 Aula 13

Problema Geral para a Corda Elástica. Finalmente, vamos analisar o problema que consiste na equação de onda (1), nas condições de contorno (3) e nas condições iniciais gerais (4), (5):

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L, \tag{37}$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais dadas da corda. Embora esse problema possa ser resolvido por separação de variáveis, como nos casos discutidos anteriormente, é importante observar que ele também pode ser resolvido somando-se, simplesmente, as duas soluções obtidas anteriormente. Para mostrar que isso é verdade, seja $v(x, t)$ a solução do problema (1), (3), (9), e seja $w(x, t)$ a solução do problema (1), (3), (31). Então $v(x, t)$ é dada pelas Eqs. (20) e (22), e $w(x, t)$ é dada pelas Eqs. (34) e (36). Seja $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$; que problema é satisfeito por $u(x, t)$? Em primeiro lugar, note que

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = (a^2v_{xx} - v_{tt}) + (a^2w_{xx} - w_{tt}) = 0 + 0 = 0, \tag{38}$$

de modo que $u(x, t)$ satisfaz a equação de onda (1). A seguir, temos

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0, \qquad u(L,t) = v(L,t) + w(L,t) = 0 + 0 = 0; \tag{39}$$

logo, $u(x, t)$ também satisfaz as condições de contorno (3). Finalmente, temos

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x) \tag{40}$$

e

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x). \tag{41}$$

Portanto, $u(x, t)$ satisfaz as condições iniciais gerais (37).

Podemos enunciar, de outra maneira, os resultados que acabamos de obter. Para resolver a equação de onda com as condições iniciais gerais (37), você pode resolver os problemas um pouco mais simples com as condições iniciais (9) e (31), respectivamente, e depois somar essas duas soluções. Esse é outro uso do princípio de superposição.

PROBLEMAS

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, de uma posição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Em cada um dos problemas de 1 a 4, faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x, t)$ para a posição inicial $f(x)$ dada.
(b) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.
(c) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$

2017 2. $f(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$ $L = 1\,m$, $v = 1\,m/s$.

2015 3. $f(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio, com velocidade inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Em cada um dos problemas de 5 a 8, faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x, t)$ para a função $g(x)$ dada.
(b) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.
(c) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

5. $g(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$

2017 — 6. $g(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$ — $L = 1^m$, $v = 1 m/s$

2015 — 7. $g(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

2017 rec — 8. $g(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

9. Se uma corda elástica tiver uma extremidade solta, a condição de contorno a ser satisfeita aí será $u_x = 0$. Encontre o deslocamento $u(x, t)$ de uma corda elástica de comprimento L, fixa em $x = 0$ e solta em $x = L$, colocada em movimento, sem velocidade inicial, a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, em que f é uma função dada.
Sugestão: Mostre que as soluções fundamentais para esse problema satisfazendo todas as condições, exceto a condição inicial não homogênea, são

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen} \lambda_n x \cos \lambda_n a t,$$

em que $\lambda_n = (2n-1)\pi/(2L)$, $n = 1, 2, \ldots$. Compare esse problema com o Problema 15 da Seção 10.6; preste atenção especial à extensão do dado inicial fora do intervalo $[0, L]$.

10. Considere uma corda elástica de comprimento L. A extremidade $x = 0$ é mantida fixa, enquanto a extremidade $x = L$ está solta; assim, as condições de contorno são $u(0, t) = 0$ e $u_x(L, t) = 0$. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule o deslocamento $u(x, t)$.
(b) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t. Preste atenção especial aos valores de t entre 3 e 7. Note como a perturbação inicial é refletida em cada extremidade da corda.
(c) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
(e) Descreva o movimento da corda em algumas frases.

11. Suponha que a corda no Problema 10 começa a partir da posição inicial $f(x) = 8x(L - x^2)/L^3$. Siga as instruções no Problema 10 para esse novo problema.

12. Podem ser introduzidas variáveis adimensionais na equação de onda $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ da seguinte maneira:
(a) Seja $s = x/L$ e mostre que a equação de onda fica

$$a^2 u_{ss} = L^2 u_{tt}.$$

(b) Mostre que L/a tem dimensão de tempo e, portanto, pode ser usada como a unidade na escala de tempo. Seja então $\tau = at/L$ e mostre que a equação de onda se reduz a

$$u_{ss} = u_{\tau\tau}.$$

Os Problemas 13 e 14 indicam a forma da solução geral da equação de onda e o significado físico da constante a.

