



# Teste de hipóteses para uma população

# Teste de hipóteses

**Exemplo.** Uma indústria adquire de um certo fabricante pinos cuja resistência média à ruptura é especificada em 60 unid. (**valor nominal** da especificação). Em um determinado dia a indústria recebeu um grande lote de pinos e a equipe técnica da indústria deseja verificar se o lote atende às especificações.

$H_0$ : O lote atende às especificações (Hipótese **nula**).

$H_1$ : O lote não atende às especificações (Hipótese **alternativa**).

A v. a.  $X$  (resistência à ruptura) é tal que  $X \sim N(\mu, 25)$ . O problema pode ser resolvido testando as hipóteses

$H_0: \mu = 60$  (hipótese **simples**: um único valor)  
e  $H_1: \mu \neq 60$  (hipótese **composta**: mais de um valor)

# Teste de hipóteses

Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre o(s) parâmetro(s) da distribuição de probabilidade de uma característica (v. a.  $X$ ) da população.

Um **teste** de uma hipótese estatística é um procedimento ou **regra de decisão** que nos possibilita decidir por  $H_0$  ou  $H_1$  com base na amostra  $X_1, \dots, X_n$ .

**Exemplo.** A equipe técnica da indústria decidiu retirar uma amostra aleatória de tamanho  $n = 16$  do lote recebido. A resistência de cada pino foi medida e foi calculada a resistência média  $\bar{X}$  (**estimador** de  $\mu$ ), que será utilizada para realizar o teste (**estatística de teste**). Podemos afirmar que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{25}{16}\right).$$

**Obs.** Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra de uma distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$ , então a **média amostral** tem distribuição  $N(\mu, \sigma^2/n)$ .

Para quais valores de  $\bar{X}$  a equipe técnica deve rejeitar  $H_0$  e portanto rejeitar o lote?

**Região crítica** ( $R_c$ ) ou **região de rejeição** é o conjunto de valores assumidos pela estatística de teste para os quais a hipótese nula **é rejeitada**. Seu complementar é a **região de aceitação** ( $R_a$ ).

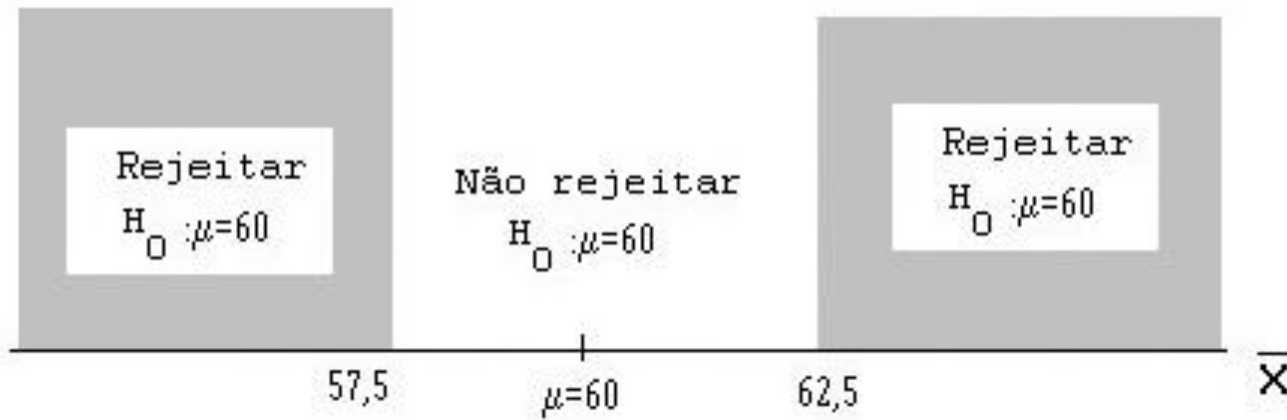
**Exemplo.** Se o lote está fora de especificação, isto é, se  $H_1: \mu \neq 60$  for verdadeira, espera-se que a média amostral seja inferior ou superior a 60 unid.

A equipe técnica decidiu adotar a seguinte regra:

**rejeitar**  $H_0$  se  $\bar{x}$  for maior do que 62,5 unid. ou menor do que 57,5 unid. As duas regiões são

$$R_c = \{\bar{X} > 62,5 \text{ ou } \bar{X} < 57,5\} : \text{região de rejeição de } H_0 \text{ e}$$

$$R_a = \{57,5 \leq \bar{X} \leq 62,5\} : \text{região de aceitação de } H_0.$$



Procedimento (teste):

Se  $\bar{x} \in R_c$ , rejeita - se  $H_0$ ;

Se  $\bar{x} \notin R_c$ , não se rejeita (aceita - se)  $H_0$ .

# Tipos de erros

Erro tipo I: **rejeitar**  $H_0$  quando  $H_0$  é **verdadeira**.

Erro tipo II: **não rejeitar** (**aceitar**)  $H_0$  quando  $H_0$  é **falsa**.

**Exemplo.** As hipóteses são

$H_0$ : O lote atende às especificações;

$H_1$ : O lote não atende às especificações.

Erro tipo I: **rejeitar** o lote sendo que ele está **de acordo** com as especificações.

Erro tipo II: **não rejeitar** (**aceitar**) o lote sendo que ele **não está de acordo** com as especificações.

Quadro resumo:

| Decisão            | Situação real e desconhecida |                        |
|--------------------|------------------------------|------------------------|
|                    | $H_0$ verdadeira             | $H_0$ falsa            |
| Não rejeitar $H_0$ | <b>Decisão correta</b>       | <b>Erro tipo II</b>    |
| Rejeitar $H_0$     | <b>Erro tipo I</b>           | <b>Decisão correta</b> |

# Nível de significância e poder

$P(\text{Erro tipo I}) = \alpha$  (nível de significância).

$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0; H_0 \text{ verdadeira}).$

$P(\text{Erro tipo II}) = \beta = P(\text{Não rejeitar } H_0; H_0 \text{ falsa})$   
 $= P(\text{Não rejeitar } H_0; H_1 \text{ verdadeira}).$

$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0; H_0 \text{ é falsa})$  : poder do teste.

Obs. Quanto maior o poder, melhor o teste.

