em filmes finos é responsável pelas brilhantes cores iridescentes vistas em algumas asas de borboletas e penas de pássaros, que contêm estruturas com espaçamento comparável ao comprimento de onda da luz. Há interferência construtiva para algumas cores e interferência destrutiva para outras.

Índice de refração

O comprimento de onda relevante para a interferência de filmes finos é o comprimento de onda no interior do material. Como vimos no Capítulo 23, ocorre que esse comprimento de onda é menor que aquele no ar. No interior de um material transparente denso, como vidro ou água, átomos individuais são substancialmente afetados não apenas pela radiação eletromagnética incidente, mas também pelos campos elétricos reirradiados pelos demais átomos. Quando você soma todos os campos elétricos, descobre que o padrão do campo elétrico resultante tem uma distância entre cristas sucessivas que é encurtada. O fator pelo qual o comprimento é encurtado é chamado de índice de refração, e fica em torno de 1,5 para muitos tipos de vidro; seu valor para a água é de 1,33.

Em um material com índice de refração n , o comprimento de onda é $\lambda' = \lambda/n$, em que λ é o comprimento de onda da radiação no vácuo. A frequência da onda não é afetada e, como $v = f\lambda$, a velocidade *aparente* da luz no interior de um sólido é perceptivelmente menor que 3×10^8 m/s.

Essa complicação não afeta nossa análise da difração de raios X, porque a reirradiação por um átomo exposto a raios X é muito pequena comparada à reirradiação por um átomo exposto à luz visível. No caso de raios X, podemos considerar que o campo elétrico no interior do material deve-se essencialmente à radiação incidente, sendo desprezível a pequena reirradiação dos demais átomos.

Ponto de verificação 5 Um filme de óleo com espessura de 200 nm flutua sobre água. O índice de refração é 1,6. Para qual comprimento de onda da luz haverá interferência completamente destrutiva?

Comprimento de coerência

Há um fenômeno que limita os efeitos de interferência em filmes. A maioria das fontes de luz visível produz ondas senoidais com um comprimento total L bastante curto, que corresponde ao pequeno intervalo de tempo $\Delta t = L/c$ durante o qual um átomo estava emitindo a luz (c é a velocidade da luz). Mesmo que o comprimento total L corresponda a um grande número de comprimentos de onda, isso pode corresponder a menos de um milímetro. Se o comprimento total L for menor que duas vezes a espessura do filme, no instante em que a luz reirradiada pela última camada atômica emerge do filme, a primeira camada atômica já parou de emitir, e não há nada com que ela possa interferir. O comprimento total L da emissão senoidal é chamado de “comprimento de coerência”. Uma das propriedades importantes dos lasers é que eles emitem luz com um comprimento de coerência muito longo. Isso é particularmente relevante para a produção de hologramas, que têm por base efeitos de interferência.

Redes de difração

Um disco compacto (CD) parece bastante com um espelho, e você pode ver uma fonte de luz refletida na superfície reluzente. No entanto, se você segurar o disco em uma posição fixa e mover seus olhos para longe da reflexão direta, verá um arco-íris de cores. Esse é um efeito de interferência. O CD tem anéis concêntricos de pequenos sulcos gravados no plástico, e esses anéis de sulcos separam os anéis intactos de plástico uns dos outros. Você observa interferência entre reflexões de seções intactas adjacentes do plástico. A distância d entre anéis adjacentes é comparável ao comprimento de onda da luz visível (caso contrário não haveria qualquer efeito). Há um número muito grande de anéis em um CD, e o efeito é chamado de “difração”, o termo aplicado a fenômenos de interferência quando há um número muito grande de fontes cujas ondas interferem entre si.

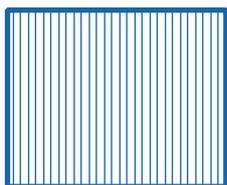


Figura S3.23 Uma rede de difração (fora de escala) tem muitas ranhuras paralelas em sua superfície.

Um dispositivo semelhante é a rede de difração, um pedaço de vidro ou plástico no qual foram cuidadosamente produzidas inúmeras ranhuras, em forma de linhas paralelas muito próximas entre si, separadas por uma distância d (Figura S3.23). Assim como nos CDs, você pode observar uma reflexão comum em uma rede de difração, mas ao incliná-la você observa um arco-íris de cores. Redes de difração por transmissão são transparentes entre as ranhuras e atuam como um grande número de fendas paralelas através das quais passa a luz. Assim como na interferência de dupla fenda, cada fenda pode ser tratada como se fosse uma fonte de luz (veja a dedução no final deste suplemento).

As redes de difração são uma importante ferramenta científica porque podem ser utilizadas para medir com grande precisão os comprimentos de onda (e portanto as frequências) da luz emitida por átomos. Diferentes átomos emitem luz de diferentes frequências, e as redes de difração não apenas desempenham um papel importante no estudo da estrutura atômica, mas também ofereceram uma maneira conveniente de identificar os átomos presentes em uma amostra de material.

Uma rede de difração pode ter até 1000 ranhuras paralelas por milímetro! Nesse caso, $d = 1 \times 10^{-3} \text{ mm} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$; compare com um comprimento de onda típico da luz, de cerca de $500 \text{ nm} = 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}$.

QUESTÃO Antes de tratarmos esse fenômeno quantitativamente, veja se você consegue explicar de forma muito sucinta e qualitativa por que há faixas de cores em um CD (ou uma rede de difração) inclinado, e por que não surge um arco-íris sob reflexão direta usual.

O ângulo θ no qual você obtém um outro máximo depende do comprimento de onda (já que a diferença de fase associada a fendas adjacentes depende do comprimento de onda). Portanto, os diferentes comprimentos de onda na luz branca revelam-se em diferentes ângulos. A reflexão usual é normal, porque nesse caso os caminhos têm todos o mesmo comprimento, de modo que não há dependência no comprimento de onda.

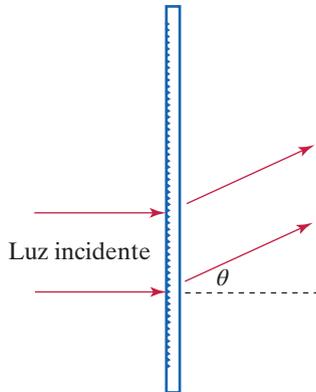


Figura S3.24 Uma rede de difração por transmissão.

Para analisar uma rede de difração quantitativamente, consideraremos uma geometria particularmente simples, mas que ilustra os aspectos mais importantes desse dispositivo. Suponha que um feixe de luz vermelha incida sobre uma rede de difração quase perpendicularmente a ela (Figura S3.24). Haverá um pico central em $\theta = 0$, já que as reirradiações de todas as fendas estão em fase entre si, mas pode haver um ou mais picos adicionais em outras direções nas quais a diferença de caminho associada a fendas adjacentes seja igual a um comprimento de onda.

QUESTÃO Se o espaçamento entre fendas adjacentes é d e o comprimento de onda da luz vermelha é λ , qual é o primeiro ângulo θ não nulo no qual você vê um máximo de intensidade? (*Dica:* determine o θ necessário para obter uma diferença de caminho de um comprimento de onda associada a fendas adjacentes da rede; desenhe um diagrama para as fendas adjacentes.)

O máximo ocorre em um ângulo para o qual $d \sin \theta = \lambda$, logo o ângulo em que você verá alta intensidade de luz vermelha ($\lambda \approx 700 \text{ nm}$) pode ser calculado a partir de $\sin \theta = \lambda/d$.

QUESTÃO Se você substituir a fonte de luz vermelha por uma fonte de luz violeta (comprimento de onda em torno de 400 nm), o máximo de intensidade será visto em um ângulo θ maior ou menor? Por quê?

Como $\sin \theta = \lambda/d$, um comprimento de onda λ mais curto produzirá um máximo em um ângulo θ menor. Como você observa essas várias cores vindo da rede de difração (ou do CD) em ângulos diferentes, isso implica que a luz branca do Sol ou de uma lâmpada incandescente deve ser uma mistura de muitas cores, do vermelho ao amarelo, ao verde e ao violeta.

Redes de difração são utilizadas intensamente na ciência e na tecnologia para determinar quais comprimentos de onda estão presentes em vários tipos de luz, o que é um indicador de que átomos produzem essa luz. Se você observar através de uma rede de difração uma fenda iluminada por uma lâmpada de neônio, pode ver linhas individuais de cores que são características dos átomos de neônio no interior da lâmpada, responsáveis pela produção da luz. Esse espectro de linhas é diferente para diferentes átomos, e bastante diferente do espectro contínuo produzido por objetos incandescentes como o Sol ou uma lâmpada de filamento.

Por que é importante ter muitas fendas?

Em uma seção posterior, sobre resolução angular, mostraremos formalmente que os feixes de luz nos máximos das redes de difração são extremamente estreitos em comparação àqueles produzidos por apenas duas fendas. É fácil ver, a partir de um argumento de energia, que isso deve ocorrer. Com apenas duas fendas, a intensidade máxima é $2^2 = 4$ vezes a intensidade produzida por uma única fenda. Entretanto, em uma rede de difração típica, com 2 cm de largura e espaçamento entre fendas $d = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}$, há 2×10^4 fendas, e a intensidade máxima é $(2 \times 10^4)^2 = 4 \times 10^8$ vezes a intensidade de uma única fenda! Para que haja uma intensidade tão elevada em algumas poucas direções, deve haver largas regiões em que a intensidade é muito baixa. Os feixes de luz da rede de difração são extremamente estreitos e nitidamente definidos, e é por isso que as redes de difração podem ser utilizadas para realizar medidas muito precisas de comprimentos de onda.

Ponto de verificação 6 Sabe-se que uma certa rede de difração tem um espaçamento entre linhas $d = 1 \times 10^{-3} \text{ mm}$. Observa-se que uma fonte de luz de comprimento de onda único produz um feixe de alta intensidade em um ângulo $\theta = 36^\circ$ com relação à normal. Se esse é o primeiro máximo em um ângulo não nulo, qual é o comprimento de onda da luz?

Esse comprimento de onda é emitido pelo sódio excitado, como em lâmpadas de vapor de sódio. Detectar esse comprimento de onda em alguma luz indica a presença de sódio excitado.

EXEMPLO

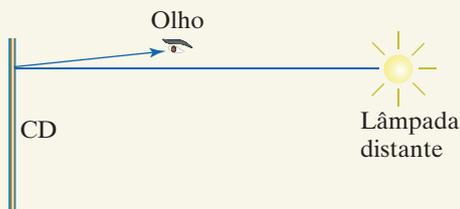


Figura S3.25 Olhando diretamente para um CD, você observa reflexão comum.

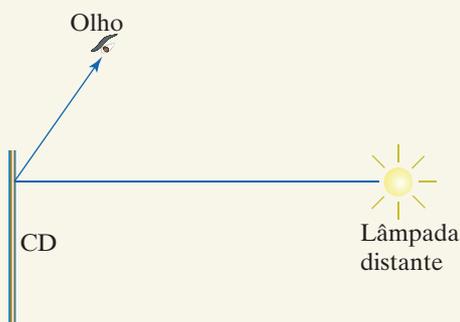


Figura S3.26 Olhando para um CD segundo um ângulo, você vê cores.

Experimentos com um CD

Segure um disco compacto (CD) quase perpendicularmente à linha entre o CD e uma lâmpada distante. Se você olhar quase perpendicularmente para uma região do CD nas vizinhanças da borda, verá uma reflexão comum da lâmpada (Figura S3.25). Enquanto segura o CD parado nessa posição, mova sua cabeça lentamente para longe da perpendicular (ou então incline o CD) enquanto continua a olhar para essa região do CD, até observar a primeira cor de um arco-íris (Figura S3.26).

- A primeira cor que você vê é o vermelho ou o violeta? (Experimente!) Por quê? (Para o violeta, $\lambda \approx 400$ nm; para o vermelho, $\lambda \approx 700$ nm.)
- Se continuar a mover sua cabeça para mais longe da perpendicular (ou a inclinar o CD), você observa um espectro completo. Se continuar para ângulos ainda maiores, você pode observar espectros adicionais. Quantos espectros completos você vê?
- Use suas observações nas partes (a) e (b) para estimar a distância entre as trilhas circulares do CD. Registre os dados em que baseou suas estimativas.
- O CD é lido com um laser infravermelho relativamente barato (com comprimento de onda maior que o do vermelho). Por que as trilhas não podem ser posicionadas mais próximas, para armazenar mais informação no CD? (Dispositivos mais recentes, como tocadores de DVD, utilizam lasers com menores comprimentos de onda.)

Solução

Primeiro, faça o experimento você mesmo!

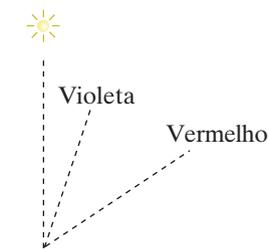


Figura S3.27 O violeta e o azul aparecem no menor ângulo. O amarelo e o vermelho aparecem em ângulos maiores.

- Afastando sua cabeça da perpendicular, a primeira cor que você vê é o violeta, que possui o comprimento de onda mais curto do espectro visível (Figura S3.27). Isso é o que se esperaria, porque, para que a luz reirradiada por todos os sulcos esteja em fase, $\sin \theta = \lambda/d$, logo o menor comprimento de onda terá um máximo no menor ângulo (d é o espaçamento entre os sulcos no CD).
- A maioria das pessoas vê três espectros, mas isso é um pouco complicado, porque você precisa manter sua cabeça em uma posição precisa.
- Determinamos que o primeiro máximo para a luz vermelha está em um ângulo θ_1 de cerca de 30° , e podemos obter um valor para d a partir do seguinte:

$$d \sin \theta = \lambda \quad (\text{primeiro máximo})$$

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta_1} \approx \frac{(700 \times 10^{-9} \text{ m})}{\sin 30^\circ} = 1400 \times 10^{-9} \text{ m} = 1400 \text{ nm}$$

Seguindo outro raciocínio, se vemos três espectros completos, o vermelho do terceiro espectro está em um ângulo $\theta_2 \approx 90^\circ$, donde podemos realizar um cálculo alternativo aproximado do espaçamento d .

$$d \sin \theta = 3\lambda \quad (\text{terceiro máximo})$$

$$d = \frac{3\lambda}{\sin \theta_1} \approx \frac{3(700 \times 10^{-9} \text{ m})}{\sin 90^\circ} = 2100 \times 10^{-9} \text{ m} = 2100 \text{ nm}$$

- Se o espaçamento d entre as trilhas for mais curto do que o comprimento de onda da luz incidente, não é possível resolver as imagens das duas trilhas (elas se superpõem). Se as trilhas estivessem mais próximas, o comprimento de onda da luz utilizada para ler a informação teria que ser mais curto.

Espalhamento da luz

No Capítulo 23, discutimos por que o céu é azul, o que envolve o fato de que a reirradiação da luz do Sol pelas moléculas do ar é dependente da frequência, com a

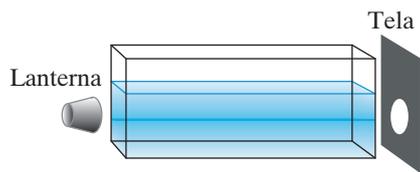


Figura S3.28 A luz passa através de um tanque de água e aparece sobre uma tela.

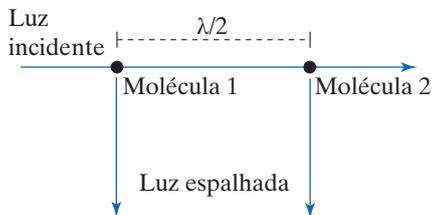


Figura S3.29 Vista de cima: reirradiação (espalhamento) de moléculas de água separadas por uma distância $\lambda/2$.

luz azul sendo mais intensamente reirradiada que a luz vermelha. Esse processo em que a luz que passa através de um meio quase transparente é parcialmente reirradiada para os lados é chamado de “espalhamento” (a luz é espalhada em direções diferentes da direção original).

Descreveremos um experimento que revela alguns aspectos de interferência que afetam fenômenos de espalhamento. Talvez seu professor realize essa demonstração. Uma luz branca brilhante é direcionada através de um longo tanque de vidro cheio de água, até atingir uma tela, onde aparece como um círculo branco (Figura S3.28). Se a água for bastante clara, muito pouca luz será espalhada para os lados.

Um enigma é por que quase não há luz espalhada para os lados. Afinal, há um enorme número de moléculas na água, e a luz que atinge essas moléculas acelera elétrons, levando a reirradiação. Consideraremos diferenças de caminho para diferentes moléculas e veremos onde podemos esperar luz de baixa intensidade ou de alta intensidade.

Para qualquer molécula na água, encontre uma segunda molécula adiante uma pequena distância $\lambda/2$, na direção de propagação da luz (Figura S3.29). Para os lados, a diferença de caminho da reirradiação vinda dessas duas moléculas é meio comprimento de onda, logo a intensidade é nula. Se pudermos arranjar todas as moléculas em pares dessa forma, podemos esperar baixa intensidade para os lados.

Podemos sempre encontrar um par adequado para cada molécula? A resposta para a água (ou o vidro) é sim, porque em um líquido ou sólido as moléculas estão logo ao lado umas das outras, preenchendo o espaço inteiro. Siga adiante uma distância $\lambda/2$, correspondente a cerca de $250 \text{ nm} = 2500$ diâmetros atômicos, e você pode ter certeza de encontrar uma molécula naquela posição (a não ser que você esteja a menos de $\lambda/2$ da extremidade do tanque de água, mas essa curta região contém muito pouca água). É verdade que as moléculas em um líquido têm uma certa liberdade de movimento, ao contrário das moléculas em um sólido, mas elas efetivamente preenchem o espaço em todos os instantes. Perceba que na direção de propagação da luz, diretamente através da água, em direção à tela, a reirradiação dessas duas moléculas está em fase, logo esperamos ver luz saindo pela extremidade do tanque de água, como de fato ocorre.

(É razoável perguntar o que aconteceria se combinássemos moléculas separadas por uma distância λ . Isso não produziria interferência construtiva? Sim, mas também teríamos que calcular como essa luz reirradiada interferiria com a luz de todos os demais pares separados por um comprimento de onda. Esse cálculo está além do escopo desta discussão, mas o resultado é que obtemos intensidade nula quando somamos todas as contribuições. A simplicidade do argumento em termos de pares de moléculas separadas por $\lambda/2$ vem do fato de que é fácil somar todas as intensidades nulas de todos esses pares para obter zero.)

Acréscimo um pouco de sabão à água

Em seguida despejamos na água algum material como sabão, para formar uma baixa concentração de partículas de material. Agora você vê alguma luz espalhada para os lados, com uma cor nitidamente azulada. Ao mesmo tempo, o círculo na tela torna-se ligeiramente avermelhado, porque a porção azul da luz branca foi espalhada mais do que a porção vermelha, deixando uma luz com uma componente azul diminuída. Como explicado no Capítulo 23, a luz azulada espalhada é fortemente polarizada, como você pode ver girando um pedaço de material polarizador em frente a seus olhos enquanto observa o tanque pela lateral. (Você também obtém um grande efeito girando um pedaço de plástico polarizador entre a fonte de luz e o tanque de água.)

O espalhamento visível deve-se ao número relativamente baixo de partículas de material na água que reirradiam em menor intensidade do que as moléculas de água que deslocam. Além disso, as partículas estão muito distantes entre si, em posições aleatórias, e não interferem destrutivamente entre si. Ou seja, se você seguir por uma distância $\lambda/2$ na direção de propagação da luz, a partir de uma partícula de sabão, não necessariamente encontrará uma outra partícula de sabão semelhante em sua posição.

