CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE TÓPICOS DE CÁLCULO - INTEGRAIS

2.1 Integrais indefinidas

Além de iniciar o estudo intensivo de derivadas, *Newton* e *Leibniz* descobriram também que muitos problemas de geometria e física dependem de “antiderivação”. Este problema é, às vezes, chamado “inverso das tangentes”, ou seja, dada a derivada de uma função, achar a própria função.

2.1.1 Diferencial

Até agora representamos a derivada de $y = f\,(x)$ pelo símbolo $\frac{dy}{dx} = f\,'(x)$. Chama-se a atenção para o fato de que o símbolo $\frac{dy}{dx}$ não deveria ser considerado como uma fração de numerador *dy* e denominador *dx*, e sim como um todo, um único símbolo para indicar o limite de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ quando Δx tende a zero.

Definição 1

Se $f'(x)$ é a derivada de $f\,(x)$ para um particular valor de x, e Δx é um acréscimo arbitrariamente escolhido de x, então a diferencial de $f\,(x)$, que se indica pelo símbolo $df\,(x)$ é definida como

$$df\,(x) = f\,'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x \qquad (2.1)$$

Definição 2

Se a função $f(x)$ é definida por $y = f(x) = x$, então a diferencial de x, denotada por dx é dada por

$$dx = \Delta x \tag{2.2}$$

pois $f'(x) = 1$.

Logo, quando x é uma variável independente, a diferencial de x (= dx) é igual a Δx. Portanto pode-se escrever:

$$dy = f'(x)dx \tag{2.3}$$

isto é, a diferencial de uma função é igual a sua derivada multiplicada pela diferencial da variável independente. Assim, se $y = f(x) = x^{2,}$ então, $dy/dx = 2x$ e $dy = 2x\,dx$.

2.1.2 A integral indefinida

Se $y = F(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida, digamos, por exemplo

$$\frac{d}{dx}F(x) = 2x$$

podemos descobrir facilmente qual a função $F(x)$, ou seja $F(x) = x^2$. Além disso, se acrescentarmos um termo constante a derivada não muda. Logo, a função $F(x)$ poderá ser:

$$x^2 + 1\ , \qquad x^2 - \sqrt{3}\ , \qquad x^2 + 5\pi$$

e, de forma mais geral,

$$x^2 + C\,,$$

onde C é uma constante qualquer.

O problema que acabamos de discutir envolveu a descoberta de uma função desconhecida, cuja derivada é conhecida. Se $f(x)$ é dada, então a função $F(x)$ tal que:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

chama-se uma antiderivada (ou primitiva) de $f(x)$, e o processo de achar F(x) a partir de $f(x)$ é a antiderivação. Por motivos históricos, uma antiderivação de $f(x)$ é usualmente chamada de uma integral de $f(x)$, e a antiderivação chama-se integração.

Uma forma padrão de se expressar o fato de que todas as antiderivadas de $f(x)$ tem a forma $F(x) + C$ é escrever

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2.4}$$

A função $f(x)$ é chamada de integrando e o símbolo $\int$ é chamado sinal de integral. A constante C, no segundo membro, chama-se constante de integração. O problema que acabamos de mostrar pode ser assim posto: dada a diferencial de uma função, achar a função.

2.1.3 Determinação da constante de integração

A constante de integração pode ser determinada quando conhecemos algumas condições iniciais, isto é, quando conhecemos o valor da integral para algum valor da variável. Ilustremos com um exemplo:

Exemplo 2.1

Achar a função cuja derivada primeira é $3x^2 - 2x + 5$ e que para $x = 1$, $f(x) = 12$.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \Rightarrow dy = (3x^2 - 2x + 5)\ dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 2x + 5)dx$$

$$y = f(x) = x^3 - x^2 + 5x + C$$

Em que C é a constante de integração. Dadas as condições iniciais $f(x) = 12$ para $x = 1$; temos

$$12 = 1 - 1 + 5 + C \ , \quad \text{ou} \quad \mathrm{C} = 7$$

Logo, $x^3 - x^2 + 5x + 7$ é a função pedida.

2.1.4 Significado geométrico da constante de integração

Suponhamos que seja pedido, determinar a equação da curva em cada ponto, da qual a tangente tem um coeficiente angular igual a 2 *x*.