13. (a) Mostre que a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

pode ser reduzida à forma $u_{\xi\eta} = 0$ pela mudança de variáveis $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.
(b) Mostre que $u(x, t)$ pode ser escrita como

$$u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at),$$

em que ϕ e ψ são funções arbitrárias.

14. (a) Faça o gráfico de $\phi(x - at)$ para $t = 0$, $1/a$, $2/a$ e t_0/a se $\phi(s) = \operatorname{sen} s$. Note que, para qualquer $t \neq 0$, o gráfico de $y = \phi(x - at)$ é igual ao de $y = \phi(x)$ quando $t = 0$, só que deslocado uma distância at no sentido positivo do eixo dos x. Logo, a representa a velocidade na qual uma perturbação move-se ao longo da corda.
(b) Qual é a interpretação de $\phi(x + at)$?

15. Um fio de aço com 5 pés (em torno de 1,5 m) é esticado por uma tensão de 50 lb (em torno de 222 newtons). O fio tem densidade de massa de 0,026 lb/pé (em torno de 0,034 kg/m).
(a) Encontre a velocidade de propagação das ondas transversas no fio.
(b) Encontre as frequências naturais de vibração.
(c) Se for aumentada a tensão no fio, como irão variar as frequências naturais? Os modos naturais também mudam?
16. Considere a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que ϕ e ψ têm que satisfazer

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x),$$
$$-\phi'(x) + \psi'(x) = 0.$$

(b) Resolva as equações do item (a) para ϕ e ψ, mostrando, assim, que

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right].$$

Essa forma da solução foi obtida por D'Alembert em 1746.
Sugestão: Note que a equação $\psi'(x) = \phi'(x)$ pode ser resolvida escolhendo $\psi(x) = \phi(x) + c$.
(c) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que

$$f(x-at) = \begin{cases} 2, & -1 + at < x < 1 + at, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine também $f(x + at)$.
(d) Esboce o gráfico da solução encontrada no item (b) em $t = 0$, $t = 1/2a$, $t = 1/a$ e $t = 2/a$, obtendo os resultados ilustrados na Figura 10.7.7. Note que um deslocamento inicial produz duas ondas movendo-se em sentidos opostos e afastando-se da localização inicial; cada onda consiste em metade do deslocamento inicial.
17. Considere a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que

$$\phi(x) + \psi(x) = 0,$$
$$-a\phi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$

(b) Use a primeira das equações no item (a) para mostrar que $\psi'(x) = -\phi'(x)$. Depois use a segunda equação para mostrar que $-2a\phi'(x) = g(x)$ e, portanto, que

$$\phi(x) = -\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + \phi(x_0),$$

em que x_0 é arbitrário. Finalmente, determine $\psi(x)$.
(c) Mostre que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