Espalhamento de um gás

Há um ponto sutil na explicação sobre o céu ser azul. Por que há um espalhamento substancial para os lados no ar limpo, quando observamos pouco espalhamento na água? Um gás é diferente de um líquido ou sólido quanto ao fato de que as moléculas não estão em contato entre si, mas têm grande liberdade para perambular de um lado para o outro, com muito espaço entre as moléculas. Como as moléculas de ar não estão em posições relativamente fixas, o argumento da interferência destrutiva que utilizamos para a água não é válido.

Considere um cubo de ar cuja aresta mede somente $0,1\lambda$, nas condições normais de temperatura e pressão. Esse cubo contém um número surpreendentemente grande de moléculas, embora muito menor do que em um volume comparável de um sólido ou líquido:

$$N = (0,1 \times 500 \times 10^{-9} \text{ m}) \frac{6 \times 10^{23} \text{ moléculas}}{22,4 \text{ L}} \frac{1 \text{ L}}{1 \times 10^3 \text{ cm}^3} \frac{1 \times 10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3}$$

$$\approx 3000 \text{ moléculas}$$

Se houvesse exatamente 3000 moléculas em cada pequeno cubo de ar, haveria pouco espalhamento, devido à interferência destrutiva da radiação dos pares de cubos separados por uma distância de $\lambda/2$. Entretanto, o número de moléculas em cada cubo flutua aleatoriamente enquanto as moléculas perambulam para dentro e para fora do cubo. O espalhamento vindo do céu, que observamos e apreciamos, deve-se em larga medida às flutuações no número de moléculas por unidade de volume. Esse efeito é muito menos pronunciado para líquidos. Embora as moléculas de fato deslizem uma pela outra em um líquido, o número de moléculas por unidade de volume varia muito pouco, já que as moléculas permanecem em contato entre si. Obviamente não há quaisquer flutuações em um sólido, e se não houvesse impurezas ou imperfeições espaciais em um bloco de vidro não haveria espalhamento da luz que o atravessa.

Pode-se mostrar que a flutuação estatística típica de N moléculas em um dado volume de ar é igual à raiz quadrada de N . Os campos elétricos reirradiados por essas \sqrt{N} moléculas estão praticamente em fase entre si (já que estão em um volume pequeno em comparação a λ). Assim, a intensidade é proporcional a $(\sqrt{N})^2 = N$. O espalhamento é o que se poderia ingenuamente esperar — N vezes o espalhamento de uma única molécula!

S3.3 RESOLUÇÃO ANGULAR

Nesta seção examinaremos um conjunto de fenômenos que à primeira vista podem parecer não relacionados, mas que podem ser explicados pelos mesmos aspectos básicos do modelo ondulatório da luz. Estamos interessados nos seguintes fenômenos:

- O diâmetro de um espelho (ou lente) de telescópio determina se você vê duas estrelas distantes como dois pontos brilhantes separados ou como uma única mancha brilhante.
- Na interferência de dupla fenda, nem todos os máximos são igualmente brilhantes.
- A luz que passa através de uma única fenda exibe máximos e mínimos sobre uma tela posicionada à frente da fenda.
- A largura de uma rede de difração determina a separação angular dos máximos observados através dessa rede.

Todos esses fenômenos envolvem o que se chama “resolução angular”, e podem ser explicados em termos da equação para a abertura angular,

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{W}$$

em que W é a largura do dispositivo.

Largura angular de um máximo

Uma propriedade importante de uma rede de difração é que, na direção de um máximo, o feixe reirradiado é extremamente estreito. Qual é a largura (angular) precisa dos máximos observados quando luz monocromática passa através de uma rede de difração particular? Quanto mais estreito for o máximo, mais fácil é distinguir a luz de dois comprimentos de onda ligeiramente diferentes.

Largura de um máximo

Como definimos a “largura” de um máximo? Poderíamos dizer que a largura de um máximo é a distância angular entre a área mais brilhante de um máximo e a área mais escura próxima a ele — o mínimo adjacente. Nossa tarefa é calcular a posição do mínimo adjacente.

Suponha que θ seja o ângulo do primeiro máximo, com a diferença de caminho associada a diferentes fendas sendo igual a um comprimento de onda, de modo que

$$d \sin \theta = \lambda$$

Como o máximo está em um ângulo θ , escreveremos a posição do mínimo adjacente como $(\theta + \Delta\theta)$. Nossa tarefa é determinar o valor de $\Delta\theta$.

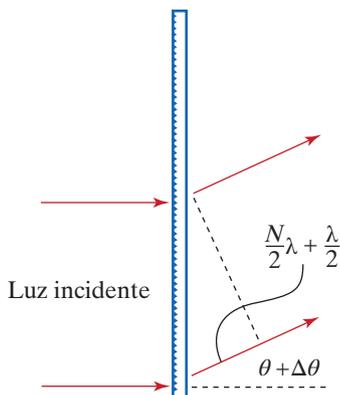


Figura S3.30 A primeira fenda e a fenda do meio de uma rede de difração produzem interferência destrutiva se a diferença de caminho associada a fendas adjacentes é $\lambda + \lambda/N$.

Condições para um mínimo

Destacamos que haverá um mínimo se a luz que passa através da primeira fenda interfere destrutivamente (Figura S3.30) com a luz que passa através da $(N/2)$ -ésima fenda (a fenda do meio). Isso faz lembrar o argumento que utilizamos quando consideramos o espalhamento lateral da luz por um líquido. Supomos aqui que haja um número par N de fendas (ou, se N for ímpar, desprezamos a pequena quantidade de luz que passa através da última fenda).

Para o primeiro máximo não trivial (não diretamente adiante), a diferença de caminho associada a fendas adjacentes é igual a um comprimento de onda, logo a diferença de caminho entre a luz que passa pela primeira fenda e a luz que passa pela $(N/2)$ -ésima fenda é $(N/2)\lambda$. Para um mínimo, essa diferença de caminho é adicionada de $\lambda/2$:

$$\left(\frac{N}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2}\lambda$$

Considere agora o próximo par de fendas, a fenda número 2 e a fenda número $(N/2 + 1)$. A elas também está associada uma diferença de caminho de $\lambda/2$, logo elas também interferem destrutivamente. Conseguimos combinar todas as fendas em pares tais que a contribuição de cada um deles para a intensidade é nula, logo a intensidade total na direção $\theta + \Delta\theta$ é nula.

Escreva a diferença de caminho associada a fendas adjacentes da seguinte forma:

$$d \sin(\theta + \Delta\theta) = \lambda + \varepsilon, \quad \text{em que } \varepsilon \text{ é uma pequena fração de } \lambda$$

A diferença de caminho entre a luz que passa pela primeira fenda e a luz que passa pela $(N/2)$ -ésima fenda é a seguinte:

$$\frac{N}{2}(\lambda + \varepsilon) = \left(\frac{N}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2}\lambda$$

Resolvendo para ε , chegamos a

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{N}$$

Determinando $\Delta\theta$

Agora determinamos $\Delta\theta$ utilizando identidades trigonométricas para expandir essa relação para duas fendas adjacentes:

$$d \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = \lambda + \varepsilon = \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$d \operatorname{sen} \theta \cos \Delta\theta + d \cos \theta \operatorname{sen} \Delta\theta = \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Como $\Delta\theta$ é um ângulo pequeno, podemos utilizar as aproximações de que

$$\cos \Delta\theta \approx 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \Delta\theta \approx \Delta\theta$$

logo

$$d \operatorname{sen} \theta + d (\cos \theta) \Delta\theta \approx \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

Já que $d \operatorname{sen} \theta = \lambda$,

$$d (\cos \theta) \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{N} \quad \text{e} \quad \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

A largura total W da rede de difração é N vezes a largura de uma fenda:

$$W = Nd$$

A menos que θ seja próximo de 90° , $\cos \theta$ é de ordem 1, logo descobrimos que $\Delta\theta$, a “meia largura” do máximo, é aproximadamente dada pelo seguinte:

MEIA LARGURA ANGULAR DE UM MÁXIMO

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{W}$$

em que W é a largura total (da parte iluminada) do dispositivo.

Embora tenhamos demonstrado isso apenas para uma rede de difração, esse resultado é bastante geral. Para qualquer dispositivo contendo um grande número de fontes que interferem, a largura angular de um feixe de máxima intensidade é aproximadamente igual ao comprimento de onda dividido pela largura total do dispositivo. Para luz visível que atinge uma rede de difração com 2 cm de largura, a largura angular pode ser muito pequena: $\Delta\theta \approx \lambda/W \approx (600 \times 10^{-9} \text{ m}) / (2 \times 10^{-2} \text{ m}) = 3 \times 10^{-5} \text{ rad}$, que corresponde a menos de 2 milésimos de grau.

Um argumento geométrico alternativo

Em vez de utilizarmos identidades trigonométricas, como fizemos antes, podemos determinar $\Delta\theta$ através de um argumento geométrico envolvendo duas fendas adjacentes (Figura S3.31). No triângulo tracejado, o lado oposto ao pequeno ângulo $\Delta\theta$ é $\varepsilon = \lambda/N$, porque esse é o comprimento de caminho adicional que gera um mínimo. A hipotenusa é aproximadamente $d \cos \theta$. O ângulo $\Delta\theta$, em radianos, é aproximadamente igual à razão entre o lado oposto e a hipotenusa:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda/N}{d \cos \theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{\lambda}{W \cos \theta}$$

em que W é a largura total da rede ($W = Nd$). Este é um resultado extremamente importante: quanto mais larga é a rede, mais estreito é o feixe. A menos que θ seja próximo de 90° , $\cos \theta$ é de ordem 1, logo obtemos, como antes:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{W}$$

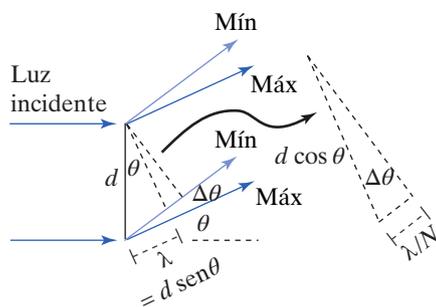


Figura S3.31 Duas fendas adjacentes em uma rede de difração por transmissão, com um máximo em θ e um mínimo em $\theta + \Delta\theta$.

E quanto à forma de combinação das fendas em pares?

Você pode se perguntar se teríamos obtido um cancelamento completo se tivéssemos escolhido outras formas de combinar as fendas em pares, em vez de combinar

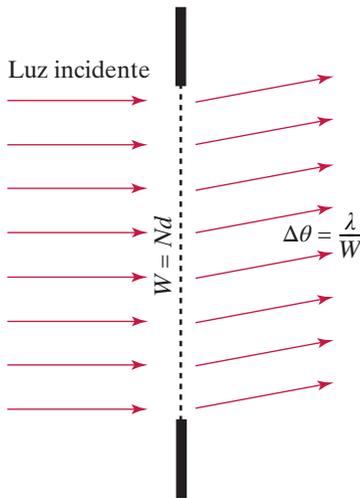


Figura S3.32 O primeiro mínimo para uma única fenda ocorre para $\Delta\theta \approx \lambda/W$.

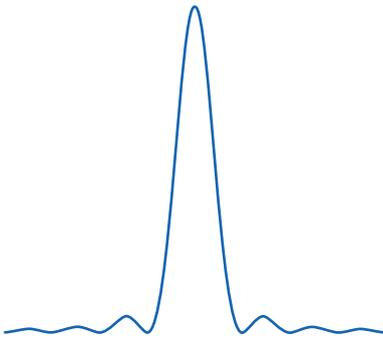


Figura S3.33 O padrão de intensidade como função do ângulo para a difração de fenda única.

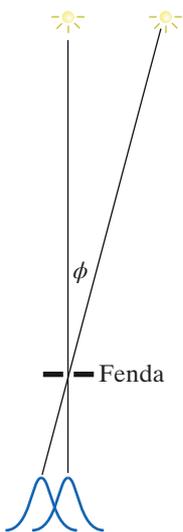


Figura S3.34 A luz de duas estrelas distantes passa através da abertura de um telescópio. A meia largura da imagem de cada estrela alargada pela difração determina se será ou não possível distinguir as duas imagens.

a primeira fenda com a fenda do meio e assim por diante. Por exemplo, a diferença de caminho associada à primeira e à última fenda é $N\lambda + \lambda$, logo elas dão origem a interferência construtiva. Entretanto, esse é o único par para o qual isso ocorre, e se fôssemos somar os efeitos de todas as outras fendas descobriríamos que seus efeitos combinados cancelariam a reirradiação das fendas das bordas. Uma vez que tenhamos demonstrado que há algum arranjo de pares que produz uma intensidade resultante nula, não é realmente preciso considerar outros arranjos.

Difração de fenda única

O que uma rede de difração tem a ver com máximos e mínimos criados quando a luz passa através de uma única fenda? Assim como duas fendas estreitas atravessadas por luz são equivalentes a duas estreitas fontes de luz, também podemos modelar uma única fenda larga, de largura W , como equivalente a um grande número N de fontes muito estreitas separadas entre si por uma distância $d = W/N$. (Na realidade, a soma sobre N fontes finitas transforma-se em uma integral sobre um número infinito de fendas infinitesimais.) Obviamente há um máximo diretamente adiante, mas há um mínimo em um pequeno ângulo $\Delta\theta$ dado aproximadamente por λ/W (Figura S3.32). O padrão completo de intensidade parece com a Figura S3.33.

Isso também explica a variação da intensidade dos máximos de interferência de dupla fenda. Cada fenda produz um padrão como o da Figura S3.33, e esses dois padrões interferem. O padrão de intensidade é o efeito combinado da difração de fenda única com a interferência de dupla fenda.

Ponto de verificação 7 Para ter uma ideia da magnitude desses efeitos de “difração”, considere uma fenda única de largura $W = 0,1$ mm, iluminada por luz violeta. O comprimento de onda λ da luz violeta é de cerca de 400 nm (400×10^{-9} m). A luz da fenda atinge uma tela posicionada a uma distância $L = 1$ m = 1000 mm da fenda, e a imagem da fenda é muito mais larga que 0,1 mm, devido à quantidade significativa de luz que segue em ângulos que chegam a mais ou menos λ/W (totalizando um alargamento angular de $2\lambda/W$). Calcule essa largura total em milímetros.

Resolução telescópica limitada por difração

Quando um telescópio produz uma imagem de uma estrela distante sobre uma placa fotográfica ou uma matriz de detectores eletrônicos, a imagem é alargada pela difração, que espalha os raios de luz em um cone com uma meia largura angular aproximada $\Delta\theta \approx \lambda/W$. As imagens das duas estrelas muito próximas no céu podem ser tão alargadas que se superpõem e não podem ser “resolvidas” em duas imagens separadas (Figura S3.34). O “poder resolutivo” ou “resolução” de um telescópio ou câmera é limitado pela difração. Quanto mais larga é a lente, mais nítida é a imagem (quanto maior W , menor $\Delta\theta$). Visto de outra forma, quanto mais curto o comprimento de onda, mais nítida é a imagem (quanto menor λ , menor $\Delta\theta$). Uma regra prática para resolução afirma que se ϕ , o ângulo entre as estrelas, é maior que $2\Delta\theta$, as imagens são resolvíveis.

Radiotelescópios utilizados em observações astronômicas são às vezes conectados eletronicamente a outros radiotelescópios localizados a milhares de quilômetros, de modo a produzir uma “lente” de radiofrequência com um diâmetro tão grande que o alargamento por difração é extremamente pequeno. Isso tornou possível obter imagens finamente detalhadas de estruturas extremamente distantes.

É muito mais difícil fazer isso com telescópios ópticos comuns que capturam luz visível, pois é preciso levar a luz de dois telescópios diferentes até o mesmo local, onde a interferência pode ocorrer. Apesar disso, hoje em dia há pares conectados de grandes telescópios ópticos com espelhos, para levar luz dos dois telescópios até um local de observação entre os telescópios. Isso torna possível obter imagens com resolução muito mais alta do que a que se pode obter com telescópios ópticos mais antigos.

Um único grande pico de difração

Com poucas fontes, muitas vezes encontramos diversos picos intensos completamente construtivos, correspondentes a uma diferença de caminho associada a fontes vizinhas igual a $0, \lambda, 2\lambda$ e assim por diante. Mesmo uma rede de difração com muitas fontes pode produzir diversos feixes de máxima intensidade. A situação é diferente para a difração de uma fenda única.

QUESTÃO Explique por que uma fenda (ou lente) única produz apenas um grande pico (há picos menores, mas apenas um grande pico).

Com uma fenda única, a diferença de caminho d associada a fontes adjacentes é uma quantidade infinitesimal, e portanto não pode jamais ser tão grande quanto λ . Não há uma direção (além de $\theta = 0$) para a qual todas as amplitudes estão em fase.

Ponto de verificação 8 Os satélites utilizados para mapear fotograficamente a Terra situam-se tipicamente a cerca de 160 km acima da superfície da Terra, onde quase não há atmosfera para afetar a órbita. Se a lente da câmera de um satélite tem um diâmetro de 15 cm, qual deve ser aproximadamente a distância entre dois objetos na superfície da Terra para que eles possam ser resolvidos como dois objetos, se a resolução for limitada principalmente por difração? O ponto central é que o ângulo subtendido pelos dois objetos deve ser comparável ou maior que o alargamento angular $2\Delta\theta$ introduzido pela difração da luz que passa através da lente. A luz visível tem comprimentos de onda entre 400 nm e 700 nm; considere um comprimento de onda em algum ponto do meio do espectro. Você deve concluir que os números na placa de um carro aparecem borrados demais para que possam ser lidos.

S3.4 ONDAS MECÂNICAS

Ondas mecânicas têm muito em comum com as ondas luminosas. Um exemplo de onda mecânica é a propagação do som em um sólido, que foi discutida no Capítulo 4. Outros exemplos de ondas mecânicas incluem ondas em uma corda tensionada, ondas na água e sons propagando-se através do ar.

Nas páginas seguintes derivaremos a equação da onda, uma equação geral que descreve todos os tipos de ondas:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Nessa equação diferencial parcial, u representa alguma quantidade que está “ondulando” no tempo, no espaço ou em ambos, com a onda movendo-se ao longo do eixo x , e v é uma constante igual à velocidade de propagação. Por exemplo, a quantidade u pode representar a deflexão de um átomo, em relação a sua posição de equilíbrio, em um sólido através do qual o som se propaga, ou a deflexão de um segmento de uma corda ao longo da qual um pulso se move. (A quantidade u poderia também representar o campo elétrico na radiação eletromagnética em alguma posição no espaço, caso em que $v = c$.)

O significado de $\partial u(x,t) / \partial t$ é “a derivada de u com respeito a t , mantendo x constante”. Essa derivada parcial representa a taxa de variação com o tempo da deflexão de um átomo (ou do campo elétrico) em uma posição particular x . De forma semelhante, o significado de $\partial u(x,t) / \partial x$ é “a derivada de u com respeito a x , mantendo t constante”. Ou seja, fotografe a onda em um instante particular t e veja como u muda de uma posição x até uma posição vizinha.

A equação da onda: ondas longitudinais

No Capítulo 4, discutimos a velocidade do som em um sólido e apresentamos uma análise dimensional que sugeria que a velocidade deveria ser aproximadamente $v \approx \omega d = \sqrt{k_{m,i}/m_a d}$, sendo $k_{m,i}$ a constante elástica efetiva da ligação interatômica

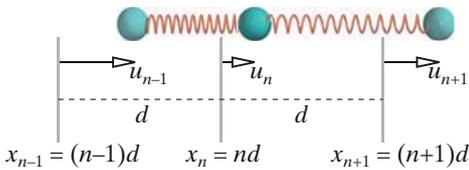


Figura S3.35 Três dos átomos em uma longa fileira de átomos conectados por molas representando as ligações interatômicas. Cada átomo foi deslocado de sua posição de equilíbrio por uma quantidade u .

modelada como uma mola e m_a a massa de um átomo. Derivaremos a equação da onda para essa situação, a partir de uma visão microscópica, e a utilizaremos para mostrar que nossa expressão para v é de fato correta, desde que o comprimento de onda seja muito maior que a distância interatômica d , como quase sempre é o caso.

