COMPLEMENTOS DE ELETROMAGNETISMO

ROTEIRO: ONDAS EM MEIOS MATERIAIS

Nome: André Kyoshi Fujii Ferrazo

Abner Eliezer Borges

Estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo. Vamos agora analisar, a partir das equações de Maxwell, como ondas eletromagnéticas se propagam em meios materiais.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Qualquer meio material é formado por partículas positivas e negativas, que correspondem a densidade carga ρ+ e ρ-. Por isso, quando há uma onda eletromagnética no interior de um meio, os seus campos elétrico e magnético causam forças sobre as cargas ali presentes, dadas pela força de Lorentz. Como as velocidades dos elétrons no interior da matéria são, em geral, muito menores do que a da luz, as forças devidas a campo magnético são muito pequenas quando comparadas com as devidas a campo elétrico e podem ser desprezadas.

Deste modo, o efeito mais importante que uma onda produz em um meio material é o deslocamento relativo entre as densidades ρ+ e ρ-. Tal como acontece no caso de campos elétricos estáticos, estes deslocamentos são muito pequenos e não alteram a condição de neutralidade local no interior do meio. Assim, vale a relação: $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$.

O campo elétrico da onda oscila com o tempo e causa forças opostas nas densidades ρ_+ e ρ_-, produzindo um movimento relativo entre elas que é também oscilatório. Este movimento dá origem a correntes. Como a massa de um íon positivo é milhares de vezes maior que a massa de um elétron, podemos considerar que essas correntes são derivadas apenas aos movimentos dos elétrons. Assim, o comportamento de uma onda em um meio material é determinado pelo processo no qual o campo elétrico da onda age nas cargas -e dos elétrons e produz densidades de corrente $\vec{j}$. Estas correntes geram campo magnéticos que, por meio da lei de Faraday, geram campos elétricos.

$$\vec{E} \rightarrow \vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{E}$$

Para reescrever as equações de Maxwell apenas em função de $\vec{E}\,(x,y,z,t)$ e de $\vec{B}\,(x,y,z,t)$, é necessário obter uma expressão para a densidade de corrente $\vec{j}$ em função destes campos. Vamos resolver essa questão primeiro para o caso de ondas em condutores e, em seguida, para o caso de ondas em dielétricos.

ONDAS EM CONDUTORES – modelo de Drude

Para escrever $\vec{j}$ em função do campo elétrico, efetuando as seguintes etapas:

1. Escrevemos a expressão da força resultante $\vec{F}$ que age nos elétrons do material.

- Força elétrica devido ao campo elétrico da onda eletromagnética:

$\vec{F}_1 = -e\vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*)$

- Força devido à resistência ao movimento do eletron.

$\vec{F}_2 = -b\vec{v}$

2. Encontramos a expressão do deslocamento $\vec{S}$ dos elétrons em função do tempo, a partir da lei de Newton $\vec{F} = m\frac{d^2s}{dt^2}$. Como este deslocamento é causado pelo campo elétrico, o deslocamento $\vec{S}\,(t)$ depende deste campo. Escrevendo $\vec{S}\,(t)$ = A cos $(\omega t - \emptyset * + \delta)$ e substituindo na lei de Newton, obtemos:

$$A = \frac{e\,\vec{E}^*}{\omega\,\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}}$$

$$tg\;\delta = \frac{b}{m\omega}$$

$$\vec{S} = \frac{e\vec{E}^*}{\omega\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$$

3. Substituindo $\vec{S}$ na expressão $\vec{j} = -eN\frac{d\vec{s}}{d\vec{t}}$, onde *N* é a densidade volumétrica de elétrons livres do metal, chegamos a uma equação para $\vec{j}$ em função do campo elétrico. Neste caso, temos:

$$\vec{j} = \frac{Ne^2\vec{E}^*}{(m^2\omega^2 + b^2)}\left[b\cos(\omega t - \phi^*) + m\;\omega\;\text{sen}\;(\omega t - \phi^*)\right]$$

$$\vec{j}(\omega) = \frac{e^2Nb}{m^2\omega^2 + b^2}\,\vec{E} - \frac{me^2N}{m^2\omega^2 + b^2}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

4. Substituindo $\vec{j}$ na equação de Ampère-Maxwell, escrevemos as 4 equações de Maxwell em função dos campos elétrico e magnético.

$$\text{rot}\;\vec{B} = \mu_0 \jmath + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu_0\frac{e^2Nb}{m^2\omega^2 + b^2}\,\vec{E} + \mu_0\left(\varepsilon_0 - \frac{me^2N}{m^2\omega^2 + b^2}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

que pode ser reescrita como :

$$= \mu_0 g(\omega)\vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sendo:

