INTERVALOS DE CONFIANÇA

Estimação por intervalos

$X_1,...,X_n$ é uma amostra aleatória de uma variável cuja distribuição depende do parâmetro θ.

Se $L(X_1,...,X_n)$ e $U(X_1,...,X_n)$ são duas funções tais que $L < U$ e $P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$,

o intervalo $[L, U]$ é chamado de intervalo de confiança (IC) de $100(1-\alpha)\%$ para θ.

$100(1-\alpha)\%$ é o coeficiente de confiança do intervalo. Deve ser "alto".

O coeficiente de confiança é escolhido (90%, 95% e 99% são comuns). Em seguida calculamos L e U.

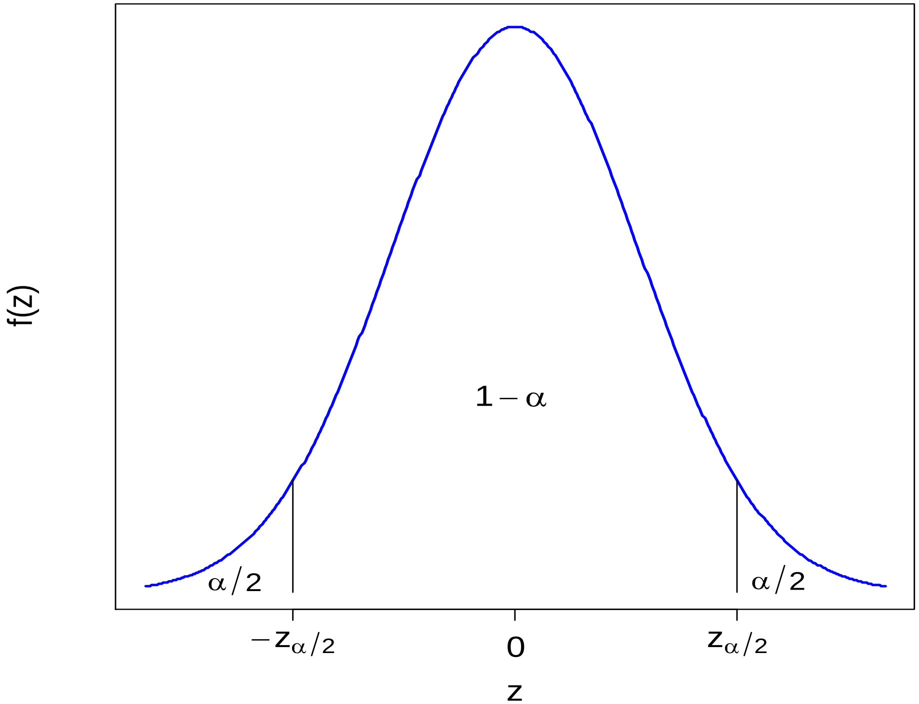
IC para uma média populacional

$X_1, \cdots X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população normal com média μ (desconhecida) e variância σ^2 (conhecida). Vimos que a média amostral $\overline{X}$, tem distribuição normal com média μ e variância σ^2/n. Isto é,

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Se a distribuição de X não é normal, o resultado acima é válido aproximadamente.

Logo, fixando um coeficiente de confiança $(1-\alpha)$, pode-se determinar $z_{\alpha/2}$ (consultando a tabela normal):



IC para uma média populacional

Sendo assim, $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha,$

que equivale a $P(-z_{\alpha/2} \leq \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

$$\Leftrightarrow P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Logo, um IC de 100 (1-α)% para a média μ é dado por

$$[L;U] = \left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\overline{X}-E; \overline{X}+E\right],$$

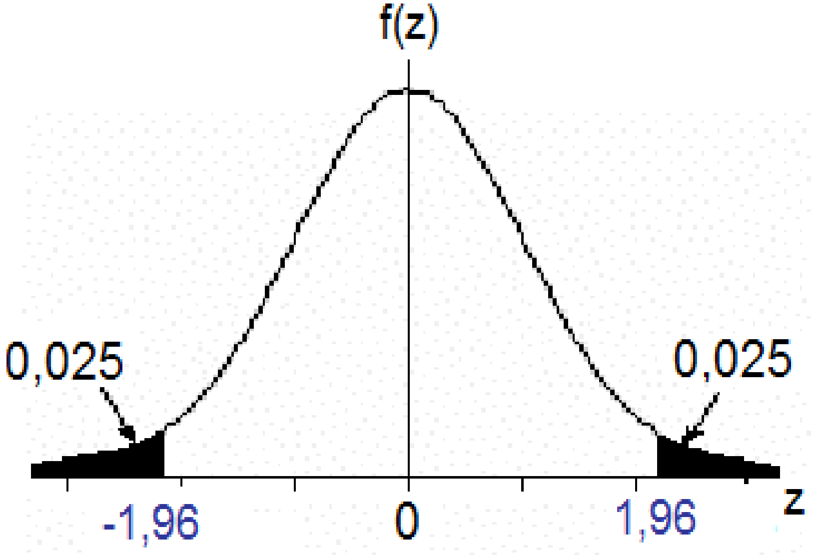
sendo que $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é o erro máximo