A Figura S3.35 mostra três dos átomos em uma longa fileira de átomos conectados por molas que representam as ligações interatômicas. Escolhemos nosso sistema de coordenadas de modo que o primeiro átomo na extremidade esquerda esteja localizado em $x = 0$ (não mostrado), e assim a posição de equilíbrio do n -ésimo átomo é nd se a distância de equilíbrio entre os átomos é d . Se um pulso desloca-se ao longo da fileira de átomos, os átomos serão temporariamente deslocados de suas posições normais, de equilíbrio. Isso é o que se chama de onda longitudinal, em que os deslocamentos dos átomos ocorrem na mesma direção do movimento da onda.

Chamaremos de u_n o deslocamento instantâneo do n -ésimo átomo da sua posição de equilíbrio, e a posição instantânea do n -ésimo átomo é $nd + u_n$, como mostrado na imagem da Figura S3.35. Calcularemos a força resultante atuando sobre o n -ésimo átomo, em termos da constante elástica das molas, e então utilizaremos o Princípio do Momento para determinar como o momento do n -ésimo átomo muda com o tempo. Mostraremos que o Princípio do Momento toma a forma de uma equação da onda, a partir da qual seremos capazes de determinar a velocidade de propagação de um pulso ao longo da fileira de átomos (a velocidade do som).

Por generalidade, a fileira de átomos pode estar sob tensão (ou compressão), de modo que a distância d entre os átomos pode ser maior (ou menor) que d_0 , o comprimento relaxado da mola.

A força atuando sobre o n -ésimo átomo

Calcularemos a componente x da força resultante sobre o n -ésimo átomo, que por conveniência escreveremos compactamente como F_n . Calcularemos de quanto as molas à direita e à esquerda do n -ésimo átomo estão esticadas (ou comprimidas), o que podemos expressar em termos das posições instantâneas dos átomos e do comprimento relaxado das molas, o qual, para um sólido que não está sob tensão ou compressão, é simplesmente a distância interatômica d (veja a Figura S3.35):

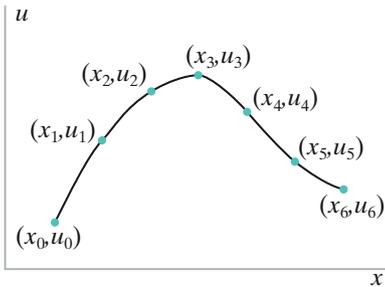


Figura S3.36 Imaginamos uma função contínua $u(x)$ que passa pelas posições atômicas reais. Essa é uma imagem da onda em um instante particular.

$$\begin{aligned} \text{deformação à direita} &= L - L_0 = [(n+1)d + u_{n+1}] - (nd + u_n) - d \\ &= u_{n+1} - u_n \\ \text{deformação à esquerda} &= L - L_0 = [nd + u_n] - [(n-1)d + u_{n-1}] - d \\ &= u_n - u_{n-1} \\ F_n &= k_{m,i}[\text{deformação à direita} - \text{deformação à esquerda}] \\ &= k_{m,i}[(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})] \end{aligned}$$

Perceba que na expressão para F_n o espaçamento interatômico d é cancelado. Entretanto, veremos que d de fato aparece na velocidade do som que calcularemos.

É útil pensar em u como uma função suave (contínua) de x . Isso é ilustrado na Figura S3.36, uma imagem da onda em um instante particular, em que imaginamos uma função contínua $u(x)$ que passa pelas posições reais dos átomos. Em nossa expressão para a força sobre o n -ésimo átomo, os termos $(u_{n+1} - u_n)$ e $(u_n - u_{n-1})$ aparecem na definição da derivada $\partial u / \partial x$ (mantendo t constante) se aproximarmos um pequeno Δx pela distância de equilíbrio entre os átomos, d :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\text{direita}} &\approx \frac{u_{n+1} - u_n}{d} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\text{esquerda}} &\approx \frac{u_n - u_{n-1}}{d} \end{aligned}$$

Podemos levar essa ideia um passo adiante, considerando a segunda derivada de u :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(\partial u / \partial x)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{direita}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{esquerda}}}{d} \\ &\approx \frac{(u_{n+1} - u_n)/d - (u_n - u_{n-1})/d}{d} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})}{d^2}\end{aligned}$$

O numerador nessa expressão aparece na expressão para a força sobre um átomo, de modo que podemos escrever o seguinte, em que explicitamos que u é na verdade uma função tanto de x quanto de t :

$$F \approx k_{m,i} d^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

QUESTÃO Que aproximações fizemos ao derivar essa expressão para a força sobre um átomo?

Nosso resultado depende de ser válido tratar u como uma função contínua de x que pode ser diferenciada, enquanto na realidade u tem valores apenas nas posições $x = 0, d, 2d$ etc. Podemos esperar que nosso resultado seja bastante preciso desde que a forma do pulso que viaja varie de maneira relativamente suave de um átomo para o seguinte, o que é tipicamente o caso para ondas sonoras percorrendo um sólido. Por exemplo, o dó médio em um piano tem uma frequência de 256 Hz (256 ciclos por segundo). No alumínio, a velocidade do som é $v = 4800$ m/s, de modo que o comprimento de onda de uma onda sonora de 256 Hz no alumínio é $(4800 \text{ m/s}) / (256 \text{ ciclos/s}) = 18,75$ m. Esse comprimento de onda é enorme comparado à distância entre os átomos, e assim u nesse caso é de fato uma função que varia lentamente de um átomo para o seguinte.

Uma reflexão: por que a força é proporcional a uma segunda derivada? Descubramos que o estiramento à direita do n -ésimo átomo é $u_{n+1} - u_n + d$, e o estiramento à esquerda é $u_n - u_{n-1} + d$. Como vimos, $u_{n+1} - u_n$ e $u_n - u_{n-1}$ relacionam-se à primeira derivada de u com respeito a x . Se ambas as molas têm a mesma deformação, a força resultante sobre o n -ésimo átomo é nula. Isso corresponde a uma fileira de átomos (ou a um fio macroscópico formado por esses átomos) que está tensionada devido a forças aplicadas em ambas as extremidades, mas não há movimento ondulatório, apenas equilíbrio. Para haver movimento ondulatório, em alguma posição ao longo da fileira de átomos tem que haver uma diferença entre o estiramento à direita e o estiramento à esquerda, o que significa uma diferença em $\partial u / \partial x$, ou seja, uma segunda derivada $\partial^2 u / \partial x^2$ não nula. Um átomo pode estar em movimento sob força resultante nula, desde que sua velocidade não esteja variando naquele instante.

Aplicando o Princípio do Momento

A taxa de variação do momento do n -ésimo átomo é obviamente igual à força resultante atuando sobre esse átomo, e com a aplicação do Princípio do Momento a esse átomo seremos capazes de determinar a velocidade do pulso percorrendo a fileira de átomos. Para velocidades pequenas comparadas à velocidade da luz,

$$\frac{dp_x}{dt} \approx m_a \frac{dv_x}{dt} = m_a \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{res},x}$$

em que m_a é a massa de um átomo. A posição do n -ésimo átomo é $x_n = nd + u_n$. A taxa de variação do momento do n -ésimo átomo na cadeia de átomos é

$$m_a \frac{\partial^2 (nd + u_n)}{\partial t^2} = m_a \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$$

já que n e d não variam com o tempo. Note que escrevemos dp_x/dt em termos de uma derivada temporal, e a força resultante sobre um átomo em termos de uma derivada espacial.

Dispensando o subscrito n , o Princípio do Momento para qualquer átomo é o seguinte, em que novamente m_a é a massa de cada átomo e $k_{m,i}$ é a constante elástica efetiva da mola interatômica:

$$m_a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F = k_{m,i} d^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{k_{m,i} d^2}{m_a} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Esse resultado tem a forma da equação da onda introduzida anteriormente, se fizermos a substituição

$$v^2 = \frac{k_{m,i} d^2}{m_a}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k_{m,i}}{m_a}} d$$

Mostraremos que $|v|$ é a velocidade de propagação da onda, e que o sinal determina o sentido de propagação. Esse é o mesmo resultado obtido por análise dimensional, no Capítulo 4, para a velocidade do som em um sólido, mas apenas por análise dimensional não saberíamos se a velocidade teria o dobro desse valor, ou um terço desse valor etc. O sinal \pm para v , resultante de tomar a raiz quadrada, significa que tanto uma onda movendo-se para a direita quanto uma movendo-se para esquerda são soluções da equação da onda.

QUESTÃO Suponha que você estique uma fileira de N átomos, de modo que a distância interatômica aumente para $d + s$. Como isso afeta a velocidade do som v ? (*Dica:* examine como a força resultante depende de s .) Como isso afeta o tempo para a onda propagar-se de uma extremidade à outra da fileira de átomos?

Se você examinar nossos cálculos da força resultante sobre um átomo, descobrirá que o s no estiramento à direita e o s no estiramento à esquerda se cancelam, e assim a velocidade do som não muda. O tempo que a onda leva para se mover ao longo do comprimento de uma fileira de N átomos, um comprimento que agora é $N(d + s)$, aumenta porque a onda tem que ir (um pouco) mais longe. A mudança no comprimento de uma barra metálica quando você a estica é, claro, tipicamente muito pequena, e assim esse é um efeito pequeno.

Uma solução da equação da onda

Apesar de sua aparente complexidade, a equação da onda tem um solução bastante simples. Podemos mostrar que a função

$$u(x,t) = f(x - vt)$$

em que v é a velocidade da onda, satisfaz a equação da onda e representa um pulso viajando para a direita (o sentido $+x$) ao longo da cadeia de átomos, não importa qual seja a forma exata da função f . Por exemplo, $u(x,t) = 5 \cos [10(x - 3t)]$ é uma solução possível da equação da onda. Uma componente do campo elétrico em uma onda eletromagnética progressiva poderia ser expressa como $E(x,t) = E_0 \sin [k(x - ct)]$.

Na Figura S3.37, no instante t o pico de um pulso está na posição x e em um instante ligeiramente posterior $t + \Delta t$ o pico do pulso moveu-se para uma posição próxima $x + \Delta x$. Para que o pico da onda tenha se movido como mostrado na Figura S3.37, devemos ter

$$f(x + \Delta x - v(t + \Delta t)) = f(x - vt)$$

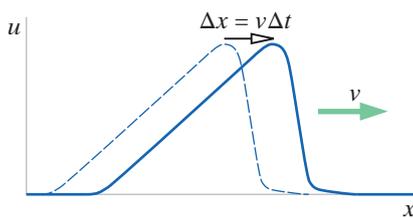


Figura S3.37 Um pulso move-se para a direita ao longo de uma fileira de átomos, percorrendo uma distância $\Delta x = v\Delta t$ a uma velocidade v durante um tempo Δt . A quantidade u representa a deflexão de um átomo em relação a sua posição de equilíbrio.

Isso será verdadeiro se $\Delta x - v\Delta t = 0$, o que significa que $v = \Delta x/\Delta t$, o que, é claro, é apenas a definição de velocidade. Evidentemente um pulso descrito por $u(x,t) = f(x - vt)$, com v um número positivo, representa um pulso viajando para a direita com velocidade v . Outra forma de ver que $u = f(w)$, em que $w = x - vt$, deve representar uma onda viajando para a direita é que, para manter constante o argumento $w = x - vt$ quando o tempo t cresce, a coordenada de posição x deve aumentar.

QUESTÃO Que tipo de onda é representada pela função $u(x,t) = f(x + vt)$, sendo v um número positivo?

À medida que o tempo t avança (aumenta), x deve decrescer para que o argumento da função, $x + vt$, permaneça o mesmo. Portanto, $u(x,t) = f(x + vt)$ deve representar uma onda viajando para a esquerda.

Esse pulso progressivo é consistente com a equação da onda? Precisamos tomar derivadas parciais da função $u(w)$, em que $w = x - vt$. Perceba que a derivada de u com relação a w é ordinária, não parcial, porque u é função de uma única variável $w = x - vt$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{du}{dw} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{du}{dw}(-v) \quad \text{utilizando a regra da cadeia para derivadas} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{du}{dw}(-v) \right) = \frac{d}{dw} \left(\frac{du}{dw}(-v) \right) \frac{\partial w}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 u}{dw^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{du}{dw}(1) \quad \text{utilizando a regra da cadeia para derivadas} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dw}(1) \right) = \frac{d}{dw} \left(\frac{du}{dw} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d^2 u}{dw^2} \end{aligned}$$

Esses resultados nos dizem que podemos escrever a seguinte igualdade, que mostra que $u = f(x - vt)$ é de fato consistente com equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Ao mostrarmos que o v na equação da onda representa a velocidade de propagação de uma onda, provamos que a velocidade do som em um sólido é de fato $v = \sqrt{k_{m,i}/m_a d}$.

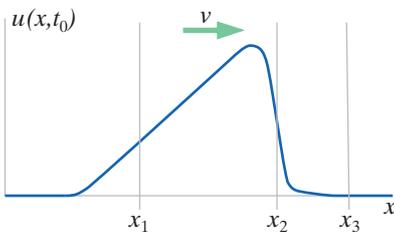


Figura S3.38 Uma fotografia, no instante $t = t_0$, de um pulso movendo-se para a direita com velocidade v . Qual é a posição, em função do tempo, das seções da corda nas coordenadas x_1, x_2 e x_3 ?

Um pulso progressivo

A Figura S3.38 é uma fotografia de um pulso que se propaga para a direita ao longo de uma corda tensionada. A imagem mostra $u(x, t_0)$ em todas as posições x , em um instante particular $t = t_0$. O significado de $u(x, t) = f(x - vt)$ pode ser esclarecido considerando os movimentos futuros da corda nas posições marcadas x_1, x_2 e x_3 . Na figura abaixo há gráficos de u versus t nessas três posições, começando no instante $t = t_0$:

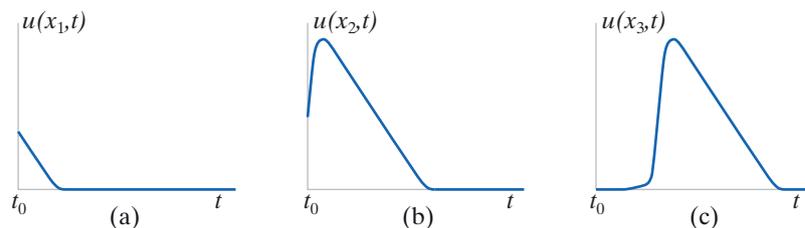


Figura S3.39 u em função de t nas três posições diferentes mostradas na Figura S3.38: x_1, x_2 e x_3 .

Posição x_1 : enquanto o pulso move-se para a direita, u diminui (veja as Figuras S3.38 e S3.39a); a velocidade dessa seção da corda aponta para baixo. A borda traseira do pulso acaba por ultrapassar a posição x_1 , e essa seção da corda não mais se move.

Posição x_2 : enquanto o pulso move-se para a direita, u inicialmente aumenta (velocidade para cima), atinge um máximo quando o pico alcança x_2 (velocidade momentaneamente nula), e então decresce (velocidade para baixo; veja as Figuras S3.38 e S3.39b). Novamente, quando a borda traseira ultrapassa a posição x_2 , essa seção da corda não mais se move.

Posição x_3 : quando a borda dianteira do pulso atinge a posição x_3 , u começa a mover-se para cima. Alcança um máximo quando o pico do pulso atinge a posição x_3 , depois decresce até a borda traseira do pulso ultrapassar a posição x_3 , e em seguida essa seção da corda não mais se move. O gráfico de u versus t (Figura S3.39c) parece uma imagem especular da forma do pulso, u versus x (Figura S3.38).

Perceba que os gráficos de u versus t na Figura S3.39 têm uma escala horizontal diferente do gráfico de u versus x na Figura S3.38.

Uma visão macroscópica da velocidade do som

No Capítulo 4, vimos que o módulo de Young, Y , uma razão macroscópica entre tensão (a força por unidade de área) e deformação (o estiramento relativo), pode ser expresso em termos de quantidades microscópicas: $Y = k_{m,i}/d$. Além disso, a densidade ρ do material pode ser escrita como $\rho = m_a/d^3$, porque cada átomo ocupa um minúsculo cubo de aresta d (no caso simples de uma rede cúbica). A velocidade do som em um sólido pode ser expressa em termos de quantidades macroscópicas:

$$v = \sqrt{\frac{k_{m,i}}{m_a}} d = \sqrt{\frac{Yd}{m_a}} d = \sqrt{\frac{Yd^3}{m_a}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

É possível mostrar que para ondas sonoras no ar, que são ondas longitudinais nas quais a pressão do ar varia juntamente com a densidade, $v = \sqrt{B/\rho}$, em que o “módulo volumétrico” B é definido como a variação na pressão P dividida pela mudança relativa correspondente na densidade ρ :

$$B = \frac{\Delta P}{\Delta \rho / \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho}$$

As unidades de B e do módulo de Young Y são as mesmas: força por unidade de área, N/m^2 . À temperatura ambiente, as ondas sonoras no ar propagam-se a uma velocidade de cerca de 340 m/s.

Superposição

Há uma propriedade de superposição das soluções da equação da onda. Se as funções $f(x,t)$ e $g(x,t)$ são ambas soluções da equação da onda, então a soma dessas duas soluções, $h(x,t) = f(x,t) + g(x,t)$, também é solução da equação da onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(f(x,t) + g(x,t))}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2(f(x,t) + g(x,t))}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Os primeiros termos à esquerda e à direita são iguais entre si, e os segundos termos à esquerda e à direita são iguais entre si, de modo que a equação da onda é satisfeita. Um corolário simples dessa propriedade de superposição é que múltiplos de uma solução, como $6,3f(x,t)$, são soluções se $f(x,t)$ é uma solução.

Essa importante propriedade de superposição é verdadeira porque a equação da onda é “linear” na função solução, que aparece apenas em primeira ordem. Se a função aparecesse na equação ao quadrado, por exemplo, não seríamos capazes de mostrar que a soma de duas soluções é também uma solução.

Essa propriedade de superposição será importante em uma seção posterior sobre ondas estacionárias.

A equação da onda: ondas transversais

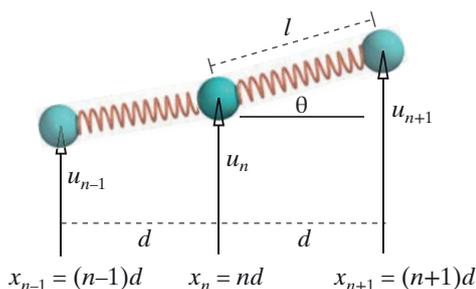


Figura S3.40 Uma fotografia de três átomos vizinhos em uma fileira de átomos ao longo da qual passa uma onda transversal.

Se o movimento dos átomos for perpendicular à direção do movimento da onda, trata-se do que se chama de uma onda transversal. Um exemplo é uma onda que se move ao longo de uma corda, ou ondas na água. Analisaremos uma onda progressiva transversal ao longo de uma fileira de átomos conectados por molas representando a força elétrica interatômica. A análise é muito semelhante à análise de uma onda longitudinal, mas os detalhes da geometria levam a uma previsão diferente para a velocidade da onda.