**Exemplo.** As hipóteses são  $H_0: \mu = 60$  e  $H_1: \mu \neq 60$ . Logo,

$$\alpha = P(\bar{X} > 62,5 \text{ ou } \bar{X} < 57,5; H_0 : \mu = 60).$$

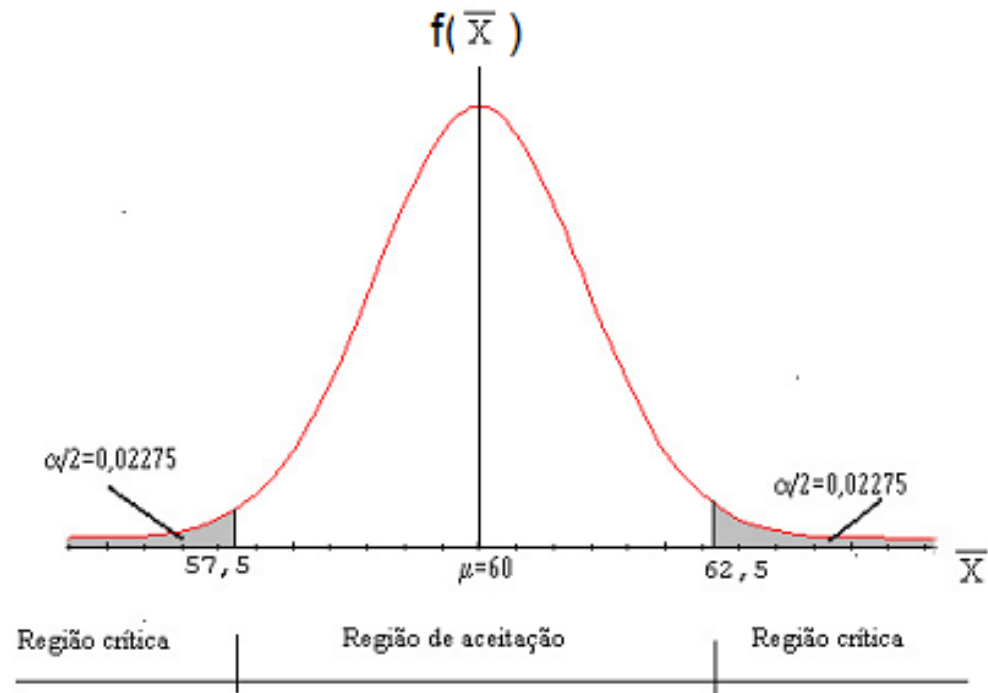
Se  $H_0$  for verdadeira, então  $\bar{X} \sim N(60, 25/16)$ .

Calculamos o nível de significância:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} > 62,5; H_0 : \mu = 60) + P(\bar{X} < 57,5; H_0 : \mu = 60) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 60}{\sqrt{25/16}} > \frac{62,5 - 60}{\sqrt{25/16}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 60}{\sqrt{25/16}} < \frac{57,5 - 60}{\sqrt{25/16}}\right) \\ &= P(Z > 2,00) + P(Z < -2,00) = 0,02275 + 0,02275 = 0,0455. \end{aligned}$$



## Cálculo de $\alpha$ :

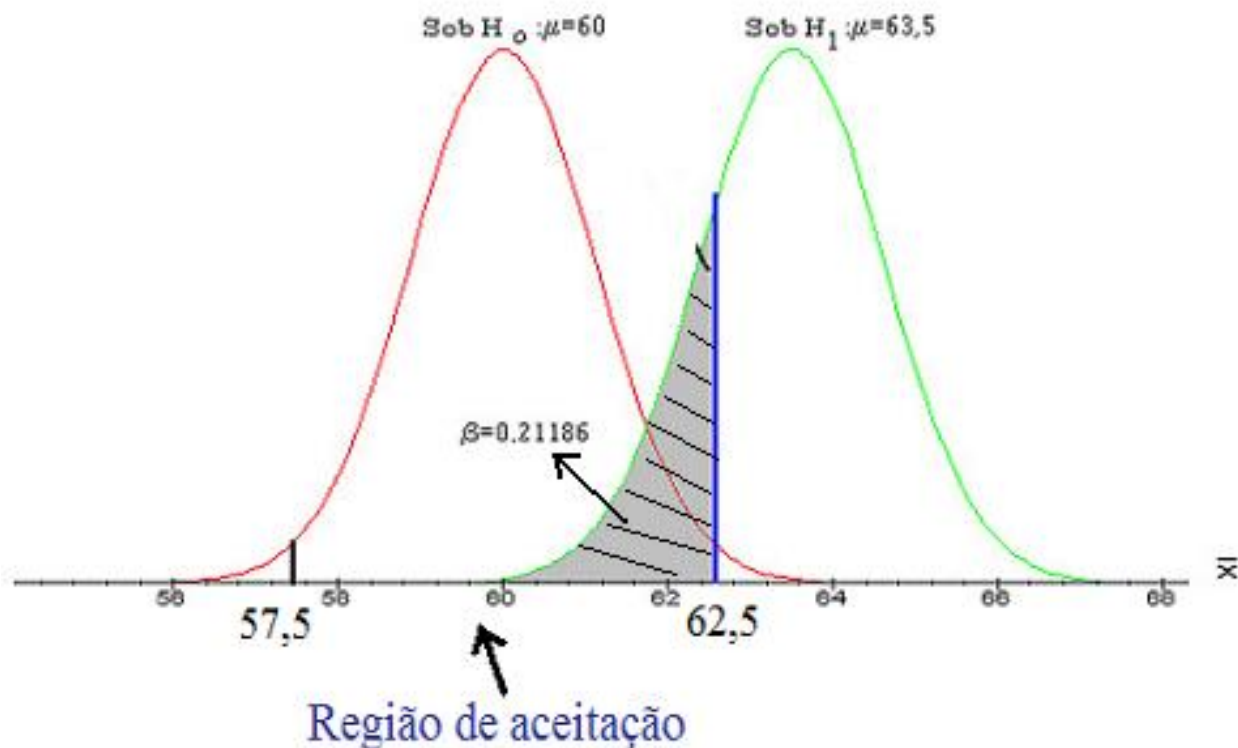


## Cálculo de $\beta$ :

$\beta = P(\text{Não rejeitar } H_0; H_1 \text{ verdadeira}) = P(57,5 \leq \bar{X} \leq 62,5; H_1 : \mu \neq 60)$ .

Como exemplo de cálculo de  $\beta$ , selecionamos  $H_1: \mu = 63,5$ . Logo,

$\bar{X} \sim N\left(63,5; \frac{25}{16}\right)$  e  $\beta = P(57,5 \leq \bar{X} \leq 62,5; H_1 : \mu = 63,5)$ .



