Os problemas dessa seção exploram, até certo ponto, o efeito de condições de contorno diferentes sobre autovalores e autofunções. Uma discussão mais sistemática de problema de valores de contorno com fronteira de dois pontos está no Capítulo 11.

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 13, resolva o problema de valores de contorno dado ou mostre que não tem solução.

1. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$
2. $y'' + 2y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$
3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$
4. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(L) = 0$
5. $y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
6. $y'' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
7. $y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
8. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

2017 rec. • 9. $y'' + 4y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

10. $y'' + 3y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
11. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = 1$
12. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$

2019 ∘ 13. $x^2y'' + 5xy' + (4 + \pi^2)y = \ln x, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$

Em cada um dos problemas de 14 a 20, encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno dado. Suponha que todos os autovalores são reais.

14. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
15. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

2017 rec. • 16. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

17. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

∘ 19. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$ 2019

2015 • 20. $x^2y'' - xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(L) = 0, \quad L > 1$

21. O fluxo laminar de um fluido incompressível viscoso em um tubo longo com seção reta circular, simétrico em relação ao eixo e com gradiente de pressão axial constante, é conhecido como fluxo de Poiseuille.[1] A velocidade axial w é uma função só da variável radial r e satisfaz o problema de valores de contorno

$$w'' + \frac{1}{r}w' = -\frac{G}{\mu}, \qquad w(R) = 0, \quad w(r) \qquad \text{limitada para } 0 < r < R,$$

em que R é o raio do tubo, G é o gradiente de pressão e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.

(a) Encontre o perfil de velocidade $w(r)$.

(b) Integrando $w(r)$ em uma seção circular, mostre que a taxa total de fluxo Q é dada por

$$Q = \pi R^4 G/8\mu.$$

Como Q, R e G podem ser medidos, esse resultado fornece um modo prático de determinar a viscosidade μ.

(c) Suponha que R está reduzido a ¾ de seu valor original. Qual é a redução correspondente em Q? Esse resultado tem implicações para o fluxo de sangue pelas artérias contendo uma placa.

22. Considere uma barra metálica horizontal de comprimento L sujeita a uma carga vertical $f(x)$ por unidade de comprimento. O deslocamento vertical resultante $y(x)$ na barra satisfaz a equação diferencial

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f(x),$$

em que E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção reta em torno do eixo perpendicular ao plano xy passando pelo centroide. Suponha que $f(x)/EI$ é uma constante k. Para cada uma das condições de contorno dadas a seguir, resolva para o deslocamento $y(x)$ e faça o gráfico de y em função de x, no caso em que $L = 1$ e $k = -1$.

(a) Simplesmente apoiado nas duas extremidades: $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$.

(b) Preso nas duas extremidades: $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$.

(c) Preso em $x = 0$, livre em $x = L$: $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.

23. Nesse problema, vamos esboçar uma demonstração de que os autovalores do problema de valores de contorno (18), (19) são reais.

(a) Escreva a solução da Eq. (18) como $y = k_1\exp(i\mu x) + k_2\exp(-i\mu x)$, em que $\lambda = \mu^2$, e imponha as condições de contorno (19). Mostre que existem soluções não triviais se, e somente se,

$$\exp(i\mu\pi) - \exp(-i\mu\pi) = 0. \qquad \text{(i)}$$

[1]Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) foi um médico francês que foi treinado também em matemática e em física. Ele estava particularmente interessado no fluxo de sangue e publicou seu primeiro artigo sobre o assunto em 1840.

(b) Seja $\mu = \nu + i\sigma$ e use a relação de Euler $\exp(i\nu\pi) = \cos(\nu\pi) + i\,\text{sen}(\nu\pi)$ para determinar as partes real e imaginária da Eq. (i).
(c) Considerando as equações encontradas no item (b), mostre que ν é um inteiro e que $\sigma = 0$. Em consequência, μ é real e λ também.

10.2 Séries de Fourier

Mais tarde neste capítulo você vai descobrir como resolver muitos problemas importantes envolvendo equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função dada como uma série infinita de senos e/ou cossenos. Nessa e nas duas próximas seções, vamos explicar em detalhe como isso pode ser feito. Essas séries trigonométricas são chamadas de **séries de Fourier**;[2] elas são análogas às séries de Taylor no sentido de que ambos os tipos de séries fornecem um modo de expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares familiares.

Vamos começar com uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \,\text{sen}\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{1}$$

No conjunto de pontos em que a série (1) converge, ela define uma função f cujo valor em cada ponto é a soma da série para aquele valor de x. Nesse caso, dizemos que a série (1) é a série de Fourier de f. Nosso objetivo imediato é determinar quais as funções que podem ser representadas como uma soma de uma série de Fourier e encontrar maneiras de calcular os coeficientes na série correspondente a uma função dada. O primeiro termo na série (1) é escrito como $a_0/2$, em vez de a_0, para simplificar uma fórmula para os coeficientes que deduziremos mais adiante. Além de sua associação ao método de separação de variáveis e às equações diferenciais parciais, as séries de Fourier são úteis também de muitas outras maneiras, como na análise de sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças externas periódicas.

Periodicidade das Funções Seno e Cosseno. Para discutir as séries de Fourier, é necessário desenvolver certas propriedades das funções trigonométricas $\text{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, em que m é um inteiro positivo. A primeira é seu caráter periódico. Uma função f é dita **periódica** com período $T > 0$ se o domínio de f contém $x + T$ sempre que contiver x, e se

$$f(x+T) = f(x) \tag{2}$$

para todo valor de x. A Figura 10.2.1 mostra um exemplo de uma função periódica. Segue imediatamente, da definição, que, se T é um período de f, então $2T$ também o é como, de fato, qualquer múltiplo inteiro de T. O menor valor de T para o qual a Eq. (2) é válida é chamado de **período fundamental** de f. Uma função constante pode ser considerada periódica com qualquer período, mas não tem período fundamental.