Na Figura S3.40 mostramos uma fotografia das posições dos átomos durante a passagem de uma onda transversal. De forma semelhante à nossa análise das ondas longitudinais, chamaremos a posição transversal do n -ésimo átomo de u_n .

Considere a mola à direita do n -ésimo átomo na Figura S3.40. Faremos a aproximação de que o ângulo θ é pequeno o suficiente para que o comprimento l da mola seja quase o mesmo que d , a distância de equilíbrio entre átomos. Essa aproximação de pequenos ângulos pode ser bastante precisa. Corresponde a dizer que $d/l = \cos \theta \approx 1$. Você pode testar isso na sua calculadora. Quanto é $\cos(5^\circ)$? (0,996.) Quanto é $\cos(10^\circ)$? (0,985.) Contudo que possamos supor que o ângulo de uma mola com a horizontal é pequeno, o comprimento l da mola é sempre aproximadamente igual a d , a distância de equilíbrio entre átomos.

Como a força que uma mola exerce sobre um átomo é proporcional ao estiramento, e todas as molas têm praticamente o mesmo comprimento d , a magnitude da força exercida por cada mola é praticamente a mesma, $k_{m,i}(d - d_0)$, sendo d_0 o comprimento relaxado da mola. Essa é a chamada tensão $F_T = k_{m,i}(d - d_0)$, que é praticamente a mesma ao longo de toda a cadeia de átomos.

Embora a magnitude da força de cada mola seja (praticamente) a mesma, as direções não são as mesmas, como você pode ver na Figura S3.40. Para pequenos ângulos, $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx (u_{n+1} - u_n)/d$. Você pode testar isso na sua calculadora. Quanto é $\sin(5^\circ)$? (0,0872.) Quanto é $\text{tg}(5^\circ)$? (0,0875.) Portanto, as componentes x e u das forças elásticas aplicadas à esquerda e à direita do n -ésimo átomo são as seguintes:

$$\begin{aligned} F_{n,x} &= F_T \cos \theta_n - F_T \cos \theta_{n-1} \\ F_{n,x} &\approx F_T - F_T = 0 \\ F_{n,u} &= F_T \sin \theta_n - F_T \sin \theta_{n-1} \\ F_{n,u} &\approx F_T \left[\frac{u_{n+1} - u_n}{d} - \frac{u_n - u_{n-1}}{d} \right] \end{aligned}$$

Como na análise das ondas longitudinais, imaginamos uma função contínua $u(x,t)$ que passa através dos pontos (x_n, u_n) e supomos que a variação de u de um átomo ao seguinte é pequena (comprimento de onda longo comparado à distância interatômica d). Tiramos um instantâneo (congelamos o movimento) e escrevemos derivadas parciais com respeito a x :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{direita}} &\approx \frac{u_{n+1} - u_n}{d} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{esquerda}} &\approx \frac{u_n - u_{n-1}}{d} \\ F_{n,u} &\approx F_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{direita}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{esquerda}} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{direita}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{esquerda}}}{d} = \frac{\left(\frac{F_{n,u}}{F_T} \right)}{d} \\ F_{n,u} &= F_T d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Portanto, o Princípio do Momento nos fornece a seguinte forma da equação da onda no caso de ondas transversais:

$$m_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_T d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se dividimos por m_a , obtemos uma equação que tem o aspecto da equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{F_T d}{m_a} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Comparando com a forma geral da equação da onda, vemos que

$$v^2 = \frac{F_T d}{m_a}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{F_T d}{m_a}}$$

Na Seção S3.9, há uma dedução opcional da equação da onda para a luz, que é uma onda transversal.

Uma visão macroscópica das ondas transversais

Por concretude, consideramos uma única fileira de átomos, mas no interior de um material cristalino (um material com uma rede ordenada de átomos) há, é claro, muitas fileiras paralelas de átomos, e há forças “de mola” entre os átomos em fileiras vizinhas. Por essa razão, ondas transversais no interior de um bloco de metal são mais complicadas que ondas ao longo de uma hipotética fileira única de átomos.

Entretanto, podemos imediatamente aplicar nosso resultado a um objeto macroscópico. Considere uma corda de massa muito pequena, sob uma tensão F_T , ao longo da qual são fixadas contas de massa m_a , igualmente espaçadas de uma distância d . A “densidade linear” (massa por unidade de comprimento) é $\mu = m_a/d$. A velocidade de propagação de uma onda transversal ao longo da corda tensionada é

$$v = \sqrt{\frac{F_T d}{m_a}} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Isso é válido desde que o comprimento de onda seja longo comparado ao espaçamento d entre contas. À medida que a distância d entre as contas se torna cada vez menor, temos uma corda de densidade praticamente uniforme, de modo que v é a velocidade das ondas transversais em geral, ao longo de uma corda.

É preciso mencionar que em diagramas como a Figura S3.38 é comum exagerar bastante a escala vertical para u , de modo a permitir uma visão clara do pulso. Estritamente falando, a velocidade que calculamos para as ondas transversais movendo-se ao longo da corda é válida apenas na aproximação de pequenos ângulos.

QUESTÃO Se você dobra a tensão na corda, o que acontece com a velocidade do pulso transversal que se propaga ao longo da corda? Se você dobra a tensão em uma barra metálica, o que acontece com a velocidade do pulso longitudinal (onda sonora) que se propaga através da barra?

A velocidade do pulso que percorre a corda aumenta por um fator de $\sqrt{2}$. Isso é bastante diferente da situação de uma onda sonora longitudinal em uma barra metálica, em que dobrar a tensão na barra adiciona uma quantidade s à distância interatômica mas não muda a distância interatômica de equilíbrio d , e portanto não altera a velocidade do som.

Ondas senoidais

Um tipo muito importante de onda é uma onda senoidal. Muitas ondas têm uma forma senoidal, e, como veremos em uma seção posterior sobre ondas estacionárias, é possível expressar matematicamente outras formas de onda como uma soma de senoides. Considere a seguinte função, mostrada na Figura S3.41, em que A é chamada de amplitude, λ é o comprimento de onda e T é o período da onda:

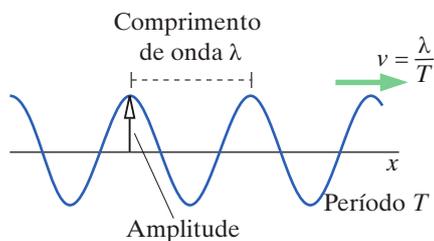


Figura S3.41 Uma onda senoidal.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right) \\ &= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{T}t\right)\right) \\ &= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) \end{aligned}$$

Essa é uma solução da equação da onda porque é uma função da quantidade $x - vt$, com a velocidade de propagação $v = \lambda/T$ (em um período T a onda avança uma distância de um comprimento de onda, λ). Além disso, quando x avança de um comprimento de onda, λ , ou t avança de um período, T , é evidente da primeira forma da função mostrada acima que o argumento do cosseno varia de 2π rad (360°), e portanto a função cosseno se repete.

A quantidade $2\pi/\lambda$ é chamada de “número de onda”, k , e a quantidade $2\pi/T$ é chamada de “frequência angular”, ω . É prática comum escrever essa solução da equação da onda na forma

$$u(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Muitas vezes é útil perceber o seguinte:

$$\omega/k = (2\pi/T)/(2\pi/\lambda) = \lambda/T = v$$

Outra quantidade muitas vezes utilizada é a frequência, $f = 1/T$, que é o número de ciclos completos em um segundo; a unidade é o hertz (Hz, ciclos por segundo). Como $\omega = 2\pi/T$, então $\omega = 2\pi f$.

QUESTÃO Quais são as unidades do número de onda, k ? E da frequência angular, ω ?

O número de onda, k , tem unidades de radianos/m, ou $1/m$, e a frequência angular, ω , tem unidades de radianos/segundo, ou $1/s$. Note que radianos são adimensionais.

Propagação da energia

Uma onda pode carregar energia de um local para outro local distante sem mover átomos da posição inicial até a posição final. No caso de ondas senoidais, podemos calcular a taxa com que a energia é transferida, ou seja, a potência (energia fornecida por unidade de tempo). Considere a energia cinética e a energia potencial em uma região da onda com uma extensão de um comprimento de onda. Em um período T , toda essa energia é passada à região adjacente, ou poderia ser entregue a um aparelho conectado a uma extremidade do objeto oscilante.

A energia cinética de um átomo em uma fileira de átomos ao longo da qual passa uma onda senoidal é

$$\frac{1}{2}m_a \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

O comprimento da fileira de átomos que consideraremos é λ , região dentro da qual há $N = \lambda/d$ átomos, já que $Nd = \lambda$ é o comprimento total. Para somarmos a energia cinética de todos os N átomos, escrevemos a soma como uma integral:

$$K = \int_0^\lambda \frac{1}{2}m_a \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \frac{dx}{d}$$

Dividir dx por d pondera apropriadamente as várias contribuições, já que a integral de dx/d sobre um comprimento de onda é $\lambda/d = N$, o número de átomos cujas energias cinéticas queremos somar. Dito de outra forma, há 1 átomo a cada distância d , de modo que dx/d é o número de átomos em uma distância dx . Para uma onda senoidal, $u = A \cos(kx - \omega t)$, e temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\omega A \sin(kx - \omega t) \\ K &= \int_0^\lambda \frac{1}{2} m_a (\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)) \frac{dx}{d} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_a \omega^2 A^2}{d} \int_0^\lambda \sin^2(kx - \omega t) dx\end{aligned}$$

Podemos calcular a integral subtraindo uma identidade trigonométrica de outra:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos(2\theta) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\end{aligned}$$

A integral da função cosseno ao longo de um comprimento de onda é zero, deixando apenas a integral de dx :

$$\frac{1}{2} \int_0^\lambda (1 - \cos(2(kx - \omega t))) dx = \frac{\lambda}{2}$$

Outra forma de expressar esse resultado é que o valor médio da função \sin^2 ao longo de um período é $1/2$, o que é razoável, já que o quadrado da função seno varia entre 0 e 1. O resultado para a energia cinética da onda em um comprimento de onda é

$$K = \frac{1}{4} \frac{m_a \omega^2 A^2 \lambda}{d}$$

Há também energia potencial na onda, associada ao estiramento de cada mola, que contribui com $(1/2) k_{m,ef} u^2$, em que $k_{m,ef}$ é a constante de mola efetiva associada às forças elásticas exercidas sobre um certo átomo por seus átomos vizinhos. Para ondas tanto longitudinais quanto transversais, a força sobre um átomo pode ser expressa em termos de uma constante de mola efetiva, para $u = A \cos(kx - \omega t)$:

$$\begin{aligned}F &= m_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= m_a (-\omega^2 u) \\ &= -k_{m,ef} u \\ k_{m,ef} &= m_a \omega^2\end{aligned}$$

O comprimento da fileira de átomos que consideraremos é novamente λ , região dentro da qual há $N = \lambda/d$ átomos, já que $Nd = \lambda$ é o comprimento total. Para somar as energias potenciais de todos os N átomos, obtendo U , escrevemos a soma como uma integral:

$$U = \int_0^\lambda \frac{1}{2} k_{m,ef} u^2 \frac{dx}{d}$$

Dividir dx por d pondera apropriadamente as várias contribuições, já que a integral de dx/d ao longo de um comprimento de onda é $\lambda/d = N$, o número de átomos cujas energias potenciais queremos somar. Para uma onda senoidal, $u = A \cos(kx - \omega t)$,

temos

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\lambda \frac{1}{2} m_a \omega^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) \frac{dx}{d} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_a \omega^2 A^2}{d} \int_0^\lambda \text{sen}^2(kx - \omega t) dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{m_a \omega^2 A^2 \lambda}{d} \end{aligned}$$

Vemos que a energia potencial total em um comprimento de onda é igual à energia cinética total, e sua soma é a seguinte:

$$K + U = \frac{1}{2} \frac{m_a \omega^2 A^2 \lambda}{d}$$

Adotando um ponto de vista macroscópico, m_a/d é a densidade linear de massa μ (quilogramas por metro):

$$K + U = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

A potência média carregada pela onda é a energia em um comprimento de onda dividida pelo tempo para um comprimento de onda passar, ou seja, o período T :

$$\begin{aligned} \text{potência média} &= \frac{1}{2} \frac{\mu \omega^2 A^2 \lambda}{T} \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \end{aligned}$$

A massa M do objeto oscilante é a densidade ρ vezes o volume $L \times \text{área}$, em que L é o comprimento e a área refere-se à seção transversal do objeto. A massa M pode também ser escrita como μL , já que μ é a massa por unidade de comprimento. Portanto, $M = \mu L = \rho L \times \text{área}$, e podemos escrever a potência média como

$$\frac{1}{2} \rho (\text{área}) \omega^2 A^2 v$$

A potência média por unidade de área de seção transversal (W/m^2) é

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

QUESTÃO Deduza as unidades para a expressão da potência média. Quais devem ser?

Você deve encontrar unidades de joules/segundo, ou watts. Você pode descobrir as unidades fundamentais para o joule considerando as unidades na expressão da energia cinética, $(1/2) mv^2$.

QUESTÃO Se você dobra a frequência angular, por qual fator a potência média da onda muda? Se em vez disso você dobra a amplitude, como muda a potência média?

Em ambos os casos, a potência aumenta por um fator de quatro, porque tanto ω quanto A estão ao quadrado na expressão para a potência média.

No Capítulo 23 tratamos a propagação de energia no caso da luz, que envolve o vetor de Poynting.

Ponto de verificação 9 Diagramas de formas de onda muitas vezes exageram os deslocamentos utilizando uma escala vertical expandida, para facilitar a visualização da forma de onda. No entanto, para que a equação da onda preveja corretamente a velocidade de propagação de uma onda transversal em uma corda, é importante que a inclinação real da forma de onda seja pequena. Quais das suposições que fizemos ao derivar a equação da onda requerem que a inclinação seja pequena?

S3.5 ONDAS ESTACIONÁRIAS

Neste suplemento e no Capítulo 23, temos estudado ondas progressivas — ondas cujas cristas viajam através do espaço a uma velocidade que é característica do tipo de onda (a velocidade da luz para a radiação eletromagnética, a velocidade do som para ondas sonoras etc.). Agora vamos estudar ondas que vão e vêm dentro de um espaço confinado. Exemplos disso são as ondas elásticas que vão e vêm ao longo do comprimento de uma corda, ou ondas sonoras indo e vindo no interior de um tubo de órgão. O comportamento de tais ondas nesses sistemas clássicos oferece pistas para a compreensão de alguns aspectos quânticos dos átomos.

Considere duas ondas progressivas senoidais com exatamente a mesma frequência, iniciadas algum tempo atrás, a grandes distâncias à esquerda e à direita, e que vão uma em direção à outra (Figura S3.42). Essas ondas podem ser ondas eletromagnéticas no espaço vazio, ondas elásticas propagando-se a partir de duas extremidades de uma corda muito longa tensionada, ondas sonoras propagando-se a partir dos dois extremos de um longo tubo de órgão, ou ondas na água propagando-se de duas margens de um lago. A descrição e a análise são praticamente as mesmas em cada uma dessas situações físicas muito diferentes. A larga aplicabilidade da análise que desenvolveremos é uma das razões pelas quais estudamos ondas. Lembre-se de que a soma de soluções da equação da onda é também uma solução (propriedade de superposição), e assim duas ondas que se aproximam representam uma solução válida da equação da onda.

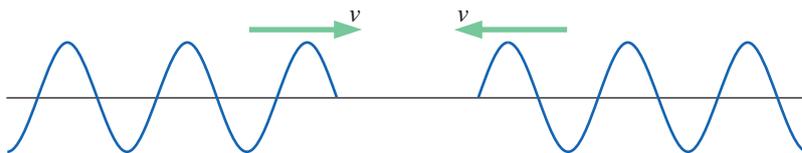


Figura S3.42 Ondas que colidem somam-se para criar uma onda estacionária.

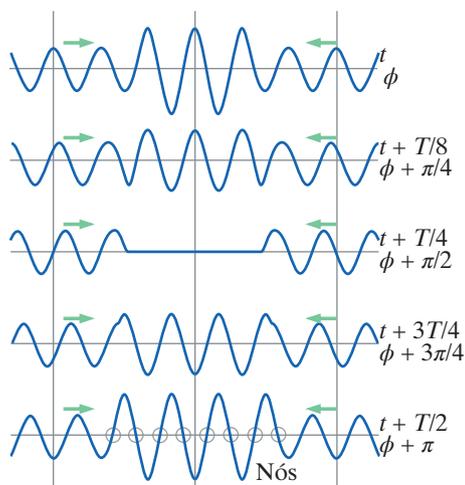


Figura S3.43 Duas ondas progressivas de mesma frequência produzem uma onda estacionária.

Quando as ondas começam a se sobrepor, elas obviamente interferem uma com a outra, construtiva ou destrutivamente, dependendo das fases relativas das duas ondas no espaço. Essa interferência leva a um efeito notável. Observe a sequência de fotografias na Figura S3.43, tomadas a intervalos de um oitavo de período. Na região de sobreposição, a onda não se propaga! Ela apenas permanece no lugar, com as cristas ondulando para cima e para baixo, mas não se deslocando para a esquerda ou para a direita. Isso é algo novo, chamado de “onda estacionária”.

Há até mesmo instantes em que a onda é completamente nula ao longo de toda a região de sobreposição! No instante em que isso ocorre para uma corda, pedaços da corda efetivamente têm velocidade (taxa de variação do deslocamento) e energia cinética, de modo que a ondulação continua, apesar de que não há momentaneamente deslocamento transversal da corda em nenhuma posição na região. No caso da radiação eletromagnética, os campos elétricos e magnéticos estão variando quando passam pelo zero.

Uma das propriedades importantes de uma onda estacionária é a existência de pontos chamados “nós” — posições em que a onda é nula *em todos os instantes*. As posições dos nós da onda estacionária estão circulasadas na fotografia mais abaixo na Figura S3.42. A meio caminho entre os nós, a onda estacionária periodicamente alcança a amplitude máxima. Essas posições são chamadas de “antinós”.

Ondas estacionárias versus ondas progressivas

Um único observador, analisando uma onda em função do tempo, em uma posição específica que não seja um nó, não sabe diferenciar uma onda progressiva de uma onda estacionária.

QUESTÃO Explique sucintamente a razão disso.

Esse observador vê a onda subir e descer nessa posição, o que é o mesmo que ocorre quando passa uma onda progressiva. Por outro lado, um observador localizado em um

nó pode concluir que nada de interessante está acontecendo, ou que essa é a posição em que duas ondas progressivas estão interferindo destrutivamente entre si, como na interferência de dupla fenda, sem formar uma onda estacionária no espaço.

Somente se olhamos para o padrão completo das ondas no espaço e no tempo é que podemos ver que uma onda estacionária é realmente muito diferente de uma onda progressiva. Ainda assim, há algumas propriedades comuns a ambos os tipos de onda. Observe cuidadosamente a sequência temporal de imagens na Figura S3.42, e em seguida responda às seguintes questões importantes:

QUESTÃO Se o comprimento de onda das duas ondas progressivas é λ , qual é o comprimento de onda (a distância entre cristas sucessivas) da onda estacionária? Se a frequência das duas ondas progressivas é f , qual a frequência (o número de ciclos completos por segundo) da onda estacionária?

O comprimento de onda e a frequência da onda estacionária são os mesmos que para as ondas progressivas. Isso significa que, embora a onda estacionária não vá a lugar algum (esquerda ou direita), podemos ainda utilizar a relação $v = f\lambda$ para relacionar a frequência e o comprimento de onda de uma onda estacionária através da velocidade v de uma onda progressiva.