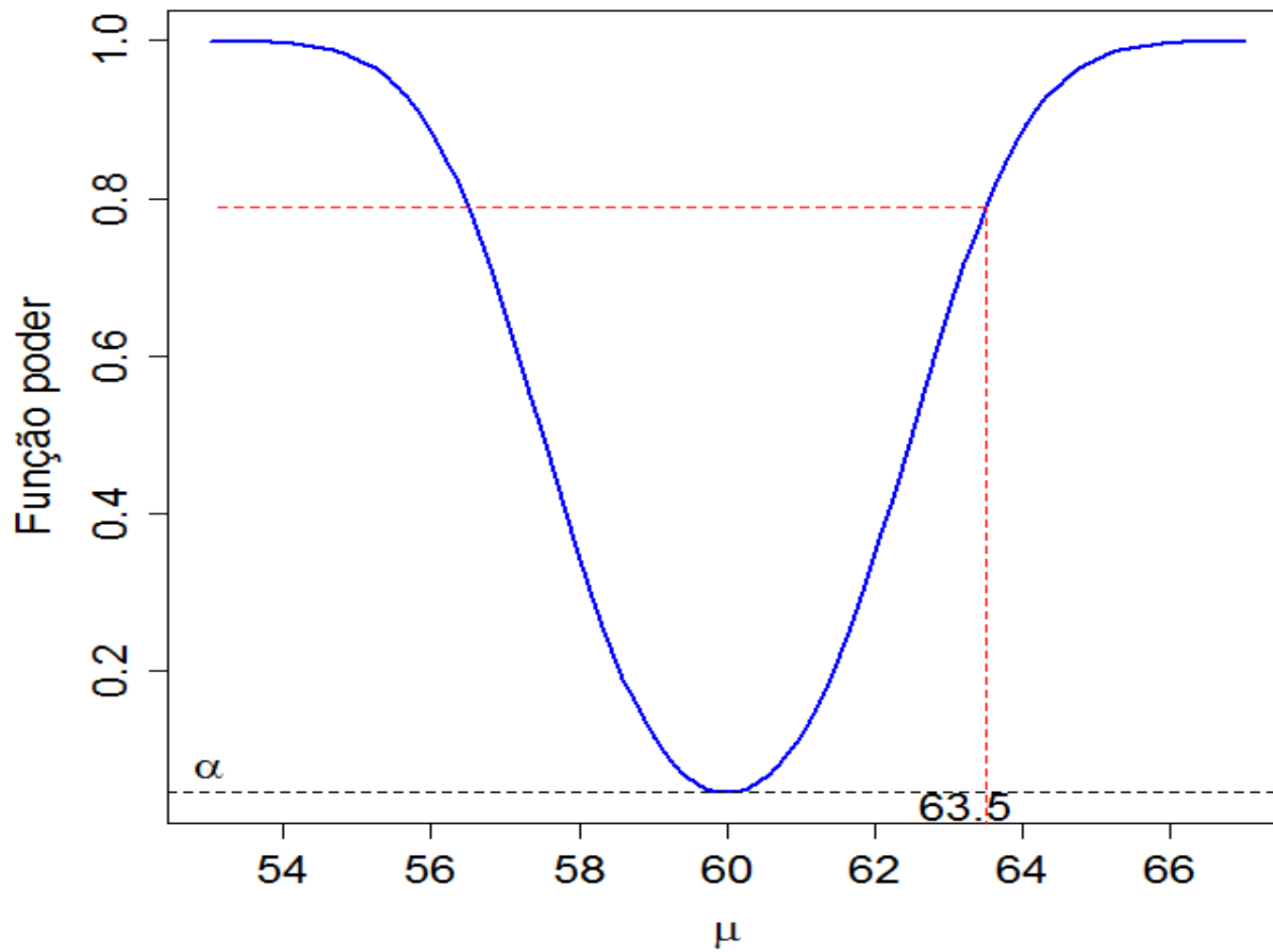
## Cálculo de $\beta$ :

Efetutando o cálculo obtemos

$$\begin{aligned}\beta &= P(57,5 \leq \bar{X} \leq 62,5; H_1 : \mu = 63,5) \\ &= P(\bar{X} \leq 62,5; \mu = 63,5) - P(\bar{X} \leq 57,5; \mu = 63,5) \\ &= P(Z \leq -0,80) - P(Z \leq -4,80) \\ &= 0,2119 - 0,0000 \\ &= 0,2119.\end{aligned}$$

Logo, se  $\mu = 63,5$ , o poder do teste é igual a  $1 - 0,2119 = 0,7881$ .

# Função poder



# Hipóteses bilateral e unilaterais

Se as hipóteses nula e alternativa são

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

em que  $\mu_0$  é uma constante conhecida (**valor de teste**), o teste é chamado de **bilateral**.

Podemos ter também as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

$$H_1 : \mu < \mu_0, \quad \text{unilateral à esquerda}$$

ou  $H_0 : \mu = \mu_0;$

$$H_1 : \mu > \mu_0. \quad \text{unilateral à direita}$$

**Sugestão.** Expressar  $H_0$  em forma de igualdade.

## Exemplo

Um fabricante de um certo componente afirma que o tempo médio de vida dos componentes produzidos é de 1000 horas. Engenheiros de produto têm interesse em verificar se uma modificação do processo de fabricação aumenta a duração dos componentes.

Hipóteses:

$$H_0 : \mu = 1000 \text{ horas};$$

$$H_1 : \mu > 1000 \text{ horas},$$

sendo  $\mu$  o tempo médio de duração dos componentes.

# Procedimento básico de testes de hipóteses

O procedimento de teste de hipóteses relativo ao parâmetro  $\theta$  de uma população é decomposto em **quatro** passos:

(i) Formulação das **hipóteses**:

$$H_0 : \theta = \theta_0;$$

$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta > \theta_0 \text{ ou } \theta \neq \theta_0.$$

(ii) Identificação da **estatística de teste** e caracterização da sua **distribuição** (por exemplo, método de substituição, lâmina 6).

(iii) **Escolha do nível de significância** do teste ( $\alpha = 5\%$ ,  $1\%$  e  $0,5\%$  são comuns) e obtenção da **região crítica**.

(iv) Cálculo da estatística de teste e **tomada de decisão** ( $H_0$  deve ser rejeitada ou não?).