e a amplitude do IC é U – L = 2E.

Exemplo

Em uma fábrica de cerveja a quantidade de cerveja em latas seguia uma distribuição normal com média 350 ml e desvio padrão 3 ml. Após alguns problemas na linha de produção, suspeita-se que houve alteração na média. Uma amostra de 20 latas forneceu uma média de 346 ml. Obtenha um intervalo de 95% para a quantidade média de cerveja envasada supondo que não tenha ocorrido alteração na variabilidade.

Como $1-\alpha = 0{,}95$, temos da tabela normal padrão $z_{0,025} = 1{,}96$.



Obtemos IC = [L; U]

$$= \left[\bar{X} - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[346 - 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{20}} ; 346 + 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{20}} \right] = [346 - 1{,}31; 346 + 1{,}31] = [344{,}69 ; 347{,}31], \text{ em ml.}$$

Determinação do tamanho da amostra para estimação de μ

Erro máximo (E) na estimação de μ: $$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$z_{\alpha/2}$ é obtido da tabela normal após a escolha do coeficiente de confiança $(1-\alpha)$.

(a) Especificamos o erro máximo. Se o desvio padrão (σ) for conhecido, podemos calcular n:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times \sigma^2}{E^2}.$$

(b) Especificamos o erro máximo . Se o desvio padrão (σ) não for conhecido, podemos utilizar o desvio padrão obtido de uma amostra piloto com n_0 observações:

$$n \cong \frac{z^2_{\alpha/2} \times s_0^2}{E^2},$$ sendo que s_0^2 é a variância amostral da amostra piloto.

(c) Especificamos o erro máximo em função do desvio padrão como $E = k\,\sigma$:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{k^2}.$$

Exemplo

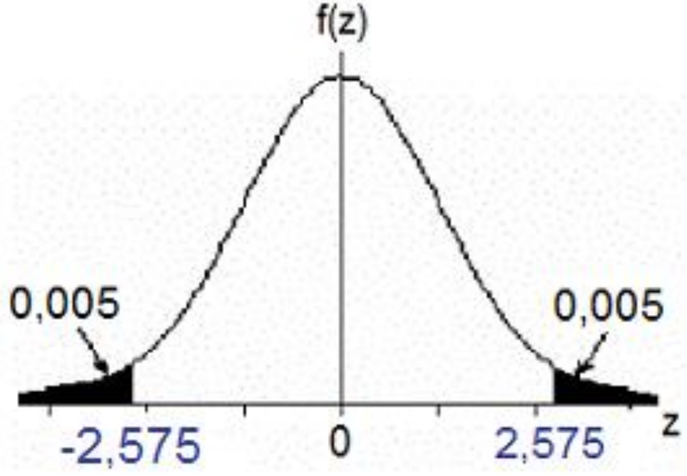
Em uma siderúrgica estuda-se a resistência média de barras de aço utilizadas na construção civil. Qual o tamanho amostral necessário para garantir que um erro máximo de 8 kg seja superado com probabilidade igual a 0,01? O desvio padrão da resistência para este tipo de barra é de 25 kg.

Solução. Do enunciado tem-se σ = 25 kg, E = 8 kg e

$$1 - \mathrm{P}(\overline{X} - E \leq \mu \leq \overline{X} + E) = 0{,}01 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X} - E \leq \mu \leq \overline{X} + E) = 1 - 0{,}01,$$

ou seja, α = 0,01 (o coeficiente de confiança do IC é $1 - \alpha = 99\%$).

Consultando a tabela normal encontramos $z_{\alpha/2}$ = 2,575.



$$\text{Portanto}, n = \frac{z^2{}_{\alpha/2} \times \sigma^2}{E^2}$$

$$= \frac{2{,}575^2 \times 25^2}{8^2} = 65.$$

IC para uma média populacional (σ desconhecido)

Se a variável de interesse (X) tem distribuição normal, então

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{s} \sim t_{n\text{-}1},$$: distribuição t de Student com n – 1 g.l.,

sendo que *s* é o desvio padrão amostral.

Se a distribuição de X não é normal, o resultado acima é válido aproximadamente.

Um IC de 100(1-α)% para μ é dado por

$$[L;U] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E], \quad \text{em que } E = t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

IC para uma proporção populacional

Cada observação pode ser classificada como sucesso (X = 1) ou insucesso (X = 0) e a probabilidade de sucesso é p. Dispomos de uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$. Vimos que

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1), \quad \text{aproximadamente,}$$

sendo que $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: proporção amostral de sucessos.

Para um nível confiança fixado em 100(1-α)%, obtemos (veja lâmina 4)

$$\mathrm{P}\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \overline{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \cong 1 - \alpha.$$

IC para uma proporção populacional

(a) Abordagem otimista

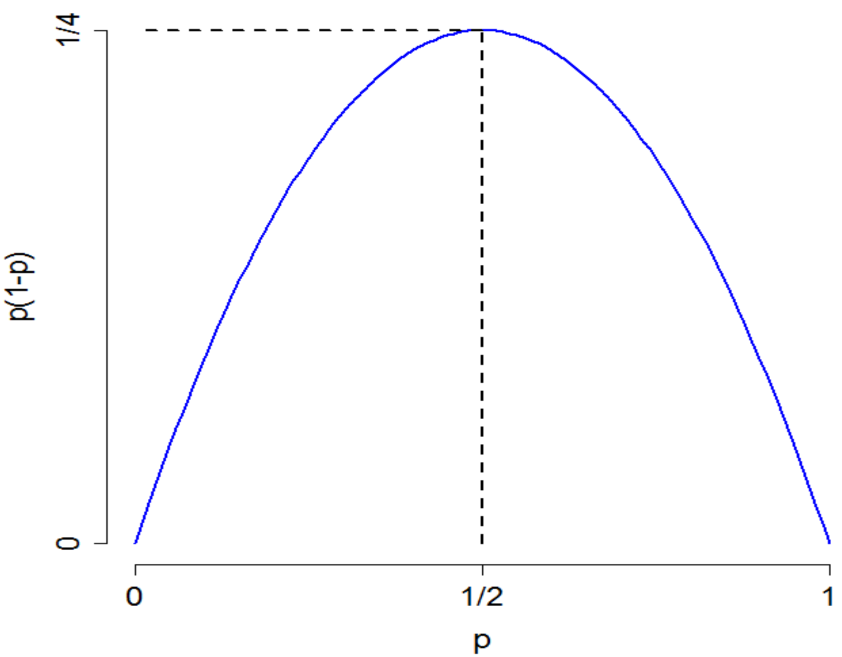
Substituir $p(1\text{-}p)$ por $\bar{p}(1-\bar{p})$:

$$\text{IC} \cong \left[\bar{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}};\ \bar{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right].$$

(b) Abordagem conservativa

Substituir p(1 – p) por ¼, que corresponde ao valor máximo de p(1 – p).

$$\text{IC} \cong \left[\bar{p} - z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}};\ \bar{p} + z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}} \right].$$

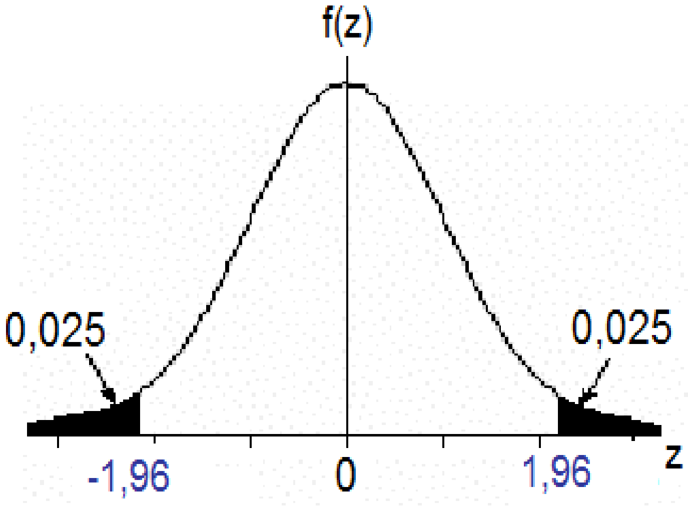


Exemplo

Um estudo foi realizado para determinar a proporção de componentes de um certo tipo que resistem durante um certo período a condições de uso mais rigorosas do que as especificadas. Em uma amostra de 200 componentes selecionados ao acaso, 160 resistiram. Apresente um intervalo de 95% de confiança para a proporção de componentes que resistem.

Solução. Estimativa pontual de p: $\bar{p} = \frac{160}{200} = 0{,}8\ (80\%).$

Como 1 – α = 0,95, obtemos da tabela normal padrão $z_{0,025}$ = 1,96.



Abordagem otimista:

$$IC \cong \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}; 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}\right]$$

$$= [0{,}745; 0{,}855].$$

Abordagem conservativa:

$$IC \cong \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}};\ 0{,}8 + 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}}\right] = [0{,}731; 0{,}869].$$

Determinação do tamanho da amostra para estimação de p

Erro máximo de estimação de p é fixado:

$$E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \Rightarrow n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times p(1-p)}{E^2}.$$

(a) Há informação sobre p: p* (estudos anteriores, especialistas, amostra piloto, etc):

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times p^*(1-p^*)}{E^2}.$$

(b) Não há informação sobre p:

p(1 – p) é substituído pelo valor máximo, igual a ¼ (veja lâmina 15):

$$n = \frac{z^2{}_{\alpha/2}}{4E^2} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E}\right)^2.$$

Coeficiente de confiança de 95%: α = 5%, $z_{\alpha/2}$ = 1,96 ≅ 2 e

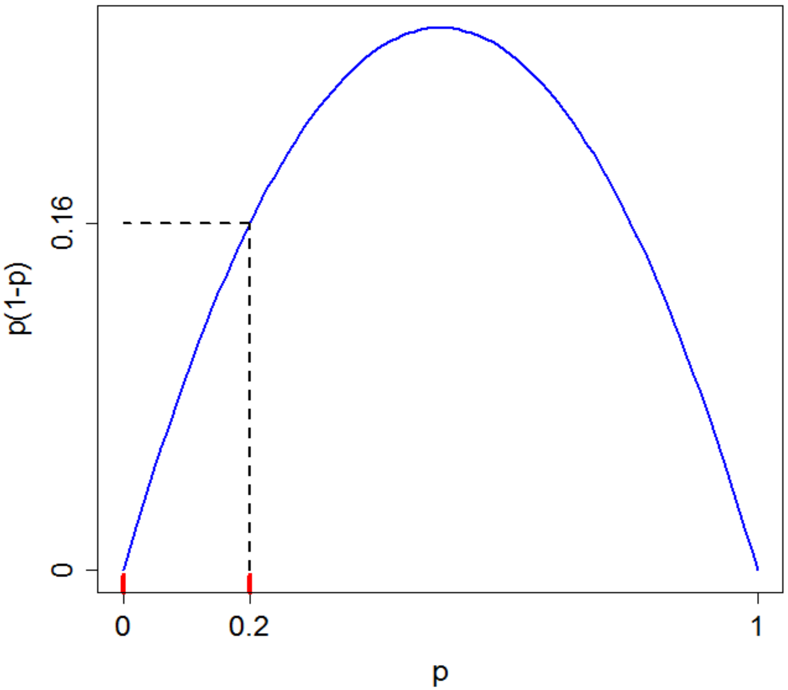
n ≅ 1 / E^2.

Exemplo

Uma equipe pretende estimar a proporção de avarias ocorridas no transporte de um produto. Estudos anteriores indicam que esta proporção não ultrapassa 20%. Que tamanho de amostra é necessário para assegurar com uma confiança de 99% que o erro de estimação desta proporção seja no máximo igual a 0,05?

Solução. Do enunciado obtemos $p \leq 0{,}2$, $1 - \alpha = 0{,}99$ e $E = 0{,}05$. Da tabela normal padrão, $z_{0,005} = 2{,}575$.

Proteção em relação à situação mais desfavorável: $p^* = 0{,}20$.



Finalmente,

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p^*(1 - p^*)}{E^2}$$

$$= \frac{2{,}575^2 \times 0{,}2 \times (1 - 0{,}2)}{0{,}05^2}$$

$$= 424{,}4 \Rightarrow n = 425.$$