Ondas confinadas: ondas estacionárias em uma corda

Uma das formas de criar uma onda estacionária é iniciar uma única onda progressiva senoidal em um espaço confinado, de modo que ela seja continuamente refletida nas bordas desse espaço, e a onda refletida interfira com a onda original. A frequência não muda na reflexão em uma borda estacionária, e assim é certo que a onda original e sua reflexão tenham a mesma frequência, o que é necessário para poder criar uma onda estacionária.

Exemplos dessas ondas confinadas incluem ondas em uma corda esticada entre dois suportes, ondas sonoras no interior de um tubo fechado nas duas extremidades e ondas luminosas refletindo-se de um lado a outro entre os espelhos de um laser. Por concretude, enfatizaremos ondas elásticas em uma corda tensionada, mas a análise aplica-se a muitas outras situações físicas bastante diferentes.

A Figura S3.44 mostra duas ondas estacionárias possíveis em uma corda tensionada de comprimento L , amarrada a dois suportes fixos. O comprimento de onda no caso superior é $\lambda = 2L$, como se pode verificar notando que o comprimento L contém meio comprimento de onda. O comprimento de onda no caso inferior é $\lambda = L$.

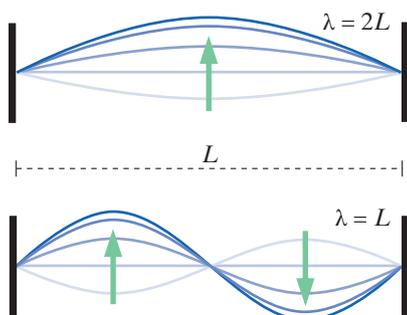


Figura S3.44 Duas das possíveis ondas estacionárias de uma corda tensionada de comprimento L .

QUESTÃO Por que você não pode obter uma onda estacionária nessa corda com comprimento de onda $3L$, ou $1,1L$, ou $0,95L$?

Esses comprimentos de onda não se encaixam porque as ondas associadas a eles não são nulas nas extremidades da corda, onde a corda está presa aos suportes. Você descobriu que as ondas estacionárias possíveis em uma corda são “quantizadas”. Nem todo comprimento de onda serve. Os comprimentos de onda possíveis de uma onda estacionária em uma corda tensionada são completamente determinados pela distância entre os suportes. O mesmo importante princípio aplica-se aos possíveis comprimentos de onda de ondas sonoras estacionárias em um tubo de órgão ou possíveis comprimentos de onda de ondas luminosas estacionárias em um laser.

ONDAS ESTACIONÁRIAS SÃO QUANTIZADAS

Apenas certos comprimentos de onda (e frequências) são possíveis.

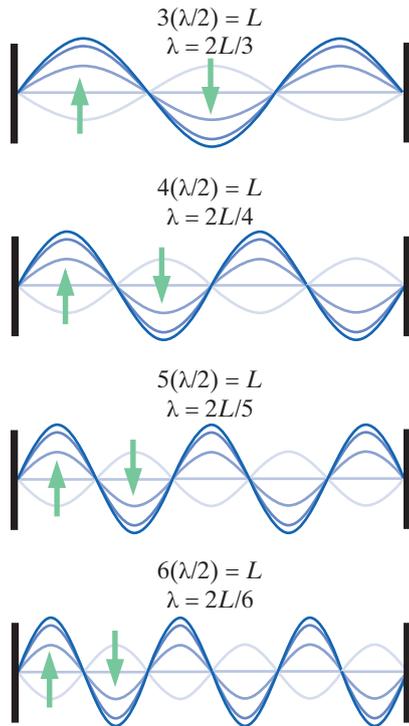


Figura S3.45 As próximas quatro ondas estacionárias possíveis.

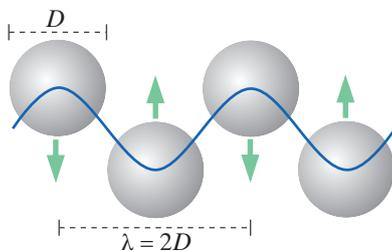


Figura S3.46 O menor comprimento de onda possível (a maior frequência possível).

Enumerando as possíveis ondas estacionárias

Vamos gerar um catálogo mais completo dos possíveis comprimentos de onda para ondas estacionárias em uma corda tensionada.

QUESTÃO Em termos do comprimento L , escreva os seis maiores possíveis comprimentos de onda. Você já conhece os dois primeiros: $\lambda_1 = 2L$ e $\lambda_2 = L$.

Evidentemente temos $\lambda_3 = 2L/3$, $\lambda_4 = 2L/4$, $\lambda_5 = 2L/5$ e $\lambda_6 = 2L/6$. As ondas são mostradas na Figura S3.45. Uma forma rápida para determinar os possíveis comprimentos de onda é notar que em um comprimento L deve haver um número inteiro de meios comprimentos de onda, de modo que $L = n(\lambda_n/2)$, o que significa que $\lambda_n = 2L/n$. Desde que a amplitude não seja muito grande, ou o comprimento de onda muito pequeno, a velocidade v de propagação de ondas progressivas em uma corda tensionada mostra-se independente do comprimento de onda.

QUESTÃO Em termos da velocidade v , quais são as seis menores frequências possíveis das ondas estacionárias?

Resolvendo para $f_n = v/\lambda_n = nv/(2L)$, temos $f_1 = v/(2L)$, $f_2 = 2v/(2L)$, $f_3 = 3v/(2L)$, $f_4 = 4v/(2L)$, $f_5 = 5v/(2L)$ e $f_6 = 6v/(2L)$. Essas diferentes ondas estacionárias são chamadas de “modos”. O contexto técnico desse termo é que um modo de oscilação de um sistema é caracterizado por uma onda estacionária senoidal no tempo, com a mesma frequência em todas as posições, e que necessariamente satisfaz as condições de contorno (no nosso caso, que a onda seja nula nos extremos da corda). Um modo pode também ser senoidal no espaço em um instante particular no tempo, como ocorre para uma corda, mas não precisa ser senoidal no espaço em sistemas mais complicados, tais como a superfície bidimensional de um tambor.

Vimos que há um máximo comprimento de onda possível $2L$ e uma mínima frequência possível $v/(2L)$. Haveria um mínimo comprimento de onda possível, correspondente a uma máxima frequência possível? Sim. Se a distância entre átomos na corda é D , o mais curto comprimento de onda teoricamente possível para uma onda elástica estacionária é $2D$, com os átomos adjacentes oscilando fora de fase entre si (Figura S3.46). Qualquer comprimento de onda inferior não tem significado físico.

Como é o caso para muitos outros sistemas, uma corda vibrante tem um número de modos (número de possíveis padrões distintos de onda estacionária) que não é infinito, mas finito.

Construindo o estado estacionário

Você pode ter tido a experiência de produzir uma onda estacionária em uma mola longa ou uma corda. Você prende uma extremidade da corda a algum objeto, a tensiona e balança a outra extremidade da corda para cima e para baixo. Se balançá-la em uma das frequências dos modos, rapidamente se estabelece uma grande oscilação, porque a onda progressiva que você envia ao longo da corda é refletida na outra extremidade de tal forma a produzir uma onda estacionária por interferência construtiva. Entretanto, se você tentar balançar a corda em uma frequência que não corresponde a nenhum modo, não obterá uma grande oscilação, porque não se produzirá interferência construtiva.

Enquanto você continua a transferir energia para a corda ao balançá-la com uma frequência apropriada, a onda estacionária cresce continuamente. O que limita seu crescimento? O que determina a amplitude final da onda estacionária?

Inicialmente, quase toda a energia que você transfere é utilizada para fazer a onda estacionária crescer. À medida que a amplitude cresce, entretanto, cresce também a taxa de perda de energia em virtude da resistência do ar e do “atrito interno” na própria corda, associado à flexão do material. A resistência do ar é maior em altas velocidades, e a corda tem maiores velocidades transversais quando a amplitude da onda estacionária é maior. O atrito interno na corda também cresce à medida que o ângulo de flexão da corda se torna maior com o aumento da amplitude.

Em uma certa amplitude, as perdas por resistência do ar e atrito interno a cada ciclo igualaram exatamente a transferência de energia que você realiza a cada ciclo. Durante cada ciclo você simplesmente compensa as perdas, mas não ocorre mais crescimento da onda. Você alcançou um estado estacionário.

Se as perdas são relativamente pequenas, você não precisa fazer muito para manter a onda em movimento. De fato, você pode ter experimentado manter uma corda oscilando com uma amplitude considerável enquanto mal movia sua mão. Em uma situação em que as perdas são pequenas, sua mão é quase um nó, no sentido de que se move pouquíssimo em comparação ao grande movimento de um dos antinós (Figura S3.47).



Figura S3.47 Com pequenas perdas, um movimento bem pequeno da mão é suficiente para manter o estado estacionário.

Ponto de verificação 10 Dados os mecanismos de perda que esboçamos, o que deveria ser mais fácil de produzir e manter: um modo de grande comprimento de onda (baixa frequência) ou um modo de pequeno comprimento de onda (alta frequência)? Se tiver oportunidade, tente isso com uma corda.

Superposição de modos

Demonstramos que ondas estacionárias (modos) são quantizados para cordas oscilantes. Isso é tudo que uma corda pode fazer — estar em um desses modos? Não! De acordo com o princípio da superposição, deve ser possível que uma corda esteja oscilando de uma maneira descrita pela superposição de dois ou mais modos. Com que isso se pareceria? Seria uma onda estacionária?

A Figura S3.48 mostra uma sequência temporal da superposição dos dois modos de mais baixa frequência (comprimentos de onda $2L$ e L). Ambos os modos têm a mesma amplitude. Os modos individuais são mostrados por linhas finas, e sua soma é mostrada pela linha colorida.

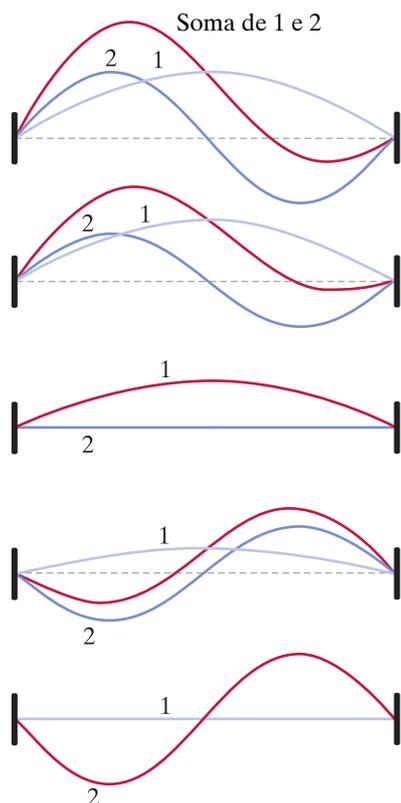


Figura S3.48 Uma onda confinada que é a superposição dos dois modos de mais baixa frequência.

QUESTÃO Esse movimento é uma onda estacionária? Uma onda progressiva? Por quê, ou por que não?

Nenhum dos dois. Não é uma onda estacionária, nem é uma onda progressiva simples, porque as cristas se movem tanto para a esquerda quanto para a direita. Além disso, não há um “comprimento de onda”, que é algo que ondas tanto estacionárias quanto progressivas possuem. Apesar da complexidade desse movimento, ele pelo menos é periódico — o movimento repete-se após um tempo. Para compreender como o movimento se repete, na Figura S3.48 é instrutivo seguir o modo 1 de cima até embaixo, e depois seguir o modo 2 de cima até embaixo.

QUESTÃO Se o período do modo de maior comprimento de onda é $T (= 2L/v)$, qual é o período dessa oscilação de dois modos?

Após um tempo T , o modo de baixa frequência percorreu um ciclo completo, o segundo modo percorreu dois ciclos completos, e estamos de volta à configuração original. Portanto, o período é T . Outra forma de ver isso é considerar que, na Figura S3.48, o modo 1 percorre um quarto de ciclo (do máximo positivo ao zero), enquanto o modo 2 percorre dois quartos de ciclo (do máximo positivo à esquerda ao máximo negativo à esquerda). Estender o conjunto de diagramas até o quádruplo do tempo traria ambos os modos de volta à configuração inicial.

Combinações de grandes números de modos podem representar movimentos bastante complicados. A Figura S3.49 é uma sequência temporal da superposição de amplitudes particulares de dez diferentes modos, escolhidas de tal forma a aproximar inicialmente uma “onda quadrada”.

O quanto isso pode ficar complicado? Pode-se provar matematicamente que qualquer função $f(x)$ que é nula nos extremos da corda, $f(0) = 0$ e $f(L) = 0$, pode ser criada somando quantidades cuidadosamente escolhidas de um número (possivelmente infinito) de modos. Em uma seção sobre análise de Fourier, no final deste suplemento, mostramos como determinamos as amplitudes de cada um dos dez modos que utilizamos para aproximar a onda mostrada na Figura S3.49.

Isso fornece uma maneira poderosa de analisar o comportamento de ondas confinadas. Primeiro descubra quais são os modos (as possíveis ondas estacionárias senoidais). Então descubra que combinação de modos pode gerar uma forma particular $f(x)$ no instante $t = 0$. O que acontecerá dali em diante pode ser calculado simplesmente seguindo o comportamento senoidal dos modos individuais, cada um com suas frequências características, e somando as contribuições individuais dos vários modos.

Tons musicais

Quando uma corda de violino é tocada, oscila com uma superposição de vários modos, e essas oscilações forçam o corpo do violino a oscilar, o que alternadamente comprime e rarefaz o ar para produzir as ondas sonoras que você escuta. Normalmente o modo de maior amplitude é aquele de maior comprimento de onda (menor frequência), que corresponde ao que é chamado de “frequência fundamental”. Um tom puro de frequência única soa muito entediante. O rico tom musical que você ouve de um violino deve-se não apenas à frequência fundamental mas à superposição de muitos modos de frequências mais altas que também estão presentes. As frequências dos modos que são múltiplos inteiros simples da frequência fundamental são chamadas de “harmônicos”. É uma peculiaridade do ouvido e do cérebro humanos que consideramos muito agradável a superposição de harmônicos. A superposição de frequências que não são múltiplos inteiros simples de uma frequência fundamental soa muito menos agradável.

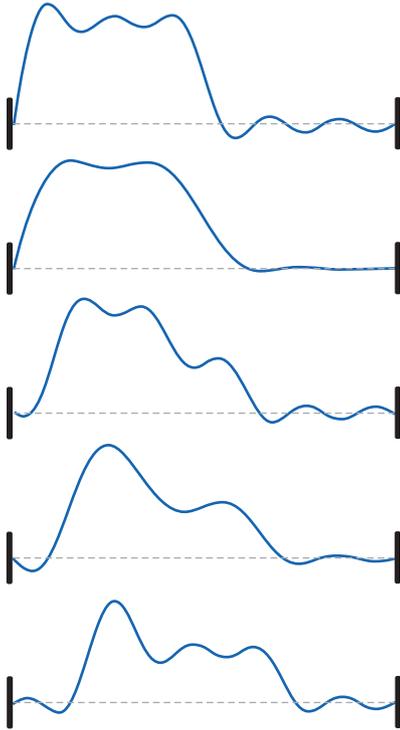


Figura S3.49 Uma aproximação para uma onda inicial quadrada, utilizando dez modos.

Oscilações anarmônicas

O exemplo de uma corda é altamente representativo de uma gama muito ampla de fenômenos de ondas estacionárias. Entretanto, devemos chamar a atenção para alguns aspectos que não são ilustrados pelo comportamento relativamente simples de uma corda. Primeiro, embora a geometria do sistema determine os possíveis comprimentos de onda (de modo a satisfazer as condições de contorno), os diferentes comprimentos de onda não precisam ser $1/n$ vezes o maior comprimento de onda. Um bom exemplo é um tambor. O comprimento de onda das ondas bidimensionais na pele do tambor é determinado pela exigência de que a onda seja nula no contorno da pele. A relação entre os comprimentos de onda dos modos é bastante complicada, não simplesmente $1/n$ vezes o maior comprimento de onda. O fato de que os comprimentos de onda dos modos do tambor não são relacionados de forma simples entre si (não são harmônicos) corresponde ao fato de que um tambor não produz um tom musical como produzido por um violino.

Velocidade dependente da frequência

Em segundo lugar, a velocidade de propagação em muitos sistemas não é constante, mas depende da frequência (ou do comprimento de onda). Já que $f = v/\lambda$, nesses sistemas a frequência de um modo não precisa ser simplesmente inversamente proporcional ao comprimento de onda daquele modo, como em uma corda. Tais sistemas são chamados “dispersivos”, porque ondas progressivas de diferentes frequências afastam-se umas das outras (dispersam-se) em virtude de suas diferentes velocidades. Para sistemas dispersivos, a análise em termos de modos ainda é válida. Ocorre apenas que quando calculamos $f = v/\lambda$ para um λ particular temos que considerar o fato de que v não é constante.

Sistemas não lineares

Em terceiro lugar, combinamos modos simplesmente somando-os, com base no princípio da superposição. De um ponto de vista mais fundamental, supusemos implicitamente que, se dobrarmos a amplitude de um modo, a frequência não mudará.

Tais sistemas são chamados de sistemas “lineares” (pois a superposição de duas ondas do mesmo modo é simplesmente o mesmo modo, com uma amplitude que é a soma das amplitudes das duas ondas). Porém, muitos sistemas reais são apenas aproximadamente lineares. Em sistemas “não lineares”, a superposição de duas ondas da mesma frequência pode gerar uma onda com uma frequência diferente.

Isso pode até mesmo acontecer com uma corda. Vimos que a velocidade de propagação v para uma corda é proporcional à raiz quadrada da tensão na corda. Para pequenas amplitudes, a corda não é esticada muito mais do que em repouso, e a tensão não é muito alterada. Mas para grandes amplitudes a corda pode ser bem mais esticada do que em repouso, e isso produz uma variação em v , e portanto uma mudança na frequência para o mesmo comprimento de onda. Logo, duas ondas de tamanho médio podem combinar-se em uma grande onda com frequência diferente.

Ondas confinadas e a mecânica quântica

Temos considerado a quantização em sistemas clássicos (não quânticos). Descobrimos que ondas estacionárias em regiões confinadas não podem ter qualquer comprimento de onda, porque os comprimentos de onda possíveis são quantizados pelos vínculos dos contornos.

Há uma situação análoga no mundo quântico dos átomos, em virtude do fato de que partículas como os elétrons podem ter propriedades ondulatórias. Por exemplo, descobrimos que a difração de elétrons demonstra o fato surpreendente de que os elétrons podem ter propriedades tanto de onda como de partículas. Isso implica que poderia haver ondas estacionárias tridimensionais de um elétron em um átomo de hidrogênio, porque o elétron está confinado à região próxima do próton, devido à atração elétrica. Um átomo de hidrogênio realmente tem estados quantizados análogos aos modos de ondas estacionárias. Cada um desses estados tem uma energia específica — a energia é quantizada. Um átomo de hidrogênio pode decair de um estado de energia mais alta para um estado de energia mais baixa com a emissão de energia na forma de luz, e um estudo da luz emitida por átomos nos permite determinar as energias quantizadas dos estados atômicos.

S3.6 MODELOS ONDULATÓRIO E CORPUSCULAR DA LUZ

Demonstramos que uma variedade de fenômenos pode ser explicada pelas propriedades ondulatórias da radiação eletromagnética. No entanto, nos Capítulos 8 e 10 explicamos uma série de fenômenos através de um modelo corpuscular da luz (fótons). Como primeiro passo na comparação entre os modelos ondulatório e corpuscular da luz, vamos considerar as previsões dos dois modelos da luz em duas situações experimentais distintas: o efeito fotoelétrico e a colisão de um feixe de luz com elétrons livres (o espalhamento Compton).

