



Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Laboratório Didático

**MOVIMENTO DE ELÉTRONS EM CAMPOS ELÉTRICOS E
MAGNÉTICOS E DETERMINAÇÃO DA RAZÃO
CARGA/MASSA DO ELÉTRON**
Guia de estudos

O presente texto é uma compilação e adaptação de vários textos anteriormente publicados no Laboratório Didático do IFUSP.

1. Objetivos

- Estudar o movimento de elétrons em campos elétricos e magnéticos num tubo de raios catódicos (TRC).
- Determinar a razão carga/massa do elétron.

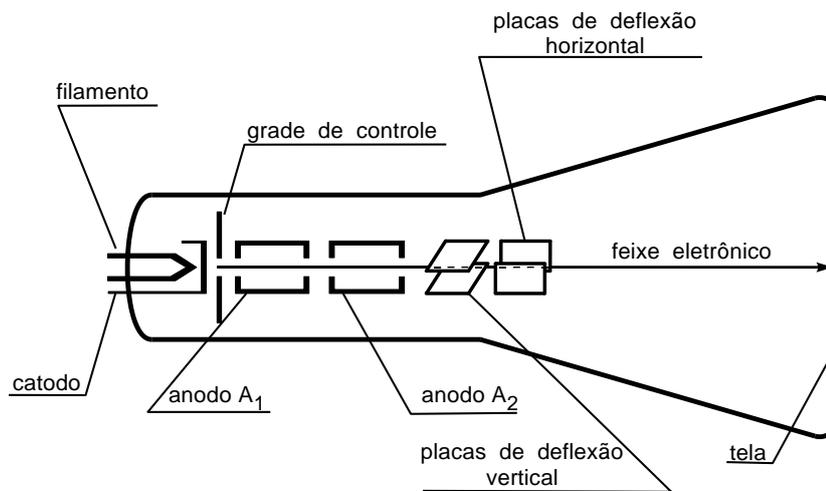


Figura 1. Tubo de raios catódicos e seus principais componentes.

2. Tubo de Raios Catódicos

Um tubo de raios catódicos, TRC, assim denominado desde a sua invenção em 1897 devido ao desconhecimento do elétron, é uma ampola em vácuo onde se gera um feixe de elétrons, que dirigidos a uma tela fosforescente, iluminam o ponto de impacto. Resumidamente, os elétrons são produzidos no catodo devido ao seu aquecimento por um filamento incandescente. O feixe de elétrons é formado por elétrons acelerados no campo elétrico entre o

catodo e o anodo A₂, polarizado positivamente por uma fonte externa e focalizados com lentes eletrostáticas. As lentes eletrostáticas são dois cilindros metálicos ocos, coaxiais aos quais se aplica uma diferença de potencial elétrico. O feixe acelerado passa pelo eixo destes cilindros e vem bater numa tela luminescente que o torna visível. Num TRC, os controles disponíveis sobre o feixe são:

- a) intensidade do feixe, obtido através de um potencial negativo aplicado à grade de controle com o qual se regula o fluxo de elétrons;
- b) foco, obtido através da aplicação de um potencial positivo no anodo A₁ em relação ao catodo, regulando-se a concentração de elétrons num ponto da tela;
- c) tensão de aceleração do feixe, que é aplicada ao anodo A₂. É uma tensão positiva em relação ao catodo, tipicamente entre 1000 e 2000 V.

O feixe passa ainda no meio de dois pares de placas, com o aspecto de um condensador. A disposição do primeiro par é horizontal e a do segundo é vertical. Aplicando-se tensões nestas placas, através de terminais externos, deflete-se eletricamente o feixe nos sentidos vertical e horizontal.

3. Determinação da Sensibilidade do Tubo de Raios Catódicos

3.1. Parte Experimental

- 1) Defletir o feixe magneticamente através da aproximação de um ímã permanente e com isso descobrir a sua polaridade.
- 2) Defletir o feixe eletricamente através da aplicação de tensões nas placas de deflexão vertical para um valor de tensão de aceleração.
- 3) Medir a sensibilidade do tubo que é a razão entre o deslocamento do ponto luminoso do feixe na tela e a tensão aplicada nas placas para defletir-lo.

