Aula 14

em cossenos na solução. Isso ocorre porque os dados de contorno foram dados em $0 \le \theta < 2\pi$ e têm período 2π. Em consequência, precisamos da série de Fourier completa, em vez da série só em senos ou só em cossenos.

PROBLEMAS

1. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Para $a = 3$ e $b = 1$, faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de y e faça, também, o gráfico de u em função de y para diversos valores de x.
(d) Faça o gráfico tridimensional de u em função de x e de y. Desenhe, também, diversas curvas de nível de $u(x, y)$ no plano xy.

2017

2. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

3. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: Considere a possibilidade de somar as soluções de dois problemas, um com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(a, y) = f(y)$, e o outro com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(x, 0) = h(x)$.
(b) Encontre a solução se $h(x) = (x/a)^2$ e $f(y) = 1 - (y/b)$.
(c) Sejam $a = 2$ e $b = 2$. Faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de x, u em função de y, u em função de x e de y, e curvas de nível.

4. Mostre como encontrar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = k(y), \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: Veja o Problema 3.

5. Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

fora do círculo $r = a$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

sobre o círculo. Suponha que $u(r, \theta)$ está bem definida e é limitada para $r > a$.

6. (a) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace na região semicircular $r < a, 0 < \theta < \pi$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada na região dada.
(b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

(c) Seja $a = 2$ e faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de r, u em função de θ, u em função de ambos r e θ, e curvas de nível.

7. Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a, 0 < \theta < \alpha$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r,0) = 0, \qquad u(r,\alpha) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a,\theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \alpha.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada no setor, e que $0 < \alpha < 2\pi$.

8. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace na faixa semi-infinita $0 < x < a, y > 0$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = 0, \qquad y > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le a$$

e a condição adicional de que $u(x, y) \to 0$ quando $y \to \infty$.
(b) Encontre a solução se $f(x) = x(a - x)$.
(c) Seja $a = 5$. Encontre o menor valor de y_0 para o qual $u(x, y) \le 0{,}1$ para todo $y \ge y_0$.

9. Mostre que a Eq. (23) só tem soluções periódicas se λ for real.
Sugestão: Seja $\lambda = -\mu^2$, em que $\mu = \nu + i\sigma$, com ν e σ reais.

10. Considere o problema de encontrar uma solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(a,y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u_y(x,0) = 0, \qquad u_y(x,b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

Esse é um exemplo de um problema de Neumann.
(a) Mostre que a equação de Laplace e as condições de contorno homogêneas determinam o conjunto fundamental de soluções

$$u_0(x,y) = c_0,$$
$$u_n(x,y) = c_n \cosh(n\pi x/b)\cos(n\pi y/b), \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

(b) Através da superposição das soluções fundamentais do item (a), determine, formalmente, uma função u que satisfaz também a condição de contorno não homogênea $u_x(a, y) = f(y)$. Note que, quando se calcula $u_x(a, y)$, o termo constante em $u(x, y)$ é eliminado e não há condição da qual se possa determinar c_0. Além disso, tem que ser possível representar f por uma série de Fourier em cossenos de período $2b$ sem termo constante. Isso significa que

$$\int_0^b f(y)\,dy = 0$$

é uma condição necessária para que o problema dado tenha solução. Finalmente, note que c_0 permanece arbitrário e, portanto, a solução está determinada a menos dessa constante aditiva. Essa é uma propriedade de todos os problemas de Neumann.

11. Encontre uma solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace no interior do círculo $r = a$, que satisfaça a condição de contorno sobre o círculo

$$u_r(a,\theta) = g(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Note que esse é um problema de Neumann e que sua solução está determinada a menos de uma constante aditiva. Enuncie uma condição necessária sobre $g(\theta)$ para que esse problema possa ser resolvido pelo método de separação de variáveis (veja o Problema 10).

12. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u_y(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = g(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Note que esse não é um problema de Dirichlet nem de Neumann, mas um problema misto no qual u é dada em parte da fronteira e sua derivada normal é dada no resto.
(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 1$. Fazendo gráficos apropriados, compare essa solução com a do Problema 1.

13. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u_y(x, b) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a.$$

Sugestão: Alguma hora vai ser necessário expandir $f(y)$ em uma série envolvendo $\operatorname{sen}(\pi y/2b), \operatorname{sen}(3\pi y/2b), \operatorname{sen}(5\pi y/2b), \ldots$ (veja o Problema 39 da Seção 10.4).
(b) Encontre a solução se $f(y) = y(2b - y)$.
(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

14. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0, y) = 0, \qquad u_x(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq a.$$

(b) Encontre a solução se $g(x) = 1 + x^2(x - a)^2$.
(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

15. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas r, θ e z e depois supondo que a solução é simétrica em relação ao eixo dos z (não depende de θ), obtemos a equação

$$u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0.$$

Supondo que $u(r, z) = R(r)Z(z)$, mostre que R e Z satisfazem as equações

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \qquad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

A equação para R é uma equação de Bessel de ordem zero com variável independente λr.

16. **Fluxo em um Aquífero.** Considere o fluxo de água em um meio poroso, como areia, em um aquífero. O fluxo é bombeado por uma cabeça hidráulica, uma medida da energia potencial da água acima do aquífero. Seja $R : 0 < x < a, 0 < z < b$ uma seção vertical do aquífero. Em um meio homogêneo uniforme, a cabeça hidráulica $u(x, z)$ satisfaz a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{zz} = 0 \qquad \text{em } R. \tag{i}$$

Se a água não puder fluir através dos lados e fundo de R, então as condições de contorno serão

$$u_x(0, z) = 0, \quad u_x(a, z) = 0, \qquad 0 \leq z \leq b \tag{ii}$$
$$u_z(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq a. \tag{iii}$$

Finalmente, suponha que a condição de contorno em $z = b$ é

$$u(x, b) = b + \alpha x, \qquad 0 \leq x \leq a, \tag{iv}$$

em que α é a inclinação do aquífero.
(a) Resolva o problema de valores de contorno dado para $u(x, z)$.
(b) Sejam $a = 1000$, $b = 500$ e $\alpha = 0{,}1$. Desenhe curvas de nível da solução em R, ou seja, desenhe algumas curvas de nível de $u(x, z)$.
(c) A água flui ao longo de caminhos em R ortogonais às curvas de nível de $u(x, z)$ no sentido de u decrescente. Faça gráficos de alguns dos caminhos de fluxo.

APÊNDICE A

Dedução da Equação de Calor. Nessa seção, vamos deduzir a equação diferencial que, pelo menos em uma primeira aproximação, governa a condução de calor em sólidos. É importante compreender que a análise matemática de uma situação ou um processo físico como este se baseia, em última instância, em conhecimentos empíricos sobre o fenômeno em questão. O matemático tem que começar em algum lugar, e esse lugar é dado pela experiência. Considere uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, de modo que o calor só pode fluir na direção do eixo. Foi demonstrado muitas vezes que, se duas seções retas paralelas de mesma área A e temperaturas diferentes T_1 e T_2, respectivamente, estiverem separadas por uma pequena distância d, uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a mais fria. Além disso, essa quantidade de calor é diretamente proporcional à área A e à diferença de temperatura $|T_2 - T_1|$, e inversamente proporcional à distância de separação d. Logo,

$$\text{Quantidade de calor por unidade de tempo} = \kappa A|T_2 - T_1|/d, \tag{1}$$