O efeito fotoelétrico

Os elétrons móveis em um metal, embora bastante livres para moverem-se no interior do metal, estão entretanto ligados ao metal como um todo: eles não vazam! É necessário realizar um certo trabalho para fazer um elétron cruzar do interior para o exterior da superfície de um metal. Nesse ponto (elétron logo no exterior da superfície), o metal estaria positivamente carregado e atrairia o elétron, de modo que seria preciso realizar um trabalho adicional para levar o elétron para longe. O trabalho total necessário para remover um elétron do metal é muitas vezes chamado de “função trabalho”, mas poderia perfeitamente ser chamado de “energia de ligação”. Vamos representá-lo pelo símbolo W . Valores típicos para metais comuns são da ordem de alguns elétrons-volts (eV).

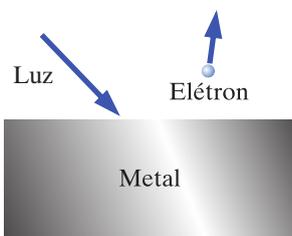


Figura S3.50 O efeito fotoelétrico: a luz pode ejetar um elétron de um metal.

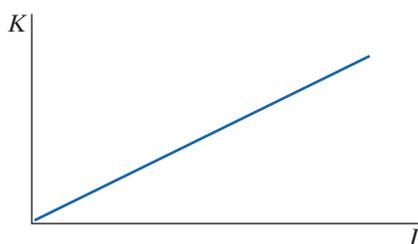


Figura S3.51 O modelo ondulatorio da luz prevê que a energia cinética de um elétron ejetado deve ser proporcional à intensidade da luz que atinge o metal.

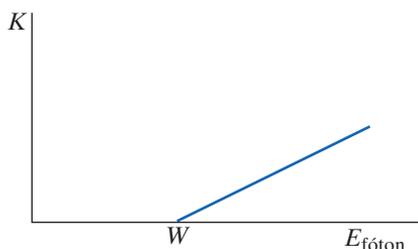


Figura S3.52 O modelo corpuscular prevê que acima de um certo limiar de energia W a energia cinética de um elétron ejetado deva ser proporcional a $(E_{\text{fóton}} - W)$.

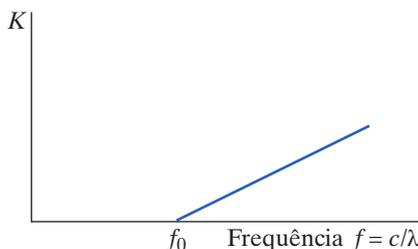


Figura S3.53 O que se observa na realidade é que acima de uma frequência mínima f_0 a energia cinética dos elétrons ejetados é proporcional a $(f - f_0)$.

Previsão do modelo ondulatorio

Uma maneira de fornecer energia suficiente para remover um elétron de um metal é jogar luz sobre o metal (Figura S3.50).

QUESTÃO Segundo o modelo ondulatorio da luz, como um feixe de luz poderia ter a energia W necessária para suplantar a energia de ligação e remover um elétron de um pedaço de metal?

Como o fluxo de energia por metro quadrado (intensidade) para uma onda eletromagnética é proporcional a E^2 , precisaríamos de uma onda eletromagnética de alta intensidade, em que a amplitude do campo elétrico fosse muito grande, de modo a fornecer energia suficiente. De maneira alternativa, se a energia da onda eletromagnética não fosse rapidamente dissipada em energia térmica, poderíamos ser capazes de jogar um feixe luminoso de baixa intensidade sobre o metal durante um tempo suficientemente grande para fornecer energia suficiente.

QUESTÃO Segundo o modelo ondulatorio da luz, precisaríamos utilizar radiação eletromagnética com um comprimento de onda específico, ou qualquer comprimento de onda seria adequado?

De acordo com o modelo ondulatorio, a densidade de energia de uma onda eletromagnética depende de E^2 , o quadrado da sua amplitude, mas não de seu comprimento de onda. Precisamos apenas de um feixe intenso de luz — que poderia ter qualquer comprimento de onda (ou cor). Poderíamos então esperar que um gráfico da energia cinética do elétron ejetado em função da intensidade da luz que atinge o metal fosse linear, como na Figura S3.51.

Previsão do modelo corpuscular

Lembre-se do volume 1 que segundo o modelo corpuscular um feixe de luz é uma coleção de partículas deslocando-se com velocidade escalar c , cada uma com massa de repouso nula mas com energia e momento fixos.

QUESTÃO O que o modelo corpuscular da luz prevê que seria necessário para ejetar um elétron de um metal?

O modelo corpuscular sugere que o importante é a energia de um fóton individual, já que a absorção de um único fóton com a energia apropriada seria suficiente para libertar um elétron do metal (e dar-lhe alguma energia cinética). Esse modelo prevê que um feixe extremamente intenso (muitos fótons por metro quadrado) não teria qualquer efeito se a energia das partículas individuais fosse muito baixa (Figura S3.52).

O que é observado?

De fato, o que se observa experimentalmente é que o comprimento de onda da luz que atinge a superfície do metal determina se o elétron será ou não liberado do metal (Figura S3.53). Se o comprimento de onda da luz for muito grande (a frequência for muito baixa), nada acontece, mesmo se o feixe for muito intenso. No entanto, quando o comprimento de onda da radiação diminui (a frequência aumenta), para um comprimento de onda específico começamos a observar elétrons liberados do metal. À medida que o comprimento de onda da luz incidente continua a ser diminuído, a energia cinética dos elétrons liberados do metal aumenta.

O que ocorre se utilizamos um feixe de intensidade muito baixa? Para baixa intensidade, uma luz do comprimento de onda longo não ejeta elétrons, não importa o quanto esperemos. Porém, como previsto pelo modelo corpuscular, com um feixe de luz de baixa intensidade e comprimento de onda curto, algumas vezes observamos um elétron ejetado quase instantaneamente.

Entretanto, para luz de um comprimento de onda suficientemente curto, observamos que a taxa com que os elétrons são ejetados do metal é proporcional à intensidade da luz.

Unificando os dois modelos

Como conciliamos nossos modelos com as observações experimentais? Primeiro, parece claro que esse fenômeno é essencialmente quântico. Uma certa quantidade de energia deve ser fornecida ao sistema em um pacote, de modo a elevar o sistema a um estado de energia em que o elétron não é mais ligado. Assim, o modelo corpuscular da luz parece apropriado aqui.

O ponto surpreendente, no entanto, é que o comprimento de onda da luz incidente é importante. O comprimento de onda é certamente uma propriedade ondulatória — como isso pode ser reconciliado com um modelo corpuscular da luz?

Evidentemente, precisamos modelar a luz como algo que possui propriedades tanto de onda como de partícula. A natureza ondulatória da luz explica os fenômenos de interferência que observamos. A natureza corpuscular da luz explica como uma quantidade fixa de energia pode ser fornecida a um sistema por um fóton. Ocorre que é possível descrever fótons como partículas que possuem momento e energia, bem como, estranhamente, um comprimento de onda (Figura S3.54).



Figura S3.54 Um fóton pode ser descrito como uma partícula com momento e energia, bem como, estranhamente, um comprimento de onda.

Energia e comprimento de onda

A partir de observações experimentais do efeito fotoelétrico, verifica-se que a energia de um fóton é proporcional à frequência e inversamente proporcional ao comprimento de onda. Quantitativamente, a relação é

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

em que $h = 6,6 \times 10^{-34}$ J·s é a constante de Planck, da qual você talvez se recorde, de nossos estudos dos osciladores harmônicos quantizados no volume 1.

Intensidade e número de fótons por segundo

Como o número de elétrons ejetados por segundo é proporcional à intensidade da luz, se o comprimento de onda é pequeno o suficiente, no modelo corpuscular a intensidade da luz parece ser proporcional ao número de fótons que atinge uma superfície a cada segundo.

Aplicando o modelo

QUESTÃO Se a função trabalho (a energia de ligação) é $W = 3$ eV para um certo metal, qual é a energia mínima que um fóton deve ter para ejetar um elétron?

Evidentemente, o fóton deve ter uma energia de 3 eV ou mais. Se o fóton tiver energia menor, não pode arrancar elétrons desse metal.

QUESTÃO Qual é o comprimento de onda de um fóton com essa energia?

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{(3 \text{ eV})(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 4,12 \times 10^{-7} \text{ m} = 412 \text{ nm}$$

Isso é próximo da extremidade violeta do espectro visível, que se estende de cerca de 400 nm (3,1 eV) até cerca de 700 nm (1,8 eV). Para um metal com $W = 3$ eV, luz na maior parte do espectro visível ou no infravermelho não pode ejetar um elétron. Luz UV (ultravioleta), com comprimento de onda menor que 400 nm (energia do fóton maior que 3,1 eV), pode arrancar elétrons desse metal.

QUESTÃO E se você expusesse esse metal a uma luz cujos fótons têm energia de 4 eV (na região UV)? Quanta energia cinética você esperaria que o elétron ejetado possuísse quando estivesse muito afastado do metal?

Como são necessários 3 eV somente para remover o elétron, um fóton de 4 eV pode ejetar um elétron com saldo de 1 eV, logo o elétron possuirá uma energia cinética máxima de 1 eV (pode possuir menos, em virtude de perdas que ocorrem até o elétron deixar o sólido).

Experimentos verificaram esse modelo corpuscular simples para o efeito fotoelétrico. Eis os principais pontos:

- Há uma energia mínima W que os fótons precisam ter para ejetar um elétron do metal; fótons com menor energia (comprimento de onda mais longo) não ejetam elétrons.
- Fótons com energia em excesso ejetam elétrons cuja máxima energia cinética é igual à energia do fóton menos W .

Historicamente, no início do século XX o modelo aceito para a luz era o modelo ondulatório. Foi Einstein quem primeiro propôs a interpretação corpuscular do efeito fotoelétrico, em 1905. (No mesmo ano, Einstein também publicou a teoria da relatividade especial, além de analisar corretamente o movimento browniano, o movimento aleatório de pequenos objetos devido a colisões moleculares, que levou à primeira determinação precisa dos tamanhos atômicos. Um ano verdadeiramente notável!)

Ponto de verificação 11 Se uma certa superfície metálica é atingida por um fóton de energia 4,3 eV, um elétron é ejetado, e a energia cinética máxima do elétron é 0,9 eV. Qual é a função trabalho W (a energia de ligação) desse metal?

Espalhamento Compton

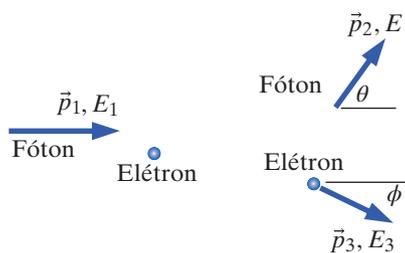


Figura S3.55 Espalhamento Compton: um fóton é espalhado por um elétron estacionário.

A Figura S3.55 é um diagrama de uma colisão entre um fóton e um elétron estacionário. Esse processo é chamado de “espalhamento Compton”, em homenagem ao físico que mostrou experimentalmente que esse processo possui tanto características ondulatórias quanto corpusculares. Se o elétron recua com alguma energia cinética, o fóton necessariamente perdeu energia. No modelo ondulatório da interação, perda de energia corresponde a diminuição da amplitude, mas com mesma frequência, enquanto no modelo de onda-partícula uma diminuição na energia do fóton corresponde a um comprimento de onda mais longo. Compton mostrou experimentalmente que o modelo combinado onda-partícula de fato previa corretamente a variação do comprimento de onda em função do ângulo de espalhamento do elétron. Isso forneceu uma das mais convincentes evidências iniciais da natureza dual onda-partícula da luz.

No volume 1, você utilizou o Princípio do Momento e o Princípio da Energia para estudar colisões entre partículas, e tratou os fótons como partículas com massa de repouso nula. A relação geral entre energia e momento para uma partícula é $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Para partículas de massa de repouso nula, como os fótons, isso se reduz a $E = pc$. Faremos uso disso para analisar o espalhamento Compton.

Vamos utilizar o modelo combinado onda-partícula da luz para prever a variação $\Delta\lambda$ no comprimento de onda para um fóton que colide com um elétron livre. Como indicado na Figura S3.55, vamos chamar de E_1 a energia do fóton incidente, de E_2 a energia do fóton emergente e de E_3 a energia de recuo do elétron, com $E_3 = mc^2 + K$, sendo K a energia cinética de recuo do elétron e m a massa do elétron.

$$\begin{array}{ll} E_1 + mc^2 = E_2 + E_3 & \text{Princípio da Energia} \\ E_3 = E_1 - E_2 + mc^2 & \text{Resolvendo para a energia de recuo do elétron} \\ \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 & \text{Princípio do Momento} \\ \vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 & \text{Resolvendo para o momento de recuo do elétron} \end{array}$$

Para obter o quadrado da magnitude de um vetor, tomamos o produto escalar de um vetor com ele mesmo:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 &= (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) && \text{Produto escalar} \\
p_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta && \text{Expandindo} \\
(p_3 c)^2 &= (p_1 c)^2 + (p_2 c)^2 - 2(p_1 c)(p_2 c) \cos \theta && \text{Multiplicando por } c^2 \\
E_3^2 - (mc^2)^2 &= E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \theta && \text{Substituindo } (pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2 \\
(E_1 - E_2 + mc^2)^2 - (mc^2)^2 &&& \\
&= E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \theta && \text{Substituindo } E_3
\end{aligned}$$

Após expandir os parênteses ao quadrado e simplificar, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
mc^2(E_1 - E_2) &= E_1 E_2 (1 - \cos \theta) \\
mc^2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) &= (1 - \cos \theta) && \text{Dividindo por } E_1 E_2 \\
mc^2 \left(\frac{\lambda_2}{hc} - \frac{\lambda_1}{hc} \right) &= (1 - \cos \theta) && \text{Usando a relação onda-partícula } E = \frac{hc}{\lambda} \\
\lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) && \text{Previsão do espalhamento Compton}
\end{aligned}$$

Temos aqui uma previsão quantitativa para o aumento do comprimento de onda do fóton espalhado, em função do ângulo de espalhamento θ . A quantidade

$$\frac{h}{mc} = \frac{(6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})}{(9 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 2,4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

é chamada de comprimento de onda de Compton. Para tornar factível a medida do aumento no comprimento de onda, deve-se utilizar uma luz cujo comprimento de onda seja comparável ao comprimento de onda de Compton. Essa luz está na região de raios X do espectro eletromagnético.

Para estudar esse tipo de colisão, é necessário dispor de um feixe de raios X monocromáticos (de um único comprimento de onda). Entretanto, a maioria dos feixes de raios X compõe-se inicialmente de uma faixa de comprimentos de onda.

QUESTÃO Com base no que sabe sobre difração de raios X, você consegue imaginar uma forma de produzir um feixe com um único comprimento de onda?

Se um feixe de raios X interage com um cristal, raios X reirradiados de um dado comprimento de onda serão especialmente intensos em um ângulo que satisfaz a condição para a difração de raios X. Esse feixe de um único comprimento de onda poderia ser utilizado no experimento.

QUESTÃO Como se poderia medir o comprimento de onda dos raios X após sua interação com um elétron?

Novamente, a medida poderia utilizar difração de raios X por um cristal único. Se conhecermos o espaçamento entre os átomos em um certo cristal, medir os ângulos dos máximos de difração nos dirá o comprimento de onda dos raios X.

Compton realizou o experimento, disparando raios X de um único comprimento de onda conhecido contra um bloco de metal (que contém muitos elétrons livres) e medindo o comprimento de onda dos raios X espalhados em diversos ângulos de espalhamento. Ele determinou que o comprimento de onda de fato aumentava segundo o valor previsto pela análise apresentada acima.

Em resumo, uma visão corpuscular da luz foi utilizada para prever a variação da energia do fóton, e a relação onda-partícula $E = hc/\lambda$ foi utilizada para converter

variação da energia em variação do comprimento de onda. O experimento mostrou que a combinação do modelo corpuscular e do modelo ondulatório de fato previu corretamente o que acontece no processo real. Nem um modelo ondulatório puro nem um modelo corpuscular puro fariam a previsão correta.

Ponto de verificação 12 Em um experimento de espalhamento Compton, se os raios X incidentes têm um comprimento de onda 5×10^{-11} m, qual é o comprimento de onda para os raios X espalhados em um ângulo de 90° ?

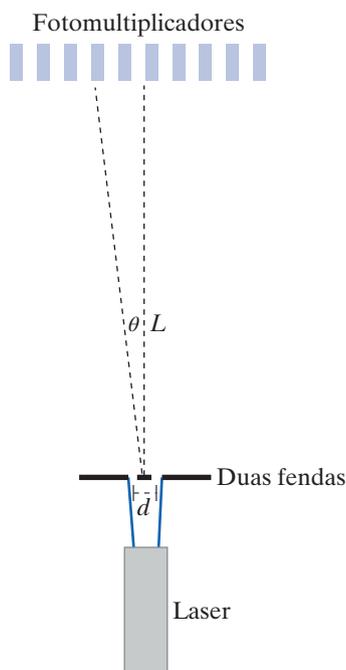


Figura S3.56 Um experimento de dupla fenda com um feixe de intensidade muito baixa, utilizando fotomultiplicadores para detectar fótons.

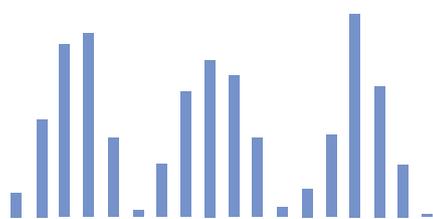


Figura S3.57 Número de fótons detectados em função do ângulo, para um feixe de baixa intensidade que passa através de duas fendas.

Revisitando a interferência de dupla fenda

Vimos anteriormente que, se um feixe de luz monocromática passa através de duas fendas, forma-se um padrão de interferência sobre uma superfície distante. Utilizando o modelo ondulatório da luz e aplicando o princípio da superposição, fomos capazes de prever com precisão os ângulos em que os máximos e mínimos ocorreriam no padrão de interferência.

Suponha que, como antes, façamos passar um feixe de luz através das duas fendas, mas desta vez diminuimos a intensidade da luz até que o feixe se torne extremamente fraco. A quantidade de luz atingindo a tela distante é pequena demais para ser detectada pelo olho humano, então utilizamos um tipo diferente de detector: um fotomultiplicador (Figura S3.56). O funcionamento de um tubo fotomultiplicador é baseado no efeito fotoelétrico. Se um único fóton ejeta um elétron de uma superfície de metal, a “corrente” de um só elétron produzida é amplificada eletronicamente, gerando um sinal suficientemente forte para ser detectado. Tubos fotomultiplicadores podem detectar fótons individuais. Posicionaremos uma matriz de fotomultiplicadores na região da tela em que anteriormente observamos um padrão de interferência com um feixe intenso de luz, e traçaremos um gráfico do número de fótons detectados em função da posição.

QUESTÃO Qual você espera que seja a aparência do gráfico resultante?

Embora fótons individuais sejam detectados em posições particulares, ao longo do tempo desenvolve-se um padrão de interferência, como aquele observado com um feixe intenso (Figura S3.57). No entanto, esse padrão surge estatisticamente, com fótons detectados frequentemente nas posições dos máximos, mas nunca nas posições dos mínimos. Apesar do fato de que estamos detectando partículas individuais, ainda observamos um fenômeno ondulatório.

Fica claro deste e de outros experimentos que um modelo completo da luz deve ter caráter tanto ondulatório quanto corpuscular, como concluímos anteriormente.