3.2. Fundamentos Teóricos

Queremos obter uma expressão que determine o deslocamento H, do feixe de elétrons de sua posição central em função do potencial V, aplicado às placas defletoras. Veja a figura 2. A razão $S = H/V$ é denominada sensibilidade do TRC. Quanto maior a sensibilidade, maior será o deslocamento do feixe de elétrons para um dado potencial. Para isso precisaremos de:

1. Lei de Maxwell: A força exercida numa carga q , que se move em campos eletro-magnéticos é dada por:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

Onde \vec{E} é o vetor campo elétrico, \vec{B} é o campo magnético, e \vec{v} é a velocidade da carga q . No caso de um elétron, $q = e = -1.60217662 \ 08(98) \times 10^{-19} \text{ C}$

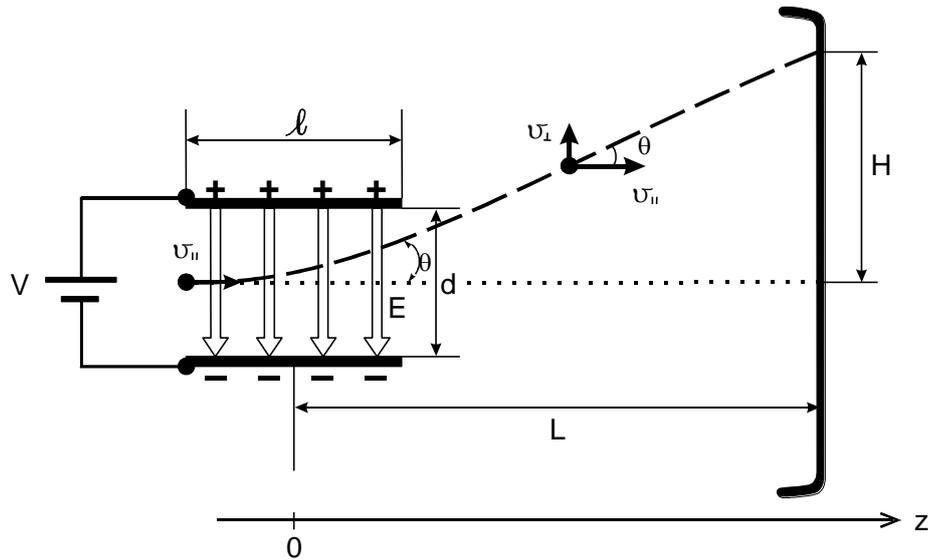


Figura 2. Diagrama com dimensões e potenciais num TRC.

2. Campos e potenciais num capacitor de placas paralelas:

As placas defletoras no TRC mostrado na figura 2, tem comprimento l e distância d . Nelas é aplicado um potencial, V . O módulo do campo elétrico resultante entre as placas vale:

$$E = \frac{V}{d} \quad (3.2)$$

3. Velocidade dos elétrons emitidos pelo canhão de elétrons:

Os elétrons que formam o feixe de elétrons são emitidos pelo catodo e acelerados no campo elétrico axial (ao longo do eixo) gerado pelo anodo A2, polarizado com potencial V_2 . A velocidade dos elétrons é calculada usando a conservação da energia:

$$eV_2 = \frac{1}{2}mv_{//}^2 \quad (3.3)$$

$$v_{//} = \sqrt{\frac{2eV_2}{m}} \quad (3.4)$$

4. Descrição do movimento dos elétrons:

No TRC, os elétrons emergem do canhão apenas com velocidade axial. Ao penetrar no campo das placas defletoras experimentam uma força perpendicular constante. Descrevem, portanto, uma parábola com Movimento Uniformemente Variado na direção transversal e Movimento Uniforme na direção axial. Fora das placas de deflexão, não há mais forças. O feixe continua sua trajetória em movimento uniforme até alcançar a tela.