# Teste de hipóteses para uma média populacional

Considere uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma população normal com média  $\mu$  (desconhecida) e variância  $\sigma^2$  (conhecida). Iniciamos pelo teste unilateral à esquerda:

(i)

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

(ii) A **estatística de teste** é a média amostral  $\bar{X}$  (**estimador pontual** de  $\mu$ ). Se a distribuição da população é normal ou se amostra é grande ( $n \geq 30$ , mesmo que a distribuição da população não seja normal) a distribuição de  $\bar{X}$  é  $N(\mu, \sigma^2/n)$ , aproximadamente. Se  $H_0$  for verdadeira, então

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1).$$



# Teste de hipóteses para uma média populacional

(iii) Rejeitamos  $H_0$  em favor de  $H_1$  se a média amostral  $\bar{X}$  é “pequena” em relação  $\mu_0$ . A região crítica é obtida selecionando um  $k$  tal que  $R_c = \{ \bar{X} < k \}$ , sendo que  $P(\bar{X} < k; H_0: \mu = \mu_0) = \alpha$ . Ou seja, sob  $H_0$

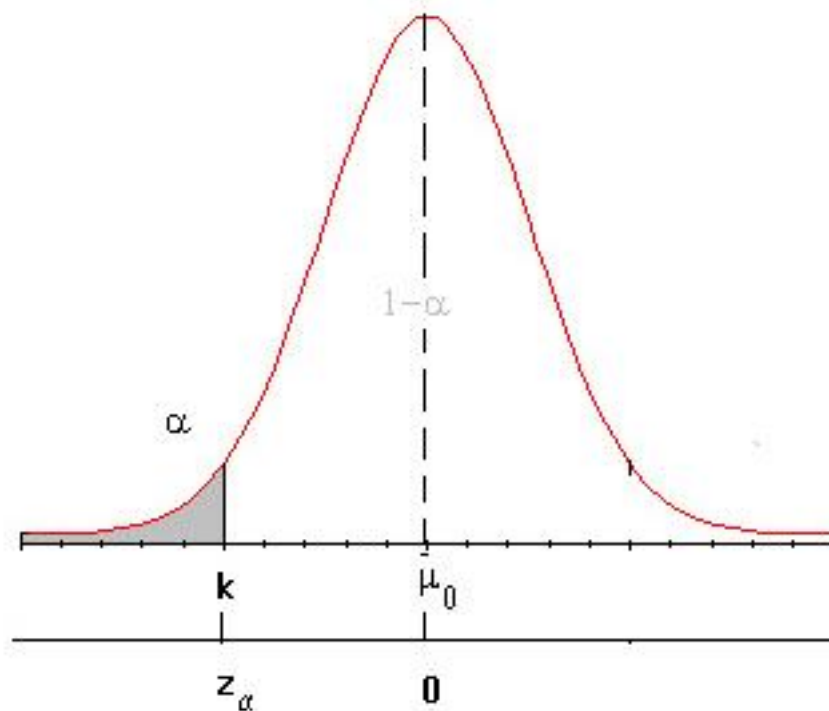
$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow k = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow R_c = \left\{ \bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Obs.  $z_\alpha < 0$ .

(iv) Conclusão: se  $\bar{x} \in R_c = \left\{ \bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$ , rejeita-se  $H_0$ ; caso contrário não se rejeita  $H_0$ .



## Exemplo

Um comprador de tijolos suspeita de uma **diminuição** na resistência. De experiências anteriores, sabe-se que a resistência **média** ao desmoronamento de tais tijolos é igual a **200 kg**, com um **desvio padrão** de **10 kg**. Uma amostra de **100 tijolos**, escolhidos ao acaso, forneceu uma **média de 195 kg**. A um nível de significância de 5%, pode-se afirmar que a resistência média ao desmoronamento diminuiu?

(i) As hipóteses de interesse são

$$H_0 : \mu = 200 \text{ kg};$$

$$H_1 : \mu < 200 \text{ kg}.$$

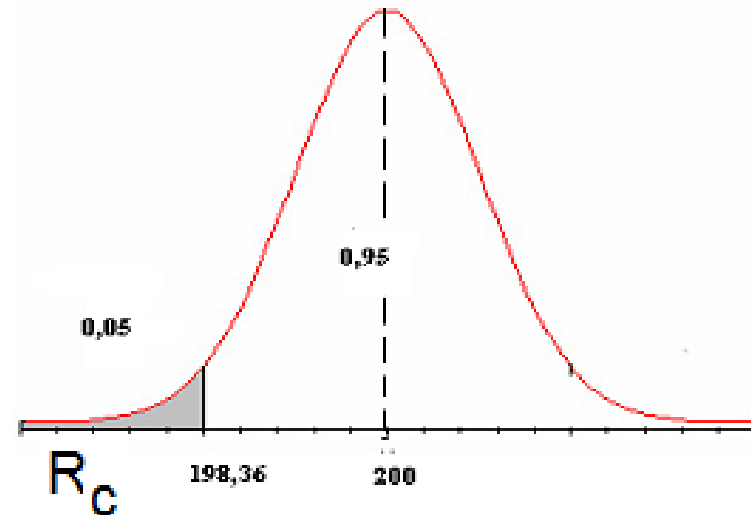
(ii) A estatística de teste é a média amostral  $\bar{X}$ . Já que  $n = 100 \geq 30$ , tem-se que sob  $H_0$ ,  $\bar{X} \sim N\left(200, \frac{100}{100}\right)$ , aproximadamente.

(iii) A região crítica pode ser obtida selecionando  $k$  de maneira que  $R_c = \{ \bar{X} < k \}$ , sendo que  $P(\bar{X} < k; H_0 : \mu = \mu_0) = \alpha = 0,05$ . Ou seja, sob  $H_0$ ,

## Exemplo

$$P\left(\frac{\bar{X} - 200}{10/\sqrt{100}} \leq \frac{k - 200}{10/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z < \frac{k - 200}{1}\right) = \alpha = 0,05 \Rightarrow k - 200 = -1,64 \Rightarrow k = 198,36$$

$$\Rightarrow R_c = \{\bar{X} < 198,36\}.$$



(iv) Do enunciado a média amostral vale 195. Logo,  $\bar{x} = 195 \in R_c = \{\bar{X} < 198,36\}$ . Rejeita-se  $H_0$  a um nível de 5% de significância.

**Conclusão.** De acordo com os dados coletados e adotando um nível de significância de 5%, concluímos que resistência média ao desmoronamento diminuiu.

# Método alternativo

Um método alternativo **prático**: trabalhar diretamente na **escala Z**.