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2\omega^2 + b^2} \qquad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{me^2 N}{m^2\omega^2 + b^2}$$

5. A partir das equações de Maxwell, seguindo o mesmo procedimento feito no caso do vácuo, obtemos equações de onda para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no interior do metal, cujas soluções são:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{-\beta y} cos(ky - \omega t) \qquad \vec{B} = \overrightarrow{B_0} e^{-\beta y} cos(ky - \omega t + \eta)$$

onde

$$\beta = \frac{\mu_0 \, g(\omega) \, \omega}{2k} \qquad k = \pm\sqrt{\mu_0}\,\omega\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}$$

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega}(\hat{\jmath} \times \overrightarrow{E_0})$$

$$tg\,\eta = \frac{\beta}{\kappa}$$

Os resultados acima nos mostram que o campo magnético no interior de um condutor é, como no caso do vácuo, simultaneamente ortogonal ao campo elétrico e à direção de propagação. Entretanto, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não estão em fase, sendo η o ângulo de defasagem.

O modelo de Drude prediz, como vemos, propagação com amortecimento para os campos elétrico e magnético no interior de um condutor. Dependendo da frequência da onda, um desses efeitos é dominante.

O amortecimento é caracterizado pela função β(ω), enquanto que a propagação é caracterizada pela função k(ω); o efeito dominante é determinado pela maior dentre elas.

Questão 1: Esboce os gráficos dos campos elétrico e magnético em função de *y* e *t*, para

β(ω) > k(ω) e β(ω) < k(ω).

Questão 2: Explique o porquê de aparecer um termo de defasagem η entre os campos elétrico e magnético.

Exemplo do Condutor de Prata

Muitas vezes, a capacidade que uma onda tem de se propagar em um meio condutor é representado pela grandeza δ definida como:

$\delta = 1 / \beta$

Essa grandeza tem dimensão de comprimento e é denominada “espessura de penetração”. Ela é a distância ao longo da qual a amplitude dos campos elétrico e magnético se reduzem a 1/e (= 0,368) do seu valor.

O modelo de Drude nos permite expressar a espessura de propagação a partir da seguinte expressão:

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\mu_0} g(\omega)} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}$$

A partir da equação apresentada, a tabela abaixo expressa a espessura de penetração na prata em função frequência da onda, juntamente com os valores das funções de g(ω) e ε (ω).

Região do espectro	**f[s^1]**	**g (ω) [Ω^{-1}m^{-1}]**	$\varepsilon(\omega)$ [C^2s^2/kgm^3]	$\delta(\omega)$ **[m]**
-	0	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	∞
ondas longas	1	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	6,36 x 10^{-2}
ondas longas	10^3	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	2.01 x 10^{-3}
AM	10^6	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	6,36 x 10^{-5}
FM, TV	10^9	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	2,01 x 10^{-6}
infravermelho	10^{11}	6,25 x 10^7	-2,00 x 10^{-6}	2,01 x 10^{-7}
infravermelho	10^{12}	6,01 x 10^7	-1,92 x 10^{-6}	5,76 x 10^{-8}
infravermelho	10^{13}	1,24 x 10^7	-3,97 x 10^{-7}	4,53 x 10^{-8}
visível	10^{14}	1,54 x 10^5	-4,95 x 10^{-9}	2,02 x 10^{-8}
visível	10^{15}	1,55 x 10^3	-4,07 x 10^{-11}	2,23 x 10^{-8}
ultravioleta	10^{16}	1,55 x 10^1	8,347 x 10^{-12}	3,33 x 10^{-4}
raios X	10^{18}	1,55 x 10^{-3}	8,842 x 10^{-12}	3,42 x 10^o
raios γ	10^{21}	1,55 x 10^{-9}	8,842 x 10^{-12}	3,42 x 10^6
raios γ	10^{24}	1,55 x 10^{-15}	8,842 x 10^{-12}	3,42 x 10^{12}
-	∞	0	8,842 x 10^{-12}	∞

Questão 3: Um aparelho de TV é colocado no interior de uma caixa de vidro espelhada, sendo 10^{-7} m a espessura da camada de prata do espelho. Será possível que a televisão mostre alguma imagem ao ser ligada? Será possível que alguém no exterior da caixa veja essa imagem?