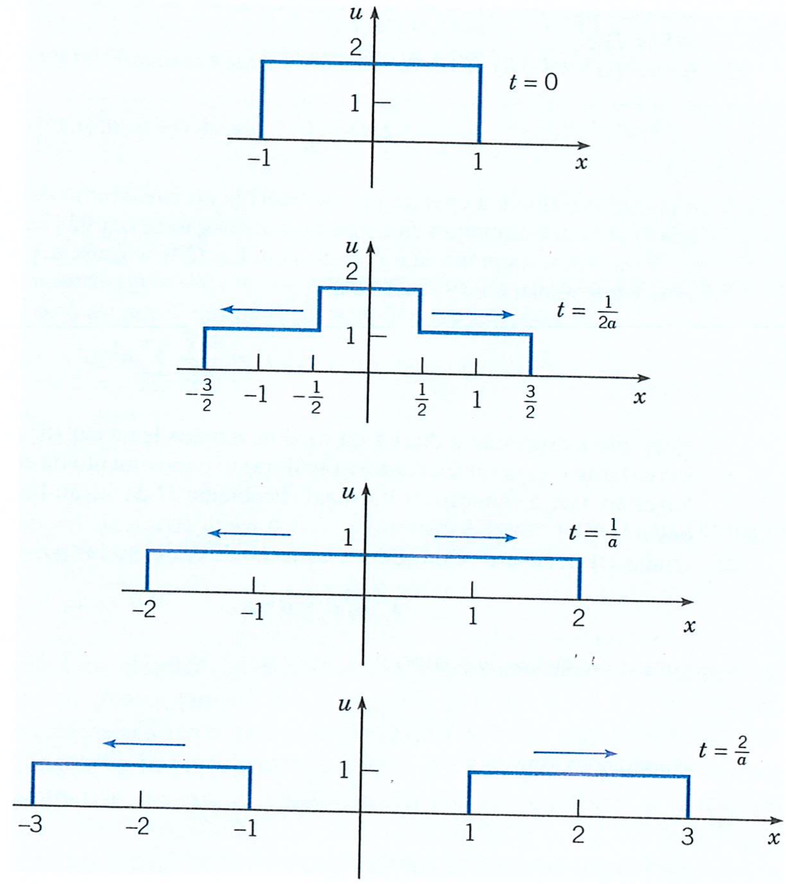

FIGURA 10.7.7 Propagação da perturbação inicial em um meio unidimensional infinito.

18. Combinando os resultados dos Problemas 16 e 17, mostre que a solução do problema

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

Os Problemas 19 e 20 indicam como é possível mostrar que a solução formal (20), (22) das Eqs. (1), (3) e (9) é, de fato, a solução desse problema.

19. Usando a identidade trigonométrica sen A cos B = ½[sen$(A + B)$ + sen$(A - B)$], mostre que a solução (20) do problema formado pelas Eqs. (1), (3) e (9) pode ser colocada na forma (28).
20. Seja $h(\xi)$ o deslocamento inicial em $[0, L]$ estendido a $(-L, 0)$ como uma função ímpar e estendido ao resto da reta como uma função periódica de período $2L$. Supondo a continuidade de h e suas derivadas até segunda ordem, mostre por diferenciação direta que $u(x, t)$ dada pela Eq. (28) satisfaz a equação de onda (1) e as condições iniciais (9). Note, também, que, como a Eq. (20) satisfaz claramente as condições de contorno (3), o mesmo é verdade para a Eq. (28). Comparando a Eq. (28) com a solução do problema correspondente para a corda infinita (Problema 16), vemos que eles têm a mesma forma, desde que os dados iniciais para a corda finita, definidos, originalmente, apenas no intervalo $[0, L]$, sejam estendidos da maneira indicada para todo o eixo dos x. Se isso for feito, a solução para a corda infinita também é aplicável para a corda finita.
21. O movimento de uma membrana circular elástica, como a membrana de um tambor, é determinado pela equação de onda bidimensional em coordenadas polares

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

22. A energia total $E(t)$ da corda vibrante é dada em função do tempo por

$$E(t) = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2}\rho u_t^2(x,t) + \tfrac{1}{2}Tu_x^2(x,t)\right] dx; \qquad \text{(i)}$$

o primeiro termo é a energia cinética devida ao movimento da corda, e o segundo é a energia potencial criada pelo deslocamento da corda de sua posição de equilíbrio.

Para o deslocamento $u(x, t)$ dado pela Eq. (20) — ou seja, para a solução do problema da corda com velocidade inicial nula — mostre que

$$E(t) = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^2. \qquad \text{(ii)}$$

Note que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii) não depende de t. Logo, a energia total E é constante e, portanto, é *conservada* durante o movimento da corda.
Sugestão: Use a equação de Parseval (Problema 37 da Seção 10.4 e Problema 17 da Seção 10.3) e lembre que $a^2 = T/\rho$.

23. **Ondas Dispersivas.** Considere a equação de onda modificada

$$a^{-2}u_{tt} + \gamma^2 u = u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \qquad \text{(i)}$$

com as condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \qquad \text{(ii)}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L. \qquad \text{(iii)}$$

(a) Mostre que a solução pode ser escrita como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2}\; at\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

em que

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

(b) Usando identidades trigonométricas, escreva a solução na forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x + a_n t) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x - a_n t)\right].$$

Determine a_n, a velocidade de propagação da onda.
(c) Observe que a_n, encontrado no item (b), depende de n. Isso significa que componentes com comprimentos de onda diferentes (ou frequências) se propagam com velocidades diferentes, resultando em uma distorção da forma original da onda com o passar do tempo. Esse fenômeno é chamado de **dispersão**. Encontre condições sob as quais a_n não depende de n — ou seja, não há dispersão.