(i)  $H_0 : \mu = \mu_0$  contra  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

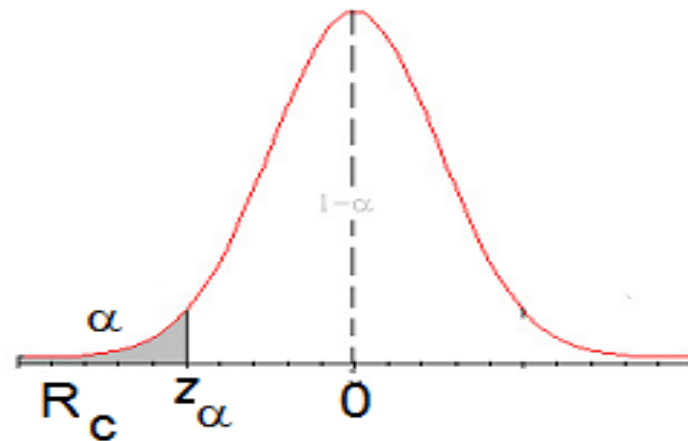
(ii) Estatística de teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ pelo menos aproximadamente.}$$

(iii) Região crítica para um nível de significância  $\alpha$  escolhido:

$$R_c = \{Z < z_\alpha\}.$$

(iv) Se  $z \in R_c = \{Z < z_\alpha\}$ , rejeita-se  $H_0$ ; caso contrário, não se rejeita  $H_0$ .



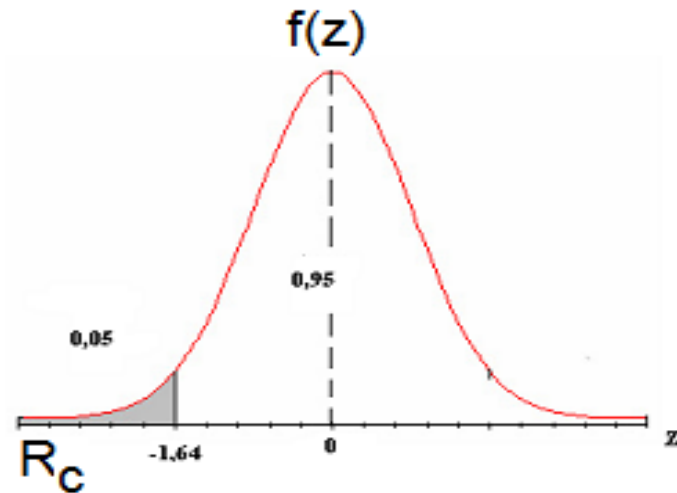
## Exemplo

(i)  $H_0 : \mu = 200$  contra  $H_1 : \mu < 200$ .

(ii) Estatística de teste:  $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 200)}{\sigma} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$ .

(iii) Região crítica para um nível de significância  $\alpha = 0,05$ :

$$R_c = \{z < -1,64\}.$$



(iv) Calculamos  $z = \frac{\sqrt{100}(195 - 200)}{10} = -5 \in R_c$ . Rejeita-se  $H_0$  a um nível de significância de 5%.

# Procedimento geral

Hipóteses:

(i)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_0 : \mu = \mu_0$$

$$\underbrace{H_1 : \mu < \mu_0}_{\text{À esquerda}} \quad \underbrace{H_1 : \mu > \mu_0}_{\text{À direita}} \quad \underbrace{H_1 : \mu \neq \mu_0}_{\text{Bilateral}}$$

(ii) Estatística de teste:

(a) Variância da população é conhecida:

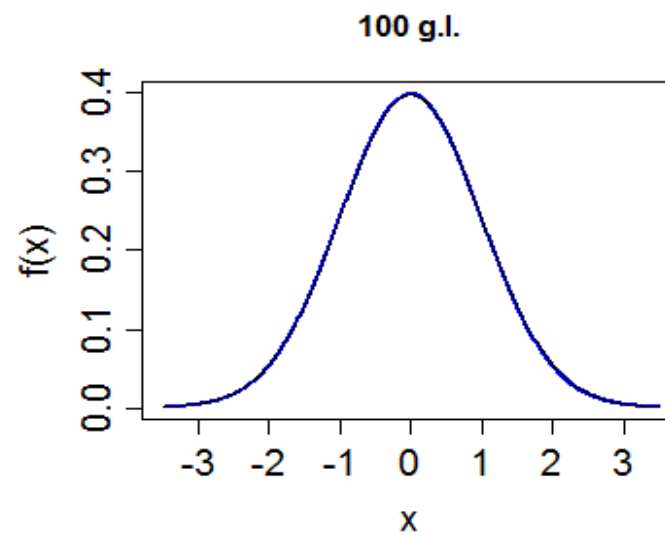
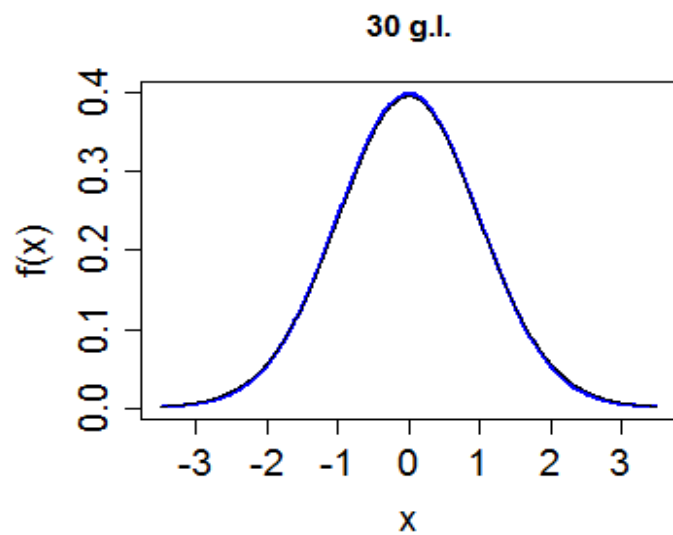
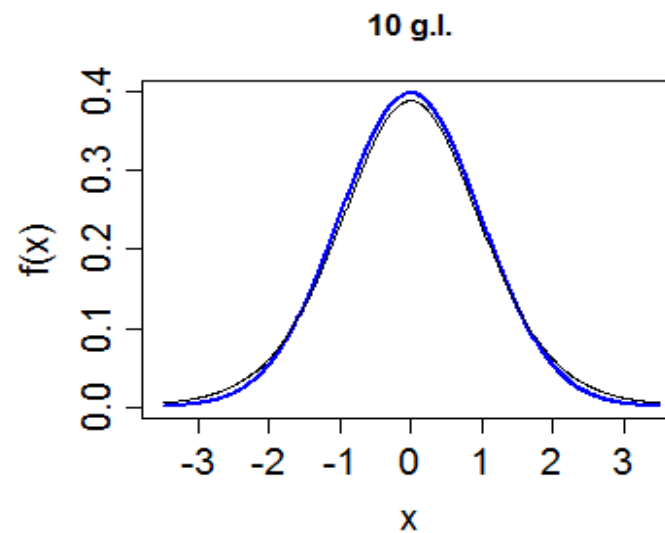
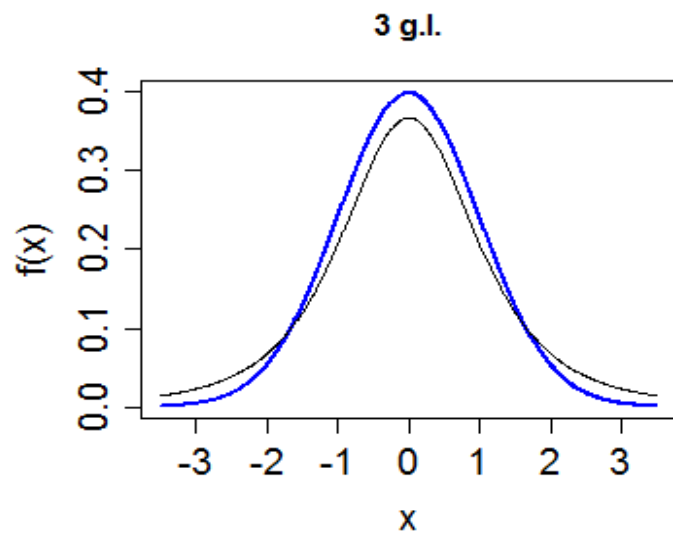
$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1).$$