5. Calculando o deslocamento H:

Precisamos saber as velocidades axial e transversal do elétron na saída das placas de deflexão, para então determinar geometricamente o ponto de impacto na tela. $v_{//}$ foi calculada em (4). v_{\perp} pode ser obtida pelo teorema do impulso:

$$\int_0^t \vec{F} dt = \int_0^{v_{\perp}} m d\vec{v} \quad (3.5)$$

Integrando

$$v_{\perp} = \frac{Ft}{m} \quad (3.6)$$

Falta calcular o tempo que o elétron permanece entre as placas:

$$t = \frac{\ell}{v_{//}} \quad (3.7)$$

Juntando (3.7), (3.6), (3.4), (3.2) e (3.1) temos

$$\text{tg } \theta = \frac{v_{\perp}}{v_{//}} = \frac{V}{d} \frac{e}{m} \frac{\ell}{\frac{2eV_2}{m}} = \frac{V\ell}{2dV_2} \quad (3.8)$$

Supondo que o deslocamento transversal do elétron dentro das placas seja muito menor que o deslocamento H, podemos determinar H geometricamente:

$$H = L \text{tg } \theta = \frac{L\ell}{2dV_2} V \quad (3.9)$$

Onde L é a distância das placas de deflexão à tela. A sensibilidade vale:

$$S = \frac{L\ell}{2dV_2} \quad (3.10)$$

4. Determinação da Razão e/m do Elétron pelo Método da Hélice

Na seção anterior determinamos a equação que calcula H em função dos vários parâmetros de um TRC. Infelizmente as equações 3.9 ou 3.10 não dependem da particular carga elétrica usada. Ou seja, não é possível obter informação do elétron num TRC. Para estudar o elétron precisamos incluir um campo magnético. O problema experimental é criar uma configuração de campo magnético suficientemente grande e homogêneo que permita modelar o arranjo teoricamente. Um grande solenoide serve ao propósito, pois no interior de um solenoide o campo magnético é relativamente constante e fácil de ser calculado.

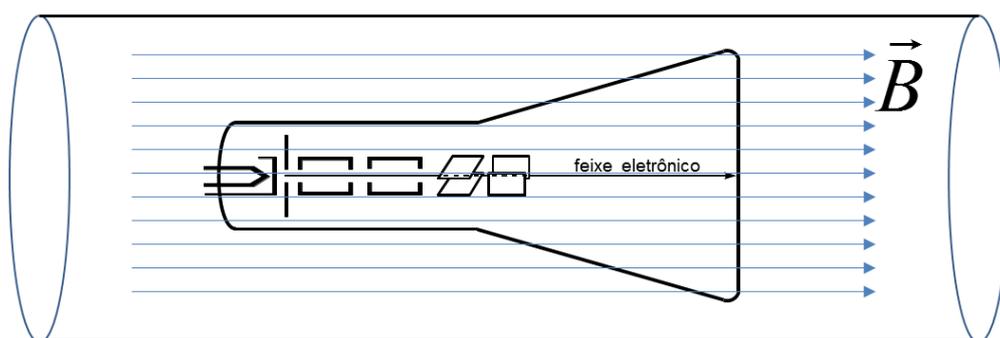


Figura 3. TRC inserido num solenoide

O arranjo da figura 3 aparentemente de nada serve, pois os elétrons se movem paralelos ao campo \vec{B} . O propósito é usar a **velocidade transversal** criada pelas placas defletoras e calculada em (3.6). Nesse caso, a velocidade transversal cria uma força perpendicular ao plano definido pelos vetores \vec{v} e \vec{B} , que por sua vez impõe um movimento circular superposto ao deslocamento axial que resulta num **movimento helicoidal**, cujo raio depende da velocidade transversal. Veja figura 4.