Se f e g são duas funções periódicas com período comum T, então seu produto fg e qualquer combinação linear $c_1 f + c_2 g$ também são periódicas com período T. Para provar essa última afirmação, seja $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$; então, para qualquer x,

$$F(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x). \tag{3}$$

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi preso duas vezes durante a Revolução Francesa, depois serviu como conselheiro científico do exército de Napoleão no Egito e foi governador da província de Isère (Grenoble), de 1801 a 1815. Foi o primeiro a fazer uso sistemático dessas séries, embora em uma investigação não completamente rigorosa, em seus artigos de 1807 e 1811 sobre a condução de calor. Os artigos não foram publicados devido a objeções dos matemáticos que os julgaram, principalmente Lagrange. Embora a afirmação de generalidade de Fourier seja forte demais, seus resultados inspiraram um fluxo de pesquisa importante, que continua até hoje. Veja os livros de Grattan-Guinness ou de Carslaw (Introdução Histórica) para uma história detalhada das séries de Fourier.

Em cada um dos problemas de 1 a 6, determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Se puder, encontre as equações.

1. $xu_{xx} + u_t = 0$ 24
2. $tu_{xx} + xu_t = 0$ 25
3. $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$ 26
4. $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$ 27
5. $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$ 28
6. $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$ 29
7. Encontre a solução do problema de condução de calor

30

$$100u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \operatorname{sen} 2\pi x - \operatorname{sen} 5\pi x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

31

8. Encontre a solução do problema de condução de calor

$$u_{xx} = 4u_t, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 2\operatorname{sen}(\pi x/2) - \operatorname{sen} \pi x + 4\operatorname{sen} 2\pi x, \qquad 0 \le x \le 2.$$

Considere a condução de calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura 0°C para todo $t > 0$. Em cada um dos problemas de 9 a 12, encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição de temperatura inicial na barra for igual à função dada. Suponha que $\alpha^2 = 1$.

9. $u(x,0) = 50, \quad 0 < x < 40$ 32
10. $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 20, \\ 40 - x, & 20 \le x \le 40 \end{cases}$ 33
11. $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 10, \\ 50, & 10 \le x \le 30, \\ 0, & 30 < x \le 40 \end{cases}$ 34
12. $u(x,0) = x, \quad 0 < x < 40$ 35
13. Considere novamente a barra do Problema 9. Para $t = 5$ e $x = 20$, determine quantos termos são necessários para encontrar a solução correta até três casas decimais. Um modo razoável de fazer isso é encontrar n tal que a inclusão de mais um termo não muda as três primeiras casas decimais de $u(20, 5)$. Repita para $t = 20$ e $t = 80$. Chegue a alguma conclusão sobre a velocidade de convergência da série que representa $u(x,t)$. 36
14. Para a barra no Problema 19:
    (a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200. Coloque todos os gráficos no mesmo conjunto de eixos, obtendo, assim, uma visão de como a distribuição de temperatura varia com o tempo. 37
    (b) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 5, 10, 15, 20$.
    (c) Desenhe um gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
    (d) Quanto tempo vai levar para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?
15. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 10. 38
16. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 11. 39 40
17. Para a barra no Problema 12:
    (a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200.
    (b) Para cada valor de t usado no item (a), estime o valor de x para o qual a temperatura é a maior de todas. Faça o gráfico desses valores em função de t para ver como a posição do ponto mais quente na barra muda com o tempo.
    (c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 10, 20$ e 30.
    (d) Desenhe o gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
    (e) Quanto tempo vai levar para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?
18. Considere uma barra metálica com 20 cm de comprimento, aquecida a uma temperatura uniforme de 100°C. Suponha que, em $t = 0$, as extremidades da barra estão mergulhadas em um banho gelado a 0°C e depois mantidas a essa temperatura, mas não é permitido escapar calor pela superfície lateral. Encontre uma expressão para a temperatura em qualquer ponto da barra em um instante posterior. Determine a temperatura no centro da barra no instante $t = 30$ s se a barra for feita de (a) prata, (b) alumínio, (c) ferro fundido. 41

42

20. Ao resolver equações diferenciais, quase sempre os cálculos podem ser simplificados por meio da utilização de **variáveis adimensionais**.
(a) Mostre que, se introduzirmos a variável adimensional $\xi = x/L$, a equação do calor fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$

(b) Como L^2/α^2 tem unidades de tempo, é conveniente usar essa quantidade para definir uma variável adimensional $\tau = (\alpha^2/L^2)t$. Mostre que, então, a equação do calor se reduz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad 0 < \xi < 1, \qquad \tau > 0.$$

43

21. Considere a equação

$$av_{xx} - bv_t + cv = 0, \tag{i}$$

em que a, b e c são constantes.
(a) Seja $v(x, t) = e^{\delta t}w(x, t)$, em que δ é constante, e encontre a equação diferencial parcial correspondente para w.
(b) Se $b \neq 0$, mostre que δ pode ser escolhido de modo que a equação diferencial parcial encontrada no item (a) não tem termo em w. Assim, através de uma mudança da variável dependente, é possível reduzir a Eq. (i) à equação do calor.

44

22. A equação do calor em duas dimensões espaciais é

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Supondo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$.

45

23. A equação do calor em duas dimensões espaciais pode ser expressa, em coordenadas polares, na forma

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}] = u_t.$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

10.6 Outros Problemas de Condução de Calor

Na Seção 10.5, consideramos o problema que consiste na equação do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

nas condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

e na condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{3}$$

Vimos que a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{4}$$

em que os coeficientes c_n são iguais aos da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$