(b) Variância da população é desconhecida (s é o desvio padrão amostral):

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t(n-1).$$

Distribuição t de Student com  $n - 1$  graus de liberdade (g.l.).

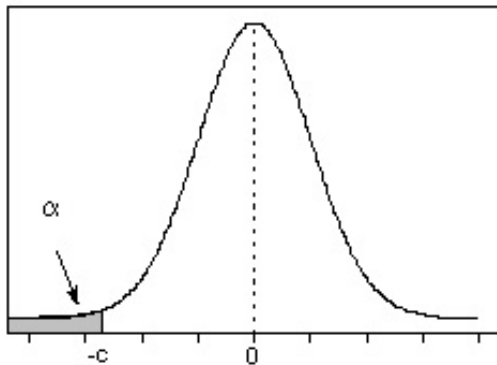
# Distribuições normal e t de Student



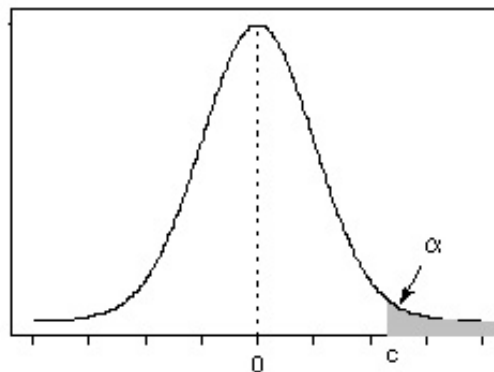
# Procedimento geral

(iii) Região crítica para um nível de significância  $\alpha$  escolhido:

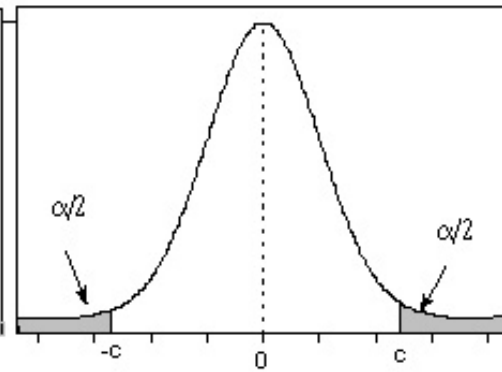
$H_1: \mu < \mu_0$



$H_1: \mu > \mu_0$



$H_1: \mu \neq \mu_0$



$$R_c^{(Z)} = \{Z < -c\}$$

$$R_c^{(Z)} = \{Z > c\}$$

$$R_c^{(Z)} = \{|Z| > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T < -c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T > c\}$$

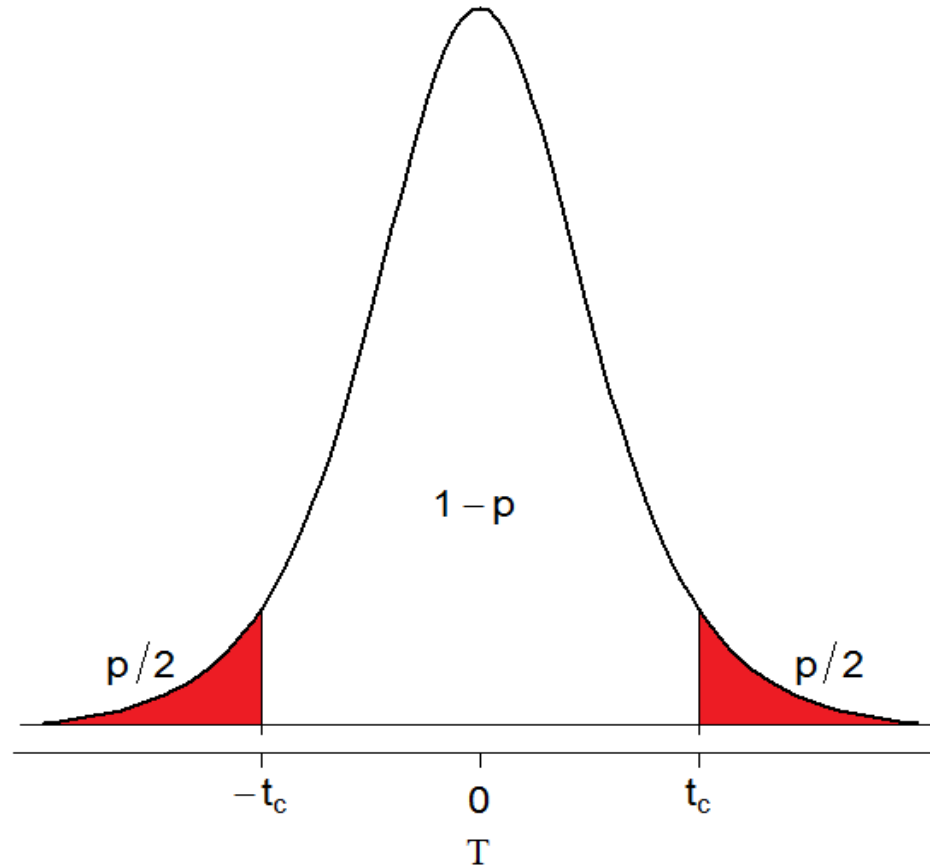
$$R_c^{(T)} = \{|T| > c\}$$

(iv) Se  $Z \in R_C$  ou  $T \in R_C$ , rejeita-se  $H_0$ ; caso contrário, não se rejeita  $H_0$ .