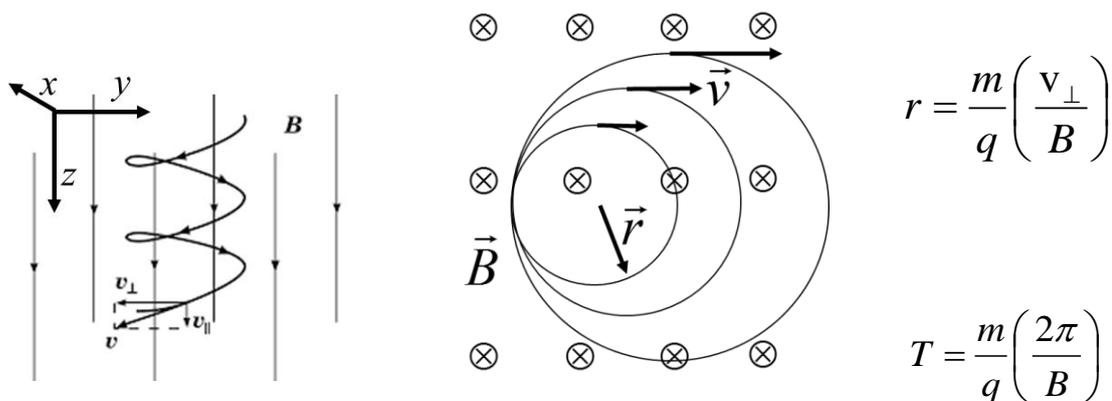


Figura 4. O raio da hélice depende da velocidade transversal. O Campo magnético é perpendicular à velocidade tangencial.

O movimento de uma partícula carregada, com carga q e massa m , num campo magnético \vec{B} pode ser derivado combinando a lei de Maxwell e a Lei de Newton:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

Usando o referencial indicado na figura 4, em que o eixo z está alinhado na direção de $v_{//}$, agrupando os termos cartesianos e fazendo $q = -e$, temos:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= eB \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -eB \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

A solução desse conjunto de equações diferenciais é:

$$\begin{aligned} x &= \frac{mv_{\perp}}{eB} \left[\cos\left(\frac{eB}{m}t\right) - 1 \right] \\ y &= \frac{mv_{\perp}}{eB} \operatorname{sen}\left(\frac{eB}{m}t\right) \\ z &= v_{//}t \end{aligned} \quad (4.3)$$

Na direção z temos um movimento uniforme com velocidade $v_z = v_{//}$ e no plano (x,y) um movimento circular com período $T = \frac{2\pi m}{eB}$. A combinação desses movimentos resulta num movimento helicoidal. O passo da hélice é a distância percorrida na direção z numa volta completa, ou seja, quando $t = T = \frac{2\pi m}{eB}$. Nesse caso, $\text{passo} = z(T) = \frac{2\pi m}{eB} v_{//}$. Em nossa experiência no TRC queremos que um passo da hélice seja igual a distância do centro da placa defletora à tela, L . O esquema está mostrado na figura 5.

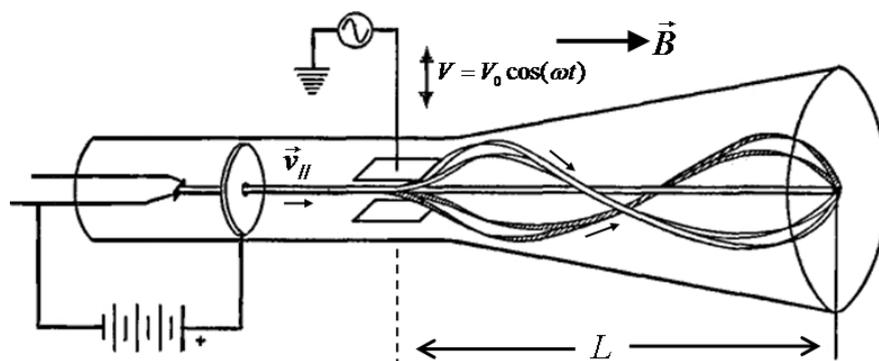


Figura 5. Trajetória helicoidal dos elétrons no TRC imerso num campo magnético axial. Quando o passo da hélice é igual a distância das placas defletoras à tela o feixe volta ao ponto inicial, condição de foco. Figura adaptada de http://www.vias.org/basicradio/basic_radio_22_09.html.