24. Considere a situação no Problema 23 com $a^2 = 1$, $L = 10$ e

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & 4 \le x \le 5, \\ 6 - x, & 5 \le x \le 6, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

(a) Determine os coeficientes c_n na solução do Problema 23(a).
(b) Faça o gráfico de

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10} \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 10,$$

escolhendo N suficientemente grande de modo que o gráfico mostre precisamente o gráfico de $f(x)$. Use esse valor de N para os outros gráficos nesse problema.

(c) Seja $\gamma = 0$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 60$.
(d) Seja $\gamma = 1/8$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 20, 40, 60$.
(e) Seja $\gamma = 1/4$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 20, 40, 60$.

10.8 Equação de Laplace

Uma das equações diferenciais parciais mais importantes que ocorrem em matemática aplicada está associada ao nome de Laplace:[11] em duas dimensões, a equação é

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

e, em três dimensões,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2}$$

Por exemplo, em um problema de calor a duas dimensões espaciais, a temperatura $u(x, y, t)$ tem que satisfazer a equação diferencial

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{3}$$

em que α^2 é a difusividade térmica. Se existir um estado estacionário, u só depende de x e y, e a derivada em relação a t desaparece; nesse caso, a Eq. (3) se reduz à Eq. (1). Analogamente, para a solução no estado estacionário do problema de condução de calor tridimensional, a temperatura tem que satisfazer a equação de Laplace tridimensional. As Eqs. (1) e (2) também ocorrem em outros ramos da física matemática. Na consideração de campos eletrostáticos, a função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas tem que satisfazer a Eq. (1) ou a Eq. (2), dependendo do número de dimensões espaciais envolvidas. Analogamente, a função potencial de uma partícula livre no espaço, sob a ação apenas de forças gravitacionais, satisfaz a mesma equação. Por essa razão, a equação de Laplace também é conhecida como a **equação do potencial**. Outro exemplo aparece no estudo do movimento irrotacional estado estacionário (independente do tempo) de um fluido bidimensional incompressível não viscoso. Este estudo está centrado em duas funções, conhecidas como função potencial velocidade e função de fluxo, ambas satisfazendo a Eq. (1). Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da função de deformação, que também satisfaz a Eq. (1).

Como não existe dependência no tempo nos problemas mencionados acima, não existem condições iniciais a serem satisfeitas pelas soluções da Eq. (1) ou da Eq. (2). Elas precisam, no entanto, satisfazer certas condições de contorno em uma curva ou superfície que marca a fronteira da região na qual a equação diferencial vai ser resolvida. Como a equação de Laplace é de segunda ordem, poderia parecer razoável esperar que fossem necessárias duas condições de contorno para determinar completamente a solução. Isso não ocorre, no entanto. Lembre-se de que, no problema de condução de calor para a barra finita (Seções 10.5 e 10.6), foi necessário dar uma condição em cada extremidade da barra, ou seja, *uma condição em cada ponto da fronteira*. Generalizando essa observação para problemas multidimensionais, é natural então dar uma condição sobre a função u em cada ponto da fronteira da região onde procuramos uma solução para a Eq. (1) ou (2). A condição de contorno mais comum ocorre quando é especificado o valor de u em cada ponto na fronteira; em termos do problema de condução de calor, isso corresponde a descrever a temperatura na fronteira. Em alguns problemas, é dado o valor da derivada, ou taxa de variação, de u na direção normal à fronteira; a condição de fronteira para um corpo isolado termicamente, por exemplo, é desse tipo. É possível a ocorrência de condições de contorno mais complicadas; por exemplo, u pode ser especificado em parte da fronteira e sua derivada normal especificada no restante. O problema de encontrar uma solução da equação de Laplace com valores dados na fronteira é conhecido como um **problema de**

[11]A equação de Laplace recebeu este nome em honra a Pierre-Simon de Laplace, que, a partir de 1782, estudou extensivamente suas soluções ao investigar a atração gravitacional de corpos arbitrários no espaço. No entanto, a equação apareceu pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752.