Difração de elétrons

Se dispararmos um feixe de raios X contra um único átomo, a reirradiação de raios X pelos elétrons acelerados no átomo espalha-se em todas as direções. Entretanto, se dispararmos um feixe de raios X contra um cristal composto de um enorme número de átomos dispostos em uma matriz tridimensional, há interferência construtiva da reirradiação somente em certas direções especiais, para as quais a condição $2d \sin \theta = n\lambda$ é válida. Esse é um fenômeno essencialmente ondulatório.

Anteriormente neste suplemento, discutimos a difração de raios X por pós policristalinos, em que há forte interferência construtiva para aqueles minúsculos cristais que por coincidência estavam orientados no ângulo apropriado para que valesse a condição $2d \sin \theta = n\lambda$. O resultado são anéis de raios X reirradiados circundando o feixe incidente de raios X. Quanto maior for o comprimento de onda λ , maior será o ângulo θ , e maiores serão os anéis vistos no filme de raios X.

Esperaríamos um comportamento muito diferente se utilizássemos partículas em vez de ondas. Suponha que, em lugar de utilizarmos raios X, disparássemos elétrons contra um único átomo. Há uma interação elétrica complicada entre um elétron

incidente e o átomo, envolvendo a polarização do átomo pelo elétron. O elétron é desviado pela colisão com o átomo e pode seguir em quase qualquer direção, dependendo de a qual distância do centro ele atinge o átomo.

QUESTÃO Se elétrons fossem disparados contra um cristal composto de um enorme número de átomos dispostos em uma matriz tridimensional, o que você esperaria observar?

Certamente não esperamos observar quaisquer efeitos de interferência, já que supomos que um elétron é uma partícula, não uma onda. Apesar disso, se dispararmos um feixe de elétrons contra um pó policristalino, obteremos anéis de elétrons, da mesma forma que com a difração de raios X, com os ângulos dos anéis descritos pela equação usual da difração de raios X! Experimentalmente, parece que elétrons também podem comportar-se como ondas.

Além disso, um elétron não apenas exibe fenômenos ondulatórios de interferência, mas parece até interferir consigo próprio! Se você enviar um elétron de cada vez (um feixe de elétrons com corrente muito baixa) e detectar os elétrons um de cada vez, com o auxílio de uma matriz de detectores (ou um filme fotográfico), obterá um padrão de interferência, que porém se desenvolve estatisticamente. A Figura S3.58 mostra o que você observaria para exposições cada vez mais longas de um filme a um feixe de elétrons de baixa corrente que atinge um pó policristalino. Cada ponto representa uma posição em que um elétron atingiu o filme.

Isso é intrigante! Você detecta elétrons individuais, como partículas. No entanto, se você espera tempo suficiente, descobre que o padrão detectado parece com aquele que você obtém com raios X, que são ondas. Podemos dizer que elétrons têm propriedades tanto de partícula quanto de onda.

Nesses experimentos com elétrons, a condição para interferência construtiva (estatística) é $2d \sin \theta = n\lambda$, a mesma que para a difração de raios X. Qual é o comprimento de onda λ dos elétrons? Foi previsto teoricamente por de Broglie e verificado experimentalmente por Davisson e Germer que

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

em que p é o momento do elétron, e h é a constante de Planck, uma quantidade extremamente pequena cujo valor medido é $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Note que, como $E = pc$ para um fóton, essa relação é válida para fótons também:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

Essa relação é facilmente demonstrada com um equipamento de difração de elétrons, no qual você pode controlar o momento dos elétrons incidentes variando a voltagem ΔV de aceleração. Calculamos o momento correspondente a uma certa energia cinética K :

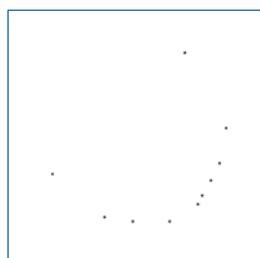
$$K = \frac{p^2}{2m}$$

logo $p = \sqrt{2mK}$, em que $K = e\Delta V$ se os elétrons partem do repouso. Portanto, prevemos que o seguinte comprimento de onda para o elétron:

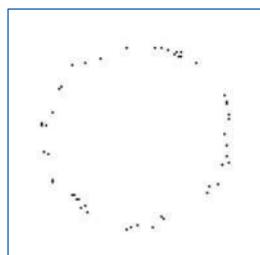
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2me\Delta V}}$$

QUESTÃO Com base nessa relação e na relação de difração $n\lambda = 2d \sin \theta$, como você esperaria que variasse o espaçamento entre os anéis de difração de elétrons se você aumentasse a voltagem de aceleração?

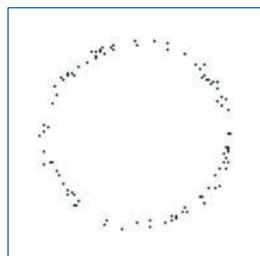
Experimentalmente, encontramos que, se a voltagem de aceleração ΔV é quadruplicada, o comprimento de onda do elétron diminui por um fator de 2, e os anéis de difração encolhem em virtude da diminuição de $\sin \theta$ por um fator de 2.



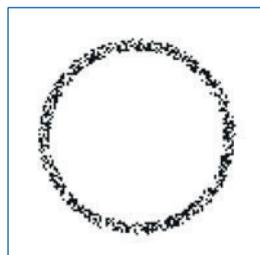
Após 10 Elétrons



Após 50 Elétrons



Após 100 Elétrons



Após 1000 Elétrons

Figura S3.58 Exposições cada vez mais longas a elétrons que atravessam um pó policristalino.

A difração de elétrons é utilizada extensivamente para utilizar a estrutura dos materiais. Ela possui em relação à difração de raios X a vantagem de que os feixes de elétrons podem ser focalizados facilmente em um ponto muito pequeno, utilizando campos elétricos e magnéticos, ao passo que isso é muito difícil de se obter com raios X. Por essa razão, a difração de elétrons é particularmente útil para estudar pequenas regiões de uma amostra de material. Em aplicações práticas, elétrons de energia bastante alta são utilizados para alcançar boa penetração no material, com potenciais típicos de aceleração de várias centenas de milhares de volts. Isso significa que o comprimento de onda λ é muito menor do que o espaçamento interatômico típico d . Conseqüentemente, θ é bastante pequeno, e os elétrons são enviados quase paralelamente aos planos atômicos de interesse.

Difração de nêutrons

Há algo especial em elétrons e fótons que os faz mostrarem aspectos tanto de partícula quanto de onda? Na verdade, não. Observam-se padrões de difração semelhantes quando átomos inteiros de hélio são disparados contra um cristal, e o comprimento de onda do átomo de hélio é também $\lambda = h/p$ (mas com uma massa m muito maior).

Um caso particularmente importante é o da difração de nêutrons. Nêutrons não possuem carga e carregam apenas um momento magnético muito pequeno, de modo que interagem com elétrons apenas através de fracas interações magnéticas, sem interações elétricas. No entanto, nêutrons possuem uma forte interação nuclear com prótons e outros nêutrons, como evidenciado pela presença de nêutrons nos núcleos atômicos. Se você disparar um único nêutron contra um único átomo, o nêutron pode praticamente não ser afetado pelos elétrons, mas pode ser desviado pelo núcleo segundo quase qualquer ângulo. Quando você dispara nêutrons contra um cristal, vale a equação usual $2d \sin \theta = n\lambda$ para interferência construtiva.

O que está “ondulando”?

A radiação eletromagnética consiste em ondas de campo elétrico. A interferência da radiação eletromagnética deve-se à superposição de campos elétricos, e a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude do campo.

No caso da difração de elétrons ou nêutrons, o que está “ondulando”? Ocorre que partículas podem ser descritas por “funções de onda” abstratas, cujas amplitudes locais, ao quadrado, dão a probabilidade de encontrar a partícula em uma dada posição. A mesma equação $2d \sin \theta = n\lambda$ que prevê as posições dos anéis de intensidade para a difração de raios X também prevê as posições dos anéis de probabilidade para a difração de elétrons ou nêutrons. A interferência clássica de luz é então uma boa base para a compreensão da interferência quântica de partículas — mas a interpretação muda da intensidade clássica para a probabilidade quântica.

Ponto de verificação 13 Qual é aproximadamente o mínimo potencial de aceleração ΔV necessário para que elétrons exibam efeitos de difração em um cristal?

S3.7 *ANÁLISE DE FOURIER

Como descobrimos que quantidade de cada um dos dez modos deveríamos superpor para obter o comportamento complicado mostrado na Seção S3.5? Em princípio, poderíamos ter feito uso de tentativa e erro — simplesmente tentar várias combinações de modos até obter a forma que queríamos. Entretanto, você facilmente pode imaginar que essa seria uma tarefa bastante tediosa.

Vamos esboçar o esquema geral para fazer isso, e em seguida aplicá-lo ao nosso caso específico. Queremos expressar a forma inicial da corda, $f(x)$, como uma soma de quantidades apropriadas de muitos modos, que são funções seno com

comprimentos de onda $2L, 2L/2, 2L/3$ e assim por diante:

$$f(x) = A_1 \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{2L} \right) + A_2 \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{2x}{2L} \right) + A_3 \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{3x}{2L} \right) + \dots$$

Precisamos ajustar os coeficientes $A_1, A_2, A_3,$ e assim por diante, de forma a escolher a superposição apropriada de modos que é igual a $f(x)$. Para descobrir que valor deve ter o n -ésimo coeficiente, considere a seguinte integral:

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx = \int_0^L \left[A_1 \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{2L} \right) + A_2 \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{2x}{2L} \right) + \dots \right] \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx$$

Pode-se mostrar, utilizando identidades trigonométricas, que vale o seguinte:

$$\int_0^L \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kx}{2L} \right) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx = \frac{L}{2} \quad \text{se } k = n$$

$$\int_0^L \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kx}{2L} \right) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

Portanto a integral seleciona apenas o termo A_n :

$$\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx = 0 + 0 + \dots + 0 + A_n \frac{L}{2} + 0 + 0 + \dots$$

Finalmente, isso significa que podemos calcular o coeficiente do n -ésimo modo pela seguinte equação:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx$$

Esse esquema é chamado de “análise de Fourier”. Ele desempenha um papel enormemente importante em muitas áreas da ciência e da engenharia.

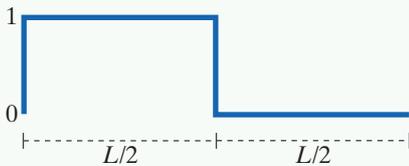


Figura S3.59 Expressaremos essa onda quadrada em termos de uma soma de senoides.

Aqui, $\vec{E} = \vec{E}_{\text{laser}} + \vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2} + \vec{E}_R = \vec{0}$

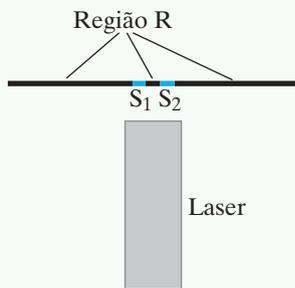


Figura S3.60 Por trás do anteparo opaco, o campo elétrico resultante é nulo.

***Um exemplo específico**

Na Seção S3.5 queríamos analisar uma “onda quadrada” como uma soma de modos (Figura S3.59). A função $f(x)$ tem o valor $+1$ para $0 < x < L/2$, e 0 para $L/2 < x < L$, de forma que temos

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{nx}{2L} \right) dx + 0$$

$$A_n = \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{\pi n} \cos \left(\pi \frac{nx}{L} \right) \right]_0^{L/2} = \frac{2}{\pi n} \left[1 - \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Descartando o fator global $2/\pi$ (que apenas estabelece a escala global de tamanho da oscilação), obtemos o seguinte conjunto de coeficientes dos modos: $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1/3, A_4 = 0, A_5 = 1/5, A_6 = 1/3, A_7 = 1/7, A_8 = 0, A_9 = 1/9, A_{10} = 1/5$ e assim por diante.

Na Seção S3.5, utilizamos apenas esses dez primeiros modos, de forma que não imitamos exatamente a função de onda quadrada $f(x)$ que queríamos, mas chegamos perto. Se tivéssemos utilizado mais modos, teríamos chegado ainda mais perto de aproximar uma onda quadrada. Se utilizarmos um número arbitrariamente grande de modos poderemos chegar arbitrariamente perto da função desejada.

Esse é na verdade um exemplo extremo, porque essa onda quadrada tem descontinuidades que requerem modos de frequências muito altas para aproximar as inclinações infinitas da função. Funções que têm comportamento menos extremo podem frequentemente ser muito bem aproximadas com apenas alguns modos.

S3.8 *DEDUÇÃO: DUAS FENDAS SÃO COMO DUAS FONTES

A prova de que duas fendas iluminadas agem como duas fontes é uma aplicação do princípio da superposição. Suponha que um laser ilumine um anteparo opaco (Figura S3.60). De acordo com o princípio da superposição, os campos elétrico e magnético produzidos pelo laser devem estar presentes além do anteparo, apesar da ausência de luz ali. Isso significa que a luz do laser acelera elétrons no anteparo de forma tal a que os elétrons acelerados produzam campos elétrico e magnético além do anteparo que cancelem exatamente os campos produzidos pelo laser.

Podemos considerar que o anteparo consiste no material que será em algum momento removido para produzir as fendas (as regiões S_1 e S_2 do anteparo), mais o restante do anteparo (a região R). Podemos considerar que os campos elétrico e magnético (nulos) além do anteparo sejam produzidos por quatro fontes: o laser e os elétrons acelerados nas regiões S_1 , S_2 e R do anteparo. O campo elétrico resultante é

$$\vec{E}_{\text{laser}} + \vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2} + \vec{E}_R = 0$$

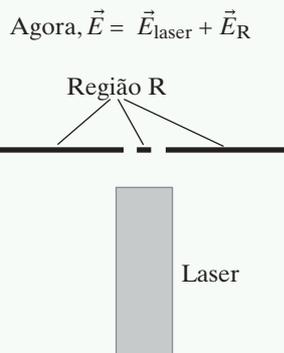


Figura S3.61 Com as fendas recortadas, o campo resultante deve-se apenas ao laser e à região R.

$$\vec{E} = \vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2}$$

S_1 S_2

Figura S3.62 Além das fendas, podemos fazer de conta que o campo se deve apenas a essas duas fontes.

Quando recortamos as fendas, os campos elétrico e magnético além do anteparo devem-se apenas ao laser e aos elétrons acelerados na região R do anteparo, $\vec{E}_{\text{laser}} + \vec{E}_R$ (Figura S3.61).

Se supomos que as acelerações dos elétrons na região R são aproximadamente as mesmas em ambas as situações, quer as fendas tenham sido recortadas ou não, então os campos elétrico e magnético produzidos pela região R são aproximadamente iguais em ambas as situações. Como $\vec{E}_{\text{laser}} + \vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2} + \vec{E}_R = 0$, o campo elétrico com as fendas recortadas é

$$\vec{E}_{\text{laser}} + \vec{E}_R = -(\vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2})$$

Ao calcularmos as intensidades, não nos importamos com um sinal global; logo, em vez de considerarmos a difícil situação de um laser e um anteparo do qual foram recortadas duas fendas, podemos considerar a situação mais simples e já familiar de duas fontes, localizadas nas posições reais das fendas e produzindo um campo elétrico resultante $\vec{E}_{S_1} + \vec{E}_{S_2}$, sem o laser e a região R (Figura S3.62).

O quanto é válida a suposição de que as acelerações dos elétrons na região R são aproximadamente as mesmas, quer as fendas tenham sido recortadas ou não? Essa suposição pode não funcionar bem muito próximo das fendas, porque a presença ou ausência do material afetará as porções da região R em torno das bordas, mas estamos interessados em explicar o padrão de interferência sobre uma tela distante, não nas proximidades das fendas.

A suposição também pode não funcionar muito bem se as fendas forem muito pequenas, porque nesse caso sua contribuição é tão pequena que se compara aos efeitos de borda, mas lidamos tipicamente com fendas bastante largas, no sentido de terem uma largura muito maior que o comprimento de onda da luz. Previsões baseadas em tratar as duas fendas como se fossem fontes de fato produzem resultados em excelente concordância com as observações.

Essa dedução deve-se a Richard Feynman (*Lições de Física*, R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands. Porto Alegre: Bookman 2008, p. 31–10).

S3.9 *A EQUAÇÃO DA ONDA PARA A LUZ

Nesta seção opcional, deduzimos a equação da onda para a luz, partindo da forma diferencial das equações de Maxwell, em que \vec{J} é a densidade de corrente em amperes

por metro quadrado:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{lei de Gauss}$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{lei de Gauss para o magnetismo}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{lei de Faraday}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{lei de Ampère–Maxwell}$$

Considere o caso de uma onda eletromagnética plana propagando-se na direção x no espaço vazio, em que não há cargas ou correntes, com $\vec{E} = \langle 0; E_y; 0 \rangle$ e $\vec{B} = \langle 0; 0; B_z \rangle$. Lembre que

$$\vec{\nabla} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

Utilizando as definições usuais para o cálculo das componentes de um produto escalar e de um produto vetorial, você pode verificar que as equações de Maxwell para essa situação assumem a seguinte forma (lembre que não há cargas ou correntes):

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \left\langle 0; \frac{\partial E_y}{\partial y}; 0 \right\rangle = \langle 0; 0; 0 \rangle$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \left\langle 0; 0; \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle = \langle 0; 0; 0 \rangle$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = \left\langle -\frac{\partial E_y}{\partial z}; 0; \frac{\partial E_y}{\partial x} \right\rangle = \left\langle 0; 0; -\frac{\partial B_z}{\partial t} \right\rangle$$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \left\langle \frac{\partial B_z}{\partial y}; -\frac{\partial B_z}{\partial x}; 0 \right\rangle = \mu_0 \varepsilon_0 \left\langle 0; \frac{\partial E_y}{\partial t}; 0 \right\rangle$$

Essas equações mostram que E_y e B_z não dependem de y ou z , logo estamos lidando com uma onda plana propagando-se na direção $+x$ ou na direção $-x$. As duas equações restantes para as componentes são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned}$$

Tome a derivada parcial da primeira equação em relação a x e inverta a ordem das derivadas parciais de B_z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

Substitua o valor de $\partial B_z / \partial x$ obtido da segunda equação:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Reescreva para combinar com a forma da equação da onda:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

Essa é a equação de uma onda movendo-se com velocidade escalar $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, cujo valor numérico é $v = 3 \times 10^8$ m/s. Lembre que obtivemos o mesmo resultado no Capítulo 23, aplicando a forma integral das equações de Maxwell a uma fatia de radiação eletromagnética.

RESUMO

A luz possui propriedades tanto de onda quanto de partícula. Um fóton é uma partícula de luz com massa de repouso nula, tendo energia e momento relacionados a seu comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{e} \quad E = \frac{hc}{\lambda}$$

Tanto fótons quanto partículas com massa de repouso não nula, como elétrons e nêutrons, podem exibir propriedades ondulatórias, como interferência.

Propriedades das ondas senoidais

Uma onda propagando-se para a direita: $E \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi \right)$

E é a amplitude.

T é o período.

$f = 1/T$ é a frequência.

$\omega = 2\pi f$ é a frequência angular.

λ é o comprimento de onda.

φ é a fase correspondente a uma escolha de $t = 0$ e $x = 0$.

$v = f\lambda$ (v é a velocidade de propagação da onda).

Intensidade I é proporcional a (amplitude)².

Interferência

Ondas da mesma frequência podem interferir uma com a outra. Como resultado do princípio da superposição, algumas posições têm amplitudes e intensidades incomumente altas, enquanto outras posições têm amplitudes e intensidades pequenas ou nulas.

Interferência de dupla fenda pode ser observada mesmo se os fótons atravessam as fendas um de cada vez.