Como o coeficiente angular da tangente à curva, num ponto qualquer, é *dy*/*dx*, temos, por hipótese,

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x \;, \quad \text{ou} \quad dy = 2\,x\;dx\,.$$

Integrando,

$$y = 2\int x\,dx \;, \quad \text{ou} \quad y = x^2 + C$$

Em que C é a constante de integração. Se atribuirmos a C uma série de valores, digamos 6, 0, – 8, – 3 teremos as funções:

$$y = x^2 + 6 \;, \quad y = x^2 \;, \quad y = x^2 - 8 \;, \quad y = x^2 - 3\,.$$

Assim, a função $y = x^2 + C$ define uma família de parábolas, com eixos coincidindo com a ordenada, e tendo C como ponto de interseção com esta ordenada (Figura 1.20). Todas as parábolas tem o mesmo valor de *dy*/*dx*, isto é, tem a mesma direção (declividade) para o mesmo valor de *x*.

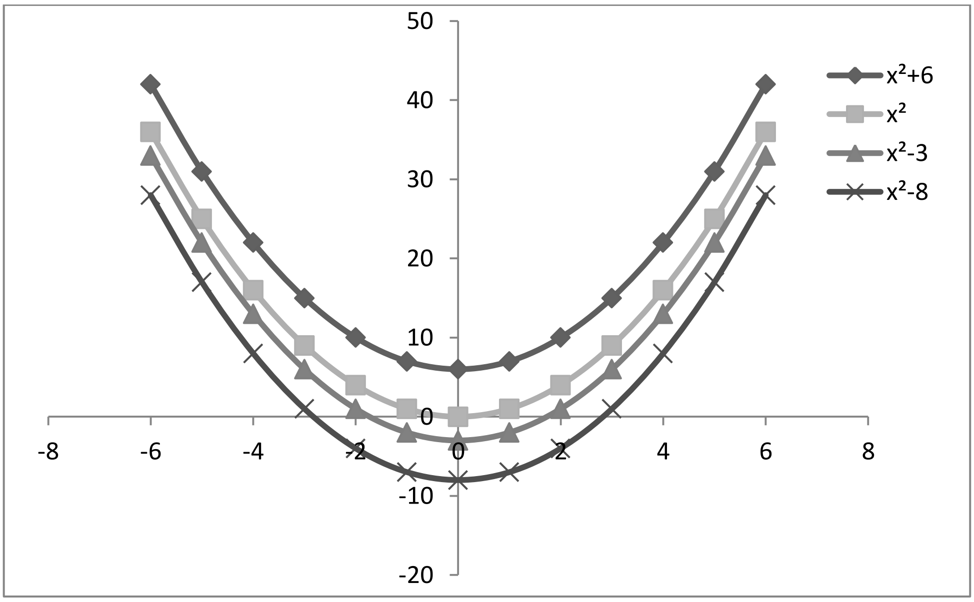

Figura 1.20 – Família de parábolas de $\boldsymbol{y = x^2 + C}$

2.1.5 Significado físico da constante de integração

Deseja-se, determinar as leis que governam o movimento de um ponto móvel em linha reta, com aceleração constante.

Como a aceleração (= dv/dt) é constante, digamos "a", temos:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad , \qquad \text{ou} \qquad dv = a\,dt \ .$$

Integrando,

$$v = at + C \ .$$

Para determinar C, suponhamos que a velocidade inicial seja $v_{0,}$ isto é, seja dada a seguinte condição inicial: $v = v_0$ quando $t = 0$. Assim;

$$v_0 = 0 + C \ , \qquad \text{ou} \qquad C = v_0 \ .$$

Logo, $v = a\,t + v_0$.

Como, $v = \dfrac{ds}{dt}$, sendo "s" o espaço percorrido, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = a\,t + v_0 \qquad \Rightarrow \qquad ds = a\,t\,dt + v_0\,dt \ .$$

Integrando,

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + C$$

Para determinar C, suponhamos que a distância inicial seja $s_{0,}$ quando $t = 0$. Assim:

$$s_0 = 0 + 0 + C \ , \qquad \text{ou} \qquad C = s_0$$

Logo, $\quad \mathrm{s} = \dfrac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + s_0$.

2.1.6 Algumas regras de integração

Nosso objetivo, nessa seção, é apresentar algumas regras formais de integração, que nos permitirão integrar grande número de funções, por processos puramente mecânicos.

a) $\int u^n \, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \; , \quad (n \neq -1)$

b) $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$

c) $\int e^u \, du = e^u + \mathrm{C}$

d) $\int \cos u \, du = sen \; u + C$

e) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

f) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

g) $\int \operatorname{cose}c^2 \, u \, du = -\cot \; u + C$

h) $\int \sec u \; \tan u \, du = \sec u + C$

i) $\int \operatorname{cosec} \; u \; \cot \; u \, du \; = \; - \operatorname{cosec} u \; + C$

j) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen \; \dfrac{u}{a} \; + \; C$

k) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{u}{a} \; + \; C$

l) $\int \tan u \, du = -\ln (\cos u) \; + \; C$

m) $\int \cot u \, du = \ln (sen \, u) \; + \; C$

n) $\int \sec u \, du = \ln (\sec u + \tan u) \; + \; C$

o) $\int \operatorname{cosec} \; u \, du = -\ln (\operatorname{cosec} \; u + \cot \; u) \; + \; C$