**Obs.** Nas regiões críticas com  $Z$  e  $T$  o valor de  $c$  **não é** o mesmo.



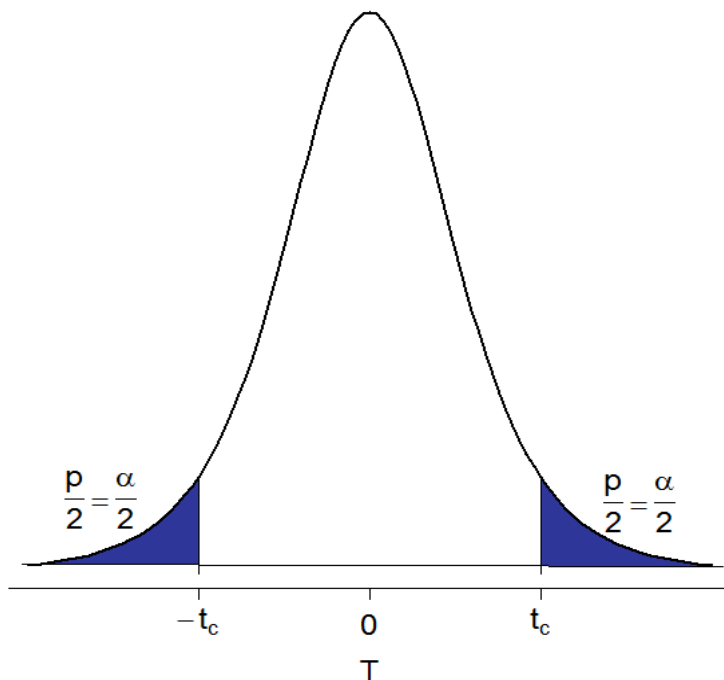
# Tabela da distribuição t de Student



A tabela (Tábua III) contém os valores de  $t_c$  ( $t_c > 0$ ) tais que  $P(-t_c \leq T \leq t_c) = 1 - p$  correspondentes a alguns valores de  $p$  e para alguns graus de liberdade.

# Tabela da distribuição t de Student

**Exemplo.** Se  $n = 12$ , são 11 graus de liberdade. Se tivermos  $H_1: \mu \neq \mu_0$ , escolhendo  $\alpha = 5\%$ , temos  $p/2 = \alpha/2$ , ou seja,  $p = 5\%$ .



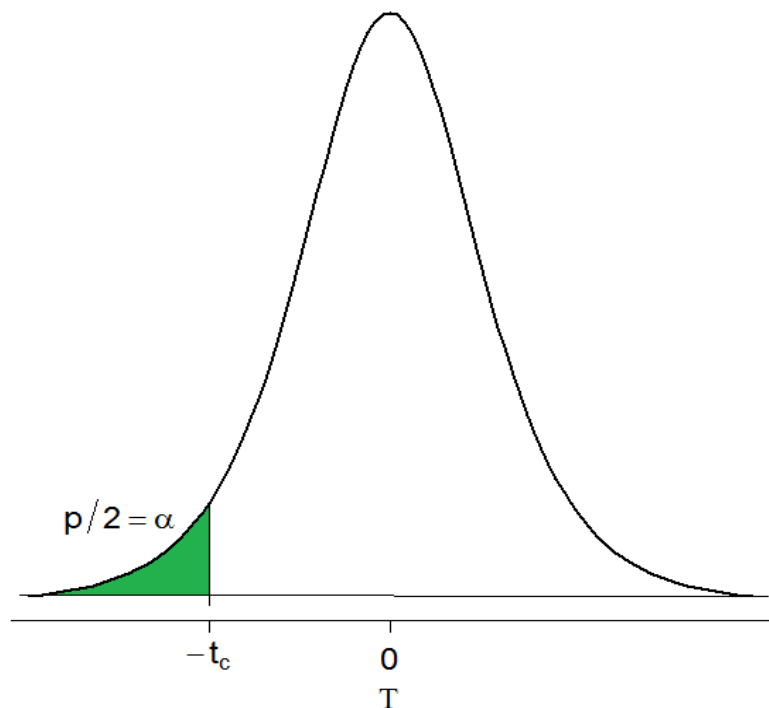
Consultando a tábua III encontramos  $t_c = 2,201$  e  $R_c = \{|T| > 2,201\}$ .

|          |                    |         |     |     |       |     |       |
|----------|--------------------|---------|-----|-----|-------|-----|-------|
|          | Graus de liberdade |         |     |     |       |     |       |
|          |                    | p = 90% | 80% | ... | 5%    | ... | 0,10% |
| 1        |                    |         |     |     |       |     |       |
| 2        |                    |         |     |     |       |     |       |
| ...      |                    |         |     |     |       |     |       |
| 11       |                    |         |     |     | 2,201 |     |       |
| ...      |                    |         |     |     |       |     |       |
| 120      |                    |         |     |     |       |     |       |
| Infinito |                    |         |     |     | 1,960 |     |       |
|          |                    | p = 90% | 80% | ... | 5%    | ... | 0,10% |

**Obs..** À medida que aumentam os graus de liberdade, a distribuição t se aproxima da normal (neste exemplo,  $t_c \rightarrow 1,960 = z_c$ ).

# Tabela da distribuição t de Student

**Exemplo.** Se  $n = 28$ , são 27 graus de liberdade. Se tivermos  $H_1: \mu < \mu_0$ , escolhendo  $\alpha = 1\%$ , temos  $p/2 = \alpha$ , ou seja,  $p = 2\alpha = 2\%$ .