ONDAS EM MEIOS MATERIAIS DIELÉTRICOS

Os materiais dielétricos são formados por moléculas neutras, mas essa neutralidade não impede sua interação com campos elétricos e magnéticos externos, uma vez que são constituídas por partículas carregadas. Quando existe uma onda eletromagnética no interior de um dielétrico as cargas vão reagir a presença deste campo pela por meio da força de Lorentz. Como na caso dos metais as forças magnéticas são muito pequenas e é o campo elétrico que vai deslocar as partículas carregadas de sua posição de equilíbrio. Como os elétrons são bem mais leves que o núcleo atômico, o efeito principal dessa força é sobre eles.

Nos dielétricos, não há elétrons livres. Quando o campo elétrico puxa um dado elétron numa direção, a força que o prende ao núcleo age no sentido oposto, puxando-o de volta para a posição de equilíbrio. O deslocamento de um sistema em relação a sua posição de equilíbrio dá origem a forças restauradoras, que correspondem a molas matemáticas.

Segundo o modelo de Drude para um dielétrico, no qual existe um campo elétrico oscilante, há três tipos de forças atuando sobre os elétrons;

1) força devida ao campo elétrico da onda eletromagnética:

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*)$$

2) força que prende o elétron ao núcleo;

$$\vec{F}_2 = -k\vec{S}$$

3) força de “amortecimento";

$$\vec{F}_3 = -b\ \vec{v}$$

No modelo de Drude, a lei de Newton determina a equação de movimento de um elétron atômico em torno da sua posição de equilíbrio para uma onda em um dielétrico partindo das seguintes equações;

$$m\,\frac{d^2S}{dt^2} = -kS - b\,\frac{dS}{dt} - e\,E^* \cos(\omega t - \phi^*)$$

$$S = A\cos(\omega t - \phi^* + \delta)$$

Neste caso, obtemos como solução para o movimento do elétron a seguinte equação;

$$S = \frac{eE^*}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$$

onde

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \qquad\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sendo ω_0, a frequência natural de oscilação. Esta frequência pode ser interpretada como a frequência na qual o elétron oscilaria se as forças devidas ao campo da onda (força 1) e de amortecimento (força 3) não existissem.

Questão 4: Em quais condições as equações que caracterizam ondas em dielétricos se reduzem as equações que caracterizam ondas em condutores.

Com o mesmo procedimento seguido para o caso dos metais, obtemos:

$$\vec{j} = \frac{Ne^2 b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \vec{E} - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Esta expressão determina o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de dielétricos. Consideremos, portanto, a lei de Ampère-Maxwell que é dada por:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{Ne^2 b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \vec{E} + \mu_0 \left[\varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \right] \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu_0\, g(\omega)\, \vec{E} + \mu_0\, \varepsilon(\omega)\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sendo:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \qquad\qquad g(\omega) = \frac{Ne^2 b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}$$

Portanto as expressões do campo elétrico e magnético no interior de um material dielétrico advindas das equações de Maxwell são:

$$\vec{E}(y,t) = \vec{E}_0 e^{-\beta y}\cos(ky - \omega t + \phi) \qquad \beta = \frac{\mu_0\, g(\omega)}{2k}\,\omega$$

$$k = \sqrt{\mu_0}\omega\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \qquad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$\vec{B}(y,t) = \vec{B}_0\, e^{-\beta y}\cos(ky - \omega t + \phi + \eta)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega}\,(\vec{j} \times \vec{E}_0)$$

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\beta}{k}$$

Como no caso dos metais, as ondas eletromagnéticas em dielétricos também são compostas por termos correspondentes a amortecimento e à oscilação. Existem, entretanto, duas importantes diferenças entre os dois casos. A primeira é que as funções k(ω) e β(ω), responsáveis pela propagação e pelo amortecimento respectivamente, têm características diferentes para condutores e dielétricos. A segunda diferença importante refere-se à causa do amortecimento em cada um dos casos. O amortecimento da onda no caso de metais é devido à dissipação de energia por efeito Joule, causada pelo “atrito” entre as partículas que constituem o meio, enquanto que no caso de dielétricos o amortecimento deve-se ao fato de os átomos da substância poderem absorver e reirradiar a energia da onda.

Questão 5: Discuta quais as principais diferenças entre um dielétrico e um condutor na interação com ondas eletromagnéticas.

Uma outra característica importante de dielétricos é que a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas em seu interior depende da frequência. Essa velocidade é dada por:

$$V(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g(\omega)^2}{\omega^2}}}}$$

Um meio em que a velocidade de propagação de ondas depende da frequência é chamado de dispersivo.

Questão 6: Segundo as equações acima discuta o fenômeno que ocorre quando uma luz branca incide em um prisma de vidro.