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 2A

1. Calcule

a) $\int x\, e^{-x^2}\, dx$

b) $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+senx}}$

c) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$

d) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

e) $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

f) $\int \sqrt{3-2x}\;\; dx$

g) $\int \cos^2 x\, dx$

h) $\int \dfrac{(x+2)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

Respostas:

a) $-\dfrac{1}{2}\; e^{-x^2} + \mathrm{C}$

b) $2\sqrt{1+sen\,x} + \mathrm{C}$

c) $\ln |\ln \mathrm{x}| + \mathrm{C}$

d) $\dfrac{1}{2}\; arsen\; \dfrac{2}{3}\mathrm{x} \; + \mathrm{C}$

e) $-\dfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + \mathrm{C}$

f) $-\dfrac{1}{3}(3-2x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$

g) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}sen\,2x + C = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}sen\,x \cos x + C$

h) $-\sqrt{3+2x-x^2} + 3\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{C}$

2. Achar a equação do movimento de uma pedra de massa m, que é largada de um ponto acima da superfície da terra.
   Resposta: $S = ho - \frac{1}{2} a t^2$

3. Uma pedra é atirada para cima com uma velocidade inicial de $39{,}2\ m.s^{-1}$, do alto de um edifício de 98 m de altura. Expresse sua altura em relação ao solo como uma função do tempo. Ache a altura máxima que a pedra atinge. Admitindo que a pedra não toque no edifício em sua queda, quanto tempo leva para chegar ao solo? Qual sua velocidade no instante que chega ao solo?
   Respostas: $S = ho - \frac{1}{2} a t^2 + 39{,}2t$; *176,32m; 10s; -58,9 m/s*

4. Determinar as equações do movimento de uma partícula lançada inclinada de um angulo α, com a horizontal, com uma velocidade inicial v_0, desprezando a resistência do ar.
   Respostas: $x = x0 + v0 \cos \alpha\, t$; $y = vo \operatorname{sen} \alpha\, t - \frac{1}{2} a t^2 + yo$

5. Num dado instante, a temperatura de uma sala é de $20\ ^oC$ e a temperatura de um líquido dentro desta sala é $70\ ^oC$. Cinco minutos depois a temperatura do líquido é $60\ ^oC$. Admitindo que a velocidade de variação da temperatura do líquido seja proporcional à diferença de temperatura entre o líquido e a sala, achar a temperatura do líquido 30 minutos depois da primeira observação.
   Resposta: 33,1°C

6. A resistência do ar a um automóvel, dentro de certos limites de velocidade, é proporcional à velocidade. Assim, se F é a força líquida gerada pelo motor, temos

$$M \frac{dv}{dt} = F - k\, v\ .$$

   Exprima a velocidade em termos de t, sabendo que $v = 0$ quanto $t = 0$.

   Resposta: $v = \frac{F}{K}\left(1 - e^{\left[\frac{-Kt}{M}\right]}\right)$.

EXERCICIOS PROPOSTOS – LISTA 2B

1. Resolver as integrais por partes

a) $\int x \sec^2 x \, dx$

b) $\int arctg\ x \, dx$

c) $\int e^x \cos dx$

Respostas:

a) $\mathrm{x\,tg\,x + ln|cos\,x| + C}$

b) $\mathrm{x\,arctg\,x - \frac{1}{2} ln(x^2 + 1) + C}$

c) $\dfrac{\mathrm{e^x}\ (sen\,x + \cos x)}{2} + \mathrm{C}$

2. Resolver as integrais por substituição trigonométrica

a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

b) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

c) $\int \dfrac{x\ dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Respostas:

a) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \dfrac{\mathrm{x}}{2}\right) + \mathrm{C}$

b) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} + \mathrm{C}$

c) $-\sqrt{5+4x-x^2} + 2\,arcsen\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + \mathrm{C}$

3. Resolver as integrais por frações parciais

a) $\int \frac{dx}{x^3 + 5x^2 + 4x}$

b) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x}\, dx$

c) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - x - 22}{x^2 + 3x - 10}\, dx$

Respostas:

a) $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{\mathrm{x}^3 (x+4)}{(x+1)^4} \right| + \mathrm{C}$

b) $\ln \frac{(\mathrm{x}^2 + 1)}{|x|} + \mathrm{C}$

c) $\frac{\mathrm{x}^2}{2} + 2\mathrm{x} + \frac{17}{7} \ln(\mathrm{x} + 5) + \frac{4}{7} \ln(\mathrm{x} - 2) + \mathrm{C}$