Igualando o passo à distância L , da placa à tela e substituindo $v_{//}$ definido em (3.4) temos:

$$L = \frac{2\pi m}{eB} v_{//} = \frac{2\pi m}{eB} \sqrt{\frac{2eV_2}{m}} \quad (4.4)$$

Obtemos uma relação para e/m :

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V_2}{L^2 B^2} \quad (4.5)$$

Falta incluir a expressão para o campo magnético do solenoide. Num solenoide infinito (em ar ou no vácuo), com densidade de espiras (espiras por metro) n , o campo magnético é dado por¹:

$$B = \mu_0 I n \quad (4.6)$$

No centro de um solenoide finito, com comprimento C e raio R , o campo vale²:

$$B = \mu_0 I n \left[\frac{C/2}{\sqrt{(C/2)^2 + R^2}} \right] \quad (4.7)$$

Usando a densidade de espiras $n = N/C$.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad (4.8)$$

Onde $D = 2R$ é o diâmetro do solenoide.

Falta analisar o movimento numa particular posição z . Na tela em especial, $z = L$. Alimentando as placas do TRC com um sinal senoidal $V = V_0 \cos(\omega t)$ teremos $v_{\perp} = (V_0/d) \cos(\omega t)$ que, na ausência de campo magnético, produz uma linha reta na tela do TRC. Na presença de campo magnético no solenoide e numa posição z qualquer do TRC, usamos $t = z/v_{//}$. Retomando as equações (4.3), calculamos a razão y/x :

$$\frac{y}{x} = \frac{\left[\frac{mv_{\perp}}{eB} \operatorname{sen}\left(\frac{eBz}{mv_{//}}\right) \right]}{\frac{mv_{\perp}}{eB} \left[\cos\left(\frac{eBz}{mv_{//}}\right) - 1 \right]} = \frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{eBz}{mv_{//}}\right) \right]}{\left[\cos\left(\frac{eBz}{mv_{//}}\right) - 1 \right]} = A \quad (4.9)$$

que é constante para um dado z . Para uma posição z , a equação $y = Ax$ representa uma reta que passa pela origem e cuja inclinação $\operatorname{tg}(\theta) = A$. Na figura 6 está um gráfico do coeficiente angular A em função do campo magnético B , em que foram usados os seguintes valores: $z = L = 0,25\text{m}$, $V_2 = 800\text{ V}$ e $v_{//} = 1,7 \times 10^8\text{ m/s}$. Partindo de $B = 0$ quando a reta imagem na tela do TRC é um traço vertical, ocorre a rotação do traço para B crescente com inversão da inclinação até que a reta se reduz a um mínimo, com inversão descontínua do coeficiente angular no nó da hélice

¹ www.fma.if.usp.br/~mlima/teaching/4320292_2012/Cap7.pdf

² fma.if.usp.br/~mlima/teaching/4323203_2018/Ape7.pdf

produzida pela trajetória dos elétrons. Note que a velocidade $v_{//}$ é cerca de 1% da velocidade da luz. A correção relativística é inferior à precisão experimental. O primeiro nó da hélice ocorre para $B = 0,0023T$. É essa condição que permite medir a razão e/m para o elétron.

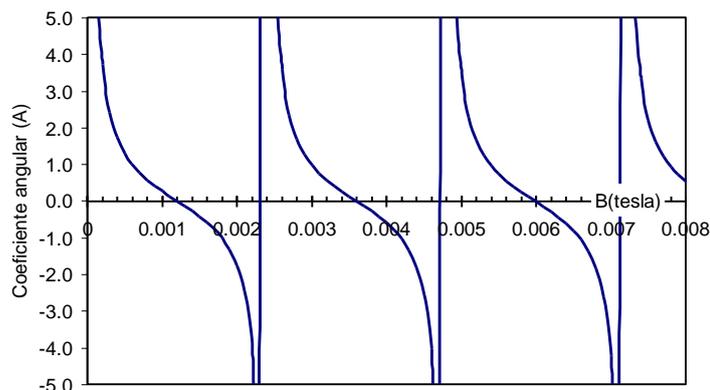


Figura 6. Coeficiente angular da reta imagem na tela do TRC em função do campo magnético B no solenoide. A mudança abrupta em $0,0023T$, $0,0047T$, etc. ocorre nos mínimos da reta imagem, ou seja, nos nós da hélice produzida pela trajetória dos elétrons.