Consultando a tábua III encontramos  $t_c = 2,473$  e  $R_c = \{T < -2,473\}$ .

| Graus de liberdade | p = 90% | 80% | ... | 2%    | ... | 0,10% |
|--------------------|---------|-----|-----|-------|-----|-------|
| 1                  |         |     |     |       |     |       |
| 2                  |         |     |     |       |     |       |
| ...                |         |     |     |       |     |       |
| 27                 |         |     |     | 2,473 |     |       |
| ...                |         |     |     |       |     |       |
| 120                |         |     |     |       |     |       |
| Infinito           |         |     |     | 2,326 |     |       |
|                    | p = 90% | 80% | ... | 2%    | ... | 0,10% |

**Obs.** Neste exemplo, se tivéssemos  $H_1: \mu > \mu_0$ , a região crítica seria  $R_c = \{T > 2,473\}$ .

## Exemplo

Dados **históricos** coletados em uma linha de produção de um certo item indicam **115 kg** como massa **média**. A fim de testar a hipótese de que a **média** de itens recentemente produzidos se **manteve**, retirou-se, ao acaso, uma **amostra** de 20 itens, obtendo-se média igual a 118 kg e desvio padrão 20 kg. Utilize  $\alpha = 0,05$ .

(i) As hipóteses de interesse são

$$H_0 : \mu = 115 \text{ kg};$$

$$H_1 : \mu \neq 115 \text{ kg}.$$

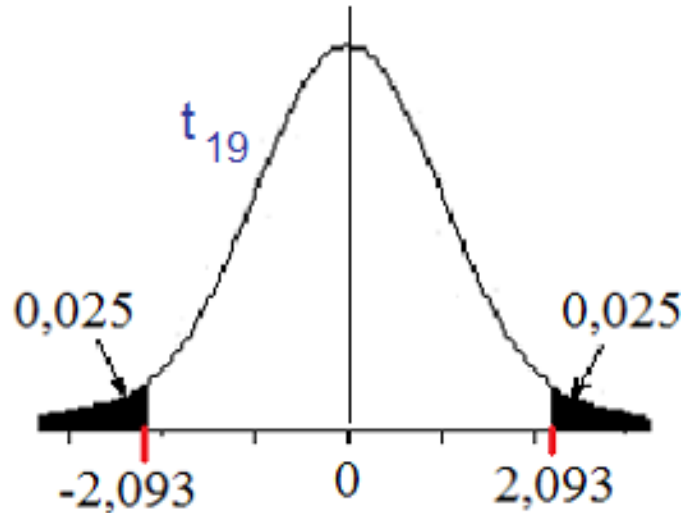
**Aproximamos** a distribuição da média das 20 notas por uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 / n$ .

(ii) Estatística de teste:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 115)}{S} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t(n-1).$$

## Exemplo

(iii) Região crítica para um nível de significância  $\alpha = 0,05$  e com  $n - 1 = 19$  g.l.:



$$R_c = \{ |T| > 2,093 \}$$

(iv) Calculamos  $T = \frac{\sqrt{20}(118 - 115)}{20} = 0,67 \notin R_c$ . Não se rejeita  $H_0$  a um nível de de significância de 5%. A **diferença não é significativa**.

**Conclusão.** De acordo com os dados coletados, a um nível de significância de 5% concluímos que a massa média dos itens produzidos se manteve.

# Teste de hipóteses para uma proporção populacional

O procedimento para testes de hipóteses sobre a proporção populacional ( $p$ ) **semelhante** ao utilizado para testes sobre uma média populacional.

**Problema.** Testar a hipótese que a proporção de sucessos de um ensaio de Bernoulli é igual a um valor especificado  $p_0$ . Isto é, testar um dos seguintes pares de hipóteses:

(i)

$$\begin{array}{ccc} H_0 : p = p_0 & H_0 : p = p_0 & H_0 : p = p_0 \\ \underbrace{H_1 : p < p_0} & \underbrace{H_1 : p > p_0} & \underbrace{H_1 : p \neq p_0} \\ \text{À esquerda} & \text{À direita} & \text{Bilateral} \end{array}$$

# Teste de hipóteses para uma proporção populacional

(ii) Estatística de teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ aproximadamente,}$$

sendo que

$$\bar{p} = \frac{\text{Número de sucessos}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} : \text{estimador pontual de } p.$$

é a **proporção amostral de sucessos** e  $X_i = 1$ , se o resultado for sucesso;  $X_i = 0$ , se o resultado for insucesso.

## Exemplo

Um estudo é realizado para determinar a presença de pequenas anomalias em chapas metálicas de uma certa dimensão. Segundo o fabricante, a **proporção** de chapas com anomalias é **inferior a 25%**. Foram inspecionadas **50** chapas escolhidas ao acaso e sete delas apresentaram algum tipo de anomalia. Estes dados justificam a afirmação do fabricante? Adote um nível de significância igual a 0,05.

(i) Hipóteses :

$$H_0 : p = 0,25;$$

$$H_1 : p < 0,25.$$

(ii) Estatística de teste:

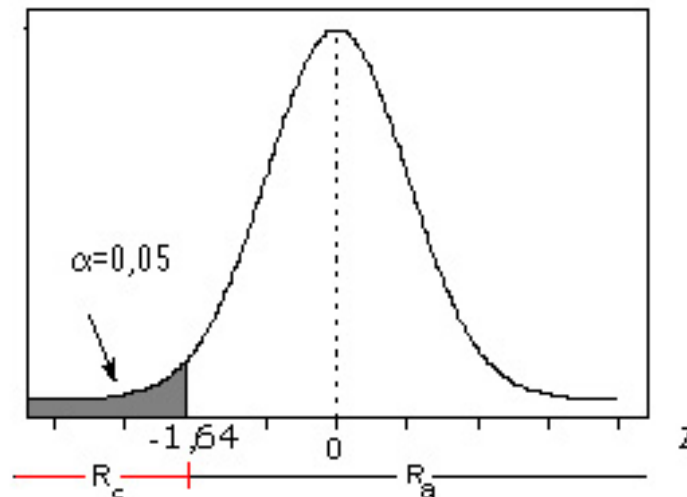
$$Z = \frac{\sqrt{50}(\bar{p} - 0,25)}{\sqrt{0,25(1 - 0,25)}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ aproximadamente.}$$



## Exemplo

(iii) Região crítica para um nível de significância  $\alpha = 0,05$ :

$$R_c = \{z < -1,64\}.$$



(iv) Temos  $n = 50$ . Calculamos  $\bar{p} = \frac{7}{50} = 0,14$  e  $z = \frac{\sqrt{50}(0,14 - 0,25)}{\sqrt{0,25 \times (1 - 0,25)}} = -1,796 \in R_c$ .

Rejeita-se  $H_0$  ao nível de 5% de significância.

**Conclusão.** Adotando um nível de significância de 5% concluimos a partir dos dados que a proporção de chapas produzidas com anomalias é inferior a 25%.