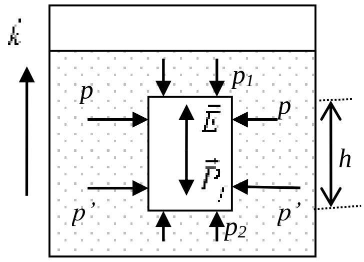
# Aulas fluidos

Aula do dia 6/06/2019

**Ppio de Arquimedes**

Consideremos um corpo sólido, cilíndrico circular de área de base A e altura h, totalmente imerso em um fluido em equilíbrio cuja densidade é $\rho$. As forças na lateral do cilindro se equilibram por pares, entretanto, a pressão na base inferior $p_2$ exercida pelo fluido é maior que a da base superior $p_1$. Vimos que:




$$p_2 - p_1 = \rho g h .$$

Devemos considerar também o peso do próprio corpo.

Estando o corpo submerso, em equilíbrio, no seno de um liquido deve haver uma força exercida pelo fluido sobre o cilindro, vertical e para cima, de maneira que:

$$E = p_2 A_2 - p_1 A_1 = \rho g h A = \rho h A g = \rho V g = mg ,$$

onde $V = hA$ é o volume do cilindro e $m = \rho V$ é a massa do fluido deslocada pelo cilindro.

A força $\vec{E}$ , chamada *empuxo, ou força de sustentação,* é dada por:

$\vec{E} = mg\vec{k} = -\vec{P}_f$ onde $\vec{P}_f$ é o peso da porção do fluido deslocada.

$\therefore E = m_{agua} g$ $\quad E = \rho_{agua} V_{agua} g$ $\quad$ como $\quad V_{agua} = V_{corpo}$

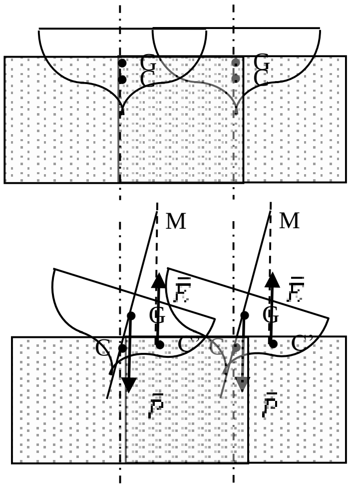
Ao mesmo resultado se chega pelo princípio de solidificação (Stevin-1586). Supondo que um corpo sólido fosse completamente substituído pelo fluido, o volume do líquido que ele deslocou estaria em equilíbrio com o resto do fluido. Logo, a resultante das forças superficiais que atuam sobre a superfície S desse volume deve ter a mesma intensidade e sentido contrário a resultante das forças volumétricas que atuam sobre ele, ou seja, ao peso da porção de fluido deslocada.

O resultado não depende da forma do sólido imerso. As forças do fluido substituído e $\vec{P}_f$ se equilibram. O empuxo, $\vec{E}$ esta aplicado no ponto C da porção de fluido substituído, concluímos que, sobre o sólido está aplicado no ponto C, que se chama centro de empuxo. Da mesma forma, o peso P está aplicado no centro de gravidade do sólido, G. Se a densidade média do sólido for menor que a do liquido, ele não ficaria totalmente imerso, porque isso daria $|\vec{E}| > |\vec{P}|$; assim, ele ficará flutuando, com o empuxo devido à porção imersa equilibrando o peso do sólido.

O Ppio de Arquimedes diz: *Um corpo total ou parcialmente imerso num fluido recebe do mesmo um empuxo com igual módulo e contrário ao peso da porção do fluido deslocada, e aplicado ao centro de empuxo e de gravidade, respectivamente. Um corpo total ou parcialmente imerso num fluido sofre um empuxo que é igual ao peso do fluido deslocado.*

*Um corpo total ou parcialmente imerso num fluido é sustentado por uma força cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo*

**Equilíbrio dos corpos flutuantes**




Um corpo que flutua em equilíbrio deve satisfazer que não só a resultante, soma do empuxo $\vec{E}$ e o peso $\vec{P}$ (do corpo) tem de ser nula, mas também o torque resultante deve ser nulo, o que exige que o centro do empuxo C e o centro de gravidade G do corpo estejam sobre a mesma vertical.

Mas essas condições não garantem a estabilidade do equilíbrio porque quando o corpo gira, a porção do fluido deslocada muda de forma e o novo centro de empuxo é C'.