Ondas estacionárias

Ondas estacionárias resultam da interferência de duas ondas progressivas da mesma frequência que se deslocam em sentidos opostos. As ondas estacionárias têm mesma frequência e mesmo comprimento de onda que as ondas progressivas.

Em um espaço confinado, ondas estacionárias são quantizadas — somente certos comprimentos de onda estacionários são permitidos. No caso simples de uma corda tensionada, os comprimentos de onda permitidos são $2L$, $2L/2$, $2L/3$ e assim por diante.

Os movimentos das ondas estacionárias são chamados de “modos”. Ondas confinadas arbitrariamente complicadas podem ser construídas em termos de superposições desses modos simples.

O estado estacionário é alcançado quando as perdas de energia são exatamente iguais à energia fornecida.

Diferença de caminho e interferência de duas fontes

Interferência de duas fontes em fase separadas por uma distância d :

Intensidade máxima ($4I_0$) em que $\Delta l = d \sin \theta$ é $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$ e assim por diante.

Intensidade mínima (zero) em que $\Delta l = d \sin \theta$ é $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$ e assim por diante.

Intensidade nula é impossível se $d < \lambda/2$.

Se duas fontes não estão em fase, você precisa levar essa diferença de fase em consideração, além da diferença de fase associada a Δl .

Difração de raios X

Condição para “reflexão” é $2d \sin \theta = n\lambda$, em que n é um inteiro, d é a distância entre planos cristalinos adjacentes e θ é o ângulo entre os raios X e a superfície. Pós policristalinos produzem anéis em torno do feixe.

Previsão do espalhamento Compton

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

Filmes finos exibem efeitos de interferência. Exemplos são manchas de óleo e bolhas de sabão.

Redes de difração

Máximos em ângulos que satisfazem $d \sin \theta = n\lambda$, em que d é o espaçamento entre as fendas.

Resolução angular de dispositivos

$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{W}$$

em que W é a largura total (da parte iluminada) do dispositivo.

Fonte única de largura W : ângulo para o primeiro mínimo de difração é $\theta \approx \lambda/W$.

Espalhamento da luz é afetado por efeitos de interferência.

A equação da onda: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

A velocidade de ondas longitudinais: $v = \sqrt{\frac{k_{m,i}}{m_a}} d = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

A velocidade de ondas transversais: $v = \sqrt{\frac{F_T d}{m_a}} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

A partir dos comprimentos de onda permitidos em uma onda estacionária, é possível calcular as frequências correspondentes. No caso simples de uma corda tensionada, as frequências permitidas podem ser calculadas de $f = v/\lambda$, e são $v/(2L)$, $2v/(2L)$, $3v/(2L)$ e assim por diante.

Partículas possuem propriedades ondulatórias

O momento de uma partícula relaciona-se a seu comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

em que $h = 6,6 \times 10^{-34}$ J·s é a constante de Planck.

O efeito fotoelétrico

Um fóton com energia igual ou maior que a energia de ligação de um elétron em um metal (a “função trabalho”) pode ejetar um elétron da superfície do metal.

Espalhamento Compton

Uma colisão entre um fóton e um elétron livre resulta em uma variação do comprimento de onda do fóton, relacionada à quantidade de energia adquirida pelo elétron na colisão.

Análise de Fourier

Uma onda confinada pode ser expressa como uma soma de senóides:

$$f(x) = A_1 \sin\left(2\pi \frac{x}{2L}\right) + A_2 \sin\left(2\pi \frac{2x}{2L}\right) + A_3 \sin\left(2\pi \frac{3x}{2L}\right) + \dots$$

em que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(2\pi \frac{nx}{2L}\right) dx$$

QUESTÕES

Q1 É natural dizer que “a luz é refletida em espelhos”, mas há um princípio físico que dê conta desse comportamento? O que realmente acontece? Por que não há luz espalhada em todas as direções, mas apenas na direção do ângulo de “reflexão”?

Q2 Resuma as diferentes previsões dos modelos ondulatório e corpuscular da luz com respeito ao efeito fotoelétrico. Que observações experimentais dão suporte ao modelo corpuscular?

Q3 Segundo o modelo ondulatório da luz, qual é a relação entre energia e intensidade? Qual é essa relação segundo o modelo corpuscular da luz?

Q4 A Figura S3-63 mostra um gráfico da intensidade para a situação em que as fontes estão próximas entre si, com $d = \lambda/3,5$. Vemos que a distribuição de intensidade não é muito dramática quando $d < \lambda/2$. Por que a intensidade é não nula em todos os pontos? Por que não há intensidade zero em algum lugar?

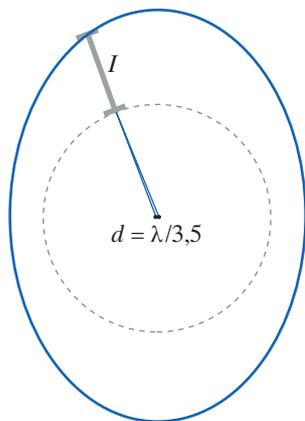


Figura S3-63 Gráfico da intensidade para duas fontes muito próximas entre si.

Q5 Em uma colisão entre um fóton e um elétron estacionário, por que o comprimento de onda do fóton muda como resultado da colisão? Ele aumenta ou diminui?

Q6 Na difração de elétrons, anéis de difração são produzidos quando os elétrons atravessam um material policristalino após serem acelerados por uma diferença de potencial. O que acontece ao tamanho dos anéis de difração quando a diferença de potencial de aceleração aumenta?

Q7 Explique por que um feixe de luz pode seguir em linha reta através de um tanque de água bastante longo ou um longo bastão de vidro transparente, sem que quase nenhuma luz seja emitida para os lados, apesar do enorme número de átomos cujos elétrons são acelerados pela luz incidente.

Q8 À noite você observa uma piscina externa que possui uma intensa lâmpada submersa cujo feixe horizontal é direcionado para a sua direita. A água não está inteiramente límpida, e há bastante espalhamento de luz. Você dispõe de um filme polarizador com uma linha desenhada para mostrar a direção do campo elétrico cuja passagem é permitida. Para minimizar o brilho da luz espalhada, você segura o filme com a linha na direção do feixe (esquerda/direita) ou perpendicular ao feixe (subindo/descendo)? Explique sucintamente, incluindo um diagrama.

Q9 Um satélite em órbita da Terra carrega uma câmera. Explique por que o diâmetro da lente da câmera determina o menor tamanho de um objeto que pode ser resolvido em uma fotografia tirada pela câmera.

Q10 Em que ondas estacionárias diferem de ondas progressivas? Em que são semelhantes?

Q11 Quando uma corda de violoncelo é tocada com o arco, muitos modos diferentes são excitados, não apenas o modo de frequência mais baixa, o que contribui para a riqueza do som. **(a)** Quando o arco é afastado a corda continua a vibrar. Após algum tempo, somente o modo de frequência mais baixa permanece em movimento. Por quê? **(b)** Quando um violoncelista toca levemente o ponto médio da corda com o arco, sem pressionar a corda para baixo com o dedo, o modo de frequência mais baixa e todos os modos com múltiplos ímpares daquela frequência estão ausentes. Isso afeta substancialmente o tom e é utilizado para produzir um efeito musical especial. Explique por que os harmônicos ímpares estão ausentes.

PROBLEMAS

Seção S3.1

- P12 Uma certa estação de rádio AM transmite em uma frequência de 1020 kHz. Qual é o comprimento de onda dessa radiação eletromagnética? Quanto tempo é necessário para que a radiação se propague da antena transmissora até um receptor a 4 km de distância?
- P13 O comprimento de onda da luz violeta é de cerca de 400 nm ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^9 \text{ m}$). Quais são a frequência e o período das ondas luminosas?
- P14 A altura de uma certa onda na água é descrita pela função

$$y = (1,5 \text{ m}) \cos \left[(25,1/\text{s})t - (2,51/\text{m})x + \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) \right]$$

Calcule a frequência angular ω , a frequência f , o período T , o comprimento de onda λ , a velocidade e o sentido de propagação ($+x$ ou $-x$) e a amplitude da onda. Em $x = 0$ e $t = 0$, qual é a altura da onda?

- P15 As relações entre comprimento de onda, frequência, período e velocidade de propagação aplicam-se a todos os fenômenos ondulatórios, e não apenas à radiação eletromagnética. O dó médio em um piano tem uma frequência fundamental de 256 Hz. Qual é o comprimento de onda correspondente das ondas sonoras? (A velocidade do som no ar varia com a temperatura, mas fica em torno de 340 m/s à temperatura ambiente.)
- P16 Dois alto-falantes estão arranjados lado a lado, separados por 1 m. Eles são conectados ao mesmo amplificador, que produz uma onda senoidal de 440 Hz (a nota lá de referência para a afinação musical). Calcule a direção em que você não ouviria nada, e faça um diagrama mostrando os alto-falantes e essa direção. (A velocidade do som no ar é de cerca de 340 m/s.)
- P17 Na Figura S3-64, uma onda eletromagnética senoidal não polarizada, com comprimento de onda λ , desloca-se ao longo da direção $-x$ em uma região em que há dois fios curtos de cobre orientados ao longo da direção z , separados por uma distância $L = 2,5\lambda$.

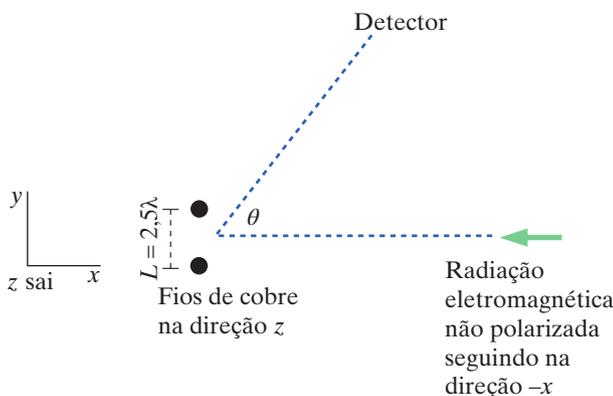


Figura S3-64

- (a) Você posiciona um detector muito distante, formando um ângulo θ com o eixo x . Apesar de estar muito longe da região da onda não polarizada, você detecta radiação eletromagnética, e ela está polarizada. Explique detalhadamente esse fenômeno, incluindo as direções dos campos elétrico e magnético que você detecta. (b) Calcule um ângulo θ_1 diferente de 0° em que você observa intensidade máxima, e calcule um ângulo θ_2 em que você observa intensidade zero. Explique sucintamente.

- P18 Uma luz verde coerente com um comprimento de onda de 500 nm ilumina duas estreitas fendas verticais separadas por uma distância de 0,12 mm. Faixas verdes brilhantes são vistas em uma tela a 2 m de distância. (a) Qual é a distância entre os centros de duas faixas consecutivas? (b) Elas se afastam ou se aproximam se você aproximar as fendas? (c) Elas se afastam ou se aproximam se você utilizar luz violeta (comprimento de onda = 400 nm)?

Seção S3.2

- P19 Um raio de luz violeta (comprimento de onda 400 nm) atinge perpendicularmente uma rede de difração por transmissão que possui 10.000 linhas por centímetro. Em que ângulos em relação à perpendicular, além de zero, há raios violeta brilhantes?
- P20 À noite, você olha através de uma rede de difração por transmissão para uma lâmpada de vapor de sódio utilizada na iluminação de ruas, que emite luz monocromática de comprimento de onda 588 nm. O fabricante da rede afirma que ela contém 10.000 linhas por centímetro. Além do ângulo nulo, em que outros ângulos você observará uma luz brilhante?
- P21 Quando raios X de comprimento de onda $0,4 \times 10^{-10} \text{ m}$ atingem um cristal segundo um ângulo de 30° com relação à superfície, observa-se um intenso feixe de raios X na direção do ângulo de “reflexão”. Suponha que você saiba, por outras evidências, que o espaçamento entre as camadas atômicas paralelas à superfície do cristal é maior que $1 \times 10^{-10} \text{ m}$ e menor que $1,8 \times 10^{-10} \text{ m}$. Quais são os valores possíveis para o espaçamento entre as camadas?
- P22 Suponha que você possua uma fonte de raios X que produz um espectro contínuo de comprimentos de onda, com um comprimento de onda mínimo de $0,3 \times 10^{-10} \text{ m}$. Você dispõe de um cristal conhecido, cujos átomos se arranjam em uma matriz cúbica, com vizinhos mais próximos separados por uma distância $1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$. (a) Proponha um arranjo do feixe de raios X e da orientação do cristal que produza um feixe monocromático de raios X cujo comprimento de onda seja de $0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$. Desenhe um diagrama que ofereça uma explicação cuidadosa e completa. (b) Se o menor comprimento de onda no espectro de raios X fosse de $0,2 \times 10^{-10} \text{ m}$ em vez de $0,3 \times 10^{-10} \text{ m}$, explique por que seu feixe não seria composto de um só comprimento de onda.

- P23 A cor magenta consiste em uma mistura de luz vermelha (comprimento de onda de cerca de 700 nm) e azul (cerca de 450 nm). Se você observa uma porção magenta de uma bolha de sabão, qual a espessura aproximada dessa porção da bolha? Suponha que os comprimentos de onda no material sejam encurtados por um fator de 1,3.

Seção S3.3

- P24 A luz de um laser vermelho com comprimento de onda 630 nm atravessa uma única fenda cuja largura é de 0,05 mm. Qual é a largura da imagem da fenda vista sobre uma tela a 5 m da fenda?
- P25 Uma única fenda vertical com 0,01 mm de largura é iluminada por luz vermelha com comprimento de onda de 700 nm. (a) Qual é a largura aproximada da faixa brilhante sobre uma tela a 2 m de distância? (b) A faixa torna-se mais larga ou mais estreita se você estreitar a fenda? (c) A faixa torna-se mais larga ou mais estreita se você utilizar luz azul?
- P26 Considere um satélite de comunicações que orbita a Terra a uma altura de cerca de 40.000 km. Nessa altura, o período da órbita é de 24 h, de modo que o satélite parece imóvel sobre a Terra, que gira sob o satélite completando uma volta a cada 24 h. Esse é um chamado satélite “geoestacionário”. A vantagem desse arranjo é que as antenas

receptoras no solo podem apontar para uma direção aparentemente fixa do céu, não sendo necessário guiá-lo. Você provavelmente já viu essas antenas receptoras fixas apontadas para o céu. Se a antena transmissora do satélite tem 2 m de diâmetro e transmite a uma frequência de 10 GHz ($f = 10 \times 10^9$ Hz), qual é o diâmetro aproximado da região no solo que pode captar a transmissão do satélite?

Seção S3.4

•P27 Uma corda de 4 m de comprimento, com massa de 0,06 kg, está fortemente tensionada. Um vídeo mostra que um pulso transversal leva 0,16 s para percorrer o comprimento da corda. Qual a tensão na corda?

•P28 Golpeia-se a extremidade de uma barra de metal com 2 m de comprimento, e no mesmo instante liga-se um cronômetro eletrônico, que é parado quando um microfone na outra extremidade da barra detecta um som. O tempo medido para o som ir de uma extremidade à outra é de 0,6 ms, e a medida da densidade da barra fornece $7,4 \text{ g/cm}^3$. Qual é o módulo de Young para esse material?

•P29 Na Figura S3-65, qual é a amplitude? Qual é o comprimento de onda? Qual é o período? Qual é o número de onda? Qual é a frequência angular? Qual é a frequência?

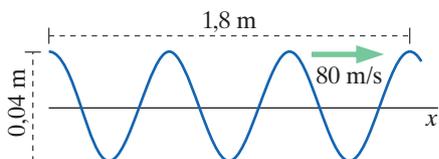


Figura S3-65

•P30 Escreva a função para uma onda cossenoidal que se move no sentido $-x$ ao longo de uma corda, com velocidade de 30 m/s e amplitude de 0,04 m.

•P31 Escreva a função de x e t para uma onda cossenoidal movendo-se no sentido $-x$ ao longo de uma corda, com comprimento de onda de 0,2 m, velocidade de 45 m/s e amplitude de 0,04 m.

•P32 Uma onda senoidal move-se ao longo de uma corda vertical, com $u(y,t) = 0,03 \text{ sen}(20y + 45t)$. Qual é a velocidade de propaga-

ção da onda? Qual é a frequência? A onda está se movendo para cima ou para baixo?

•P33 Uma extremidade de uma barra de metal é impulsionada segundo um modo longitudinal senoidal com frequência de 800 Hz. Na outra extremidade da barra, a intensidade medida do som é de $1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$, aproximadamente a menor intensidade sonora que um ouvido humano pode detectar. A barra tem 4 cm de comprimento e uma área de seção transversal de 1,3 cm por 0,7 cm. A densidade é de 7 g/cm^3 e a velocidade do som é de 1700 m/s. Qual é a amplitude das oscilações longitudinais de um átomo na barra? Como isso se compara com as distâncias interatômicas típicas em um sólido?

•P34 Um fio com massa total M e comprimento L pende do teto, sob ação de seu próprio peso. Qual é o tempo necessário para que um pulso transversal vá da extremidade inferior até a extremidade superior do fio? Certifique-se de mostrar todos os passos de sua análise.

Seção S3.5

•P35 O modo de mais baixa frequência da corda mais baixa (dó) em um violoncelo corresponde a 64 Hz. O comprimento da corda entre seus suportes é de 70 cm. (a) Qual a velocidade de propagação das ondas progressivas nessa corda? (b) Calcule as frequências e os comprimentos de onda dos próximos quatro modos (sem incluir o de 64 Hz), e faça um esboço da forma da onda estacionária para cada modo.

Seção S3.6

•P36 Qual é a energia, em eV, de um fóton cujo comprimento de onda é de 334 nm?

•P37 Se a função trabalho de um metal é 3,4 eV, qual seria o máximo comprimento de onda de luz que ainda ejeta um elétron do metal?

•P38 Elétrons são acelerados através de uma diferença de potencial de 1000 V e atingem um pó policristalino cujas camadas atômicas são separadas por uma distância de 1×10^{-10} m. Preveja o ângulo no qual você verá um anel de difração de elétrons.

•P39 Uma lâmpada de 100 W é colocada em um suporte com um refletor que produz um foco de luz de raio 20 cm. Calcule a amplitude aproximada do campo elétrico radiativo no foco e o número de fótons que atingem o foco a cada segundo.

RESPOSTAS DOS PONTOS DE VERIFICAÇÃO

1 Quando $t = 0$, temos $E \cos(\pi) = -E$, que corresponde a um ponto sobre a curva. A curva é desviada de π rad (meio ciclo) em relação à primeira curva (Figura S3-66).

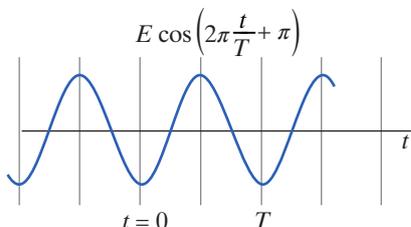


Figura S3-66

2 9

3 (a) $6,4^\circ$ (0,11 rad), (b) 63° (1,1 rad)

4 $13,89^\circ$

5 640 nm

6 588 nm

7 8 mm

8 1,2 m

9 Supusemos que a inclinação de $u(x)$ era pequena, para satisfazer a aproximação de pequenos ângulos para o seno e o cosseno.

10 O modo de longo comprimento de onda (baixa frequência) deve ser mais fácil, porque menores velocidades implicam menor resistência do ar, e maior comprimento de onda implica menor ângulo de curvatura (menor atrito interno).

11 3,4 eV

12 $5,24 \times 10^{-11}$ m

13 Cerca de 150 V para $\lambda \approx 1 \times 10^{-10}$ m