5. Parte Experimental

O arranjo experimental para medida da razão carga/massa é composto por duas montagens independentes. a) Um TRC “didático” que permite o acesso à maioria dos controles de um TRC e será usado para determinação da sensibilidade do TRC. b) O mesmo TRC, montado dentro de um solenoide para medida da razão carga/massa do elétron. O arranjo experimental está mostrado nas figura 7 e 8.

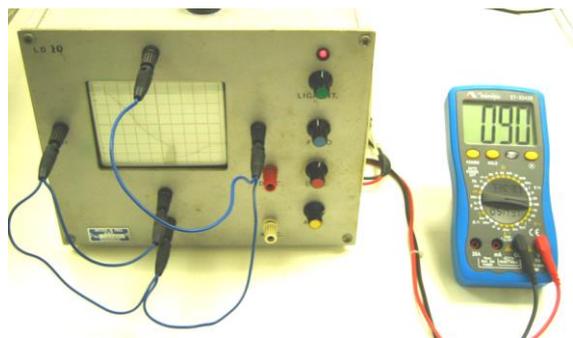


Figura 7a. TRC didático. As 4 placas de deflexão estão aterradas. O voltímetro indica a tensão de aceleração $V_2/10$

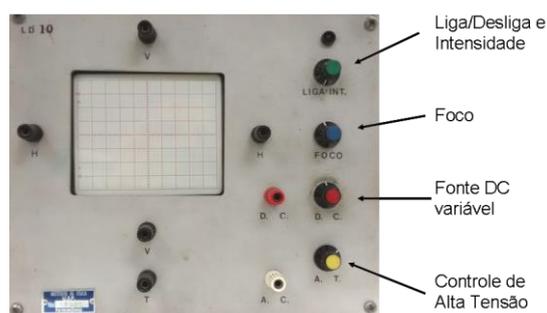


Figura 7b. O TRC didático e os controles de liga/desliga, foco, da fonte interna de corrente contínua e de alta tensão.

O objetivo da 1ª parte é determinar a sensibilidade do TRC estudando a dependência da deflexão H do ponto luminoso na tela em função da tensão V aplicada numa das placas de deflexão. A

equação 3.9 mostra o comportamento esperado. Na figura 8 está o TRC inserido num solenoide para medida da razão e/m do elétron.

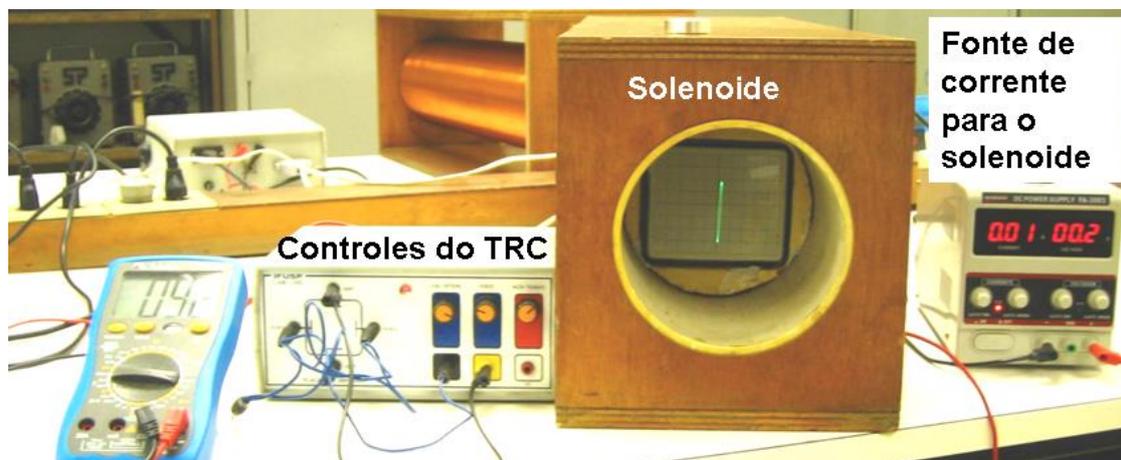


Figura 8. Arranjo experimental para medida da razão carga/massa do elétron num TRC inserido num solenoide.

Aplica-se no par de placas de deflexão vertical uma tensão alternada (fornecida no conector AC). O ponto luminoso irá descrever um segmento de reta na tela. O solenoide gera um campo magnético ao longo do eixo do TRC. Variando a corrente elétrica no solenoide varia-se o módulo de \vec{B} . O traço inicialmente vertical, gira e diminui, até que, para um certo valor de B , se reduz a um ponto. É nesta condição que o passo da hélice é igual à distância das placas de deflexão à tela, que permite medir a razão e/m do elétron.

6. Dimensões do TRC didático (em mm)

Deflexão vertical

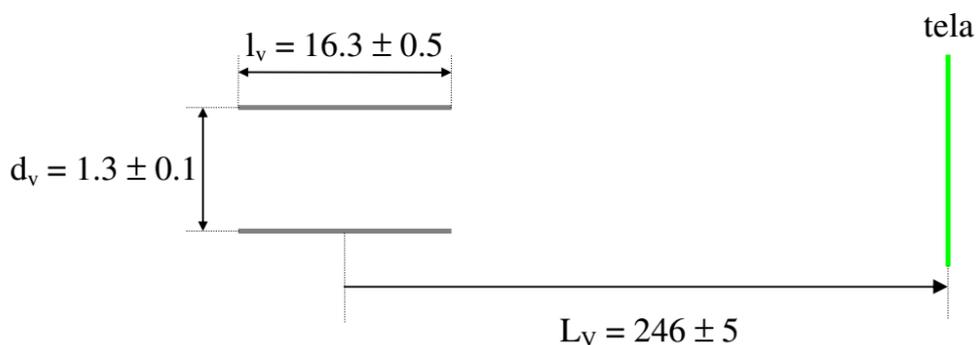


Figura 9. Dimensões (em mm) das placas de deflexão vertical do TRC didático usado no Laboratório didático do IFUSP. Fonte: <http://portal.if.usp.br/labdid/pt-br/tabelas-e-constantes>

Deflexão horizontal

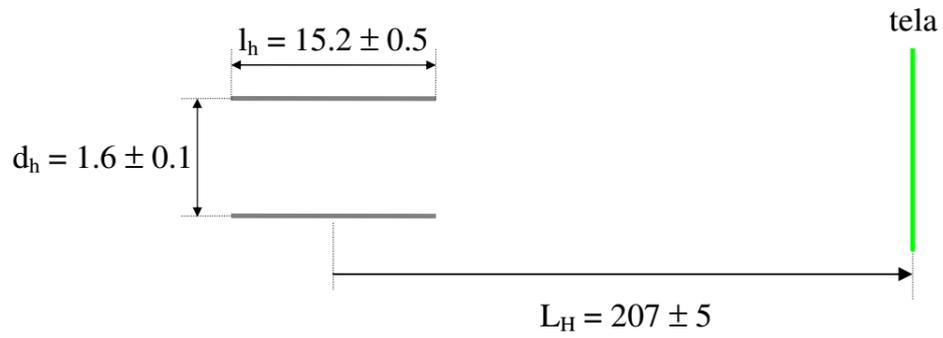


Figura 10. Dimensões (em mm) das placas de deflexão horizontal do TRC didático usado no Laboratório didático do IFUSP. Fonte: <http://portal.if.usp.br/labdid/pt-br/tabelas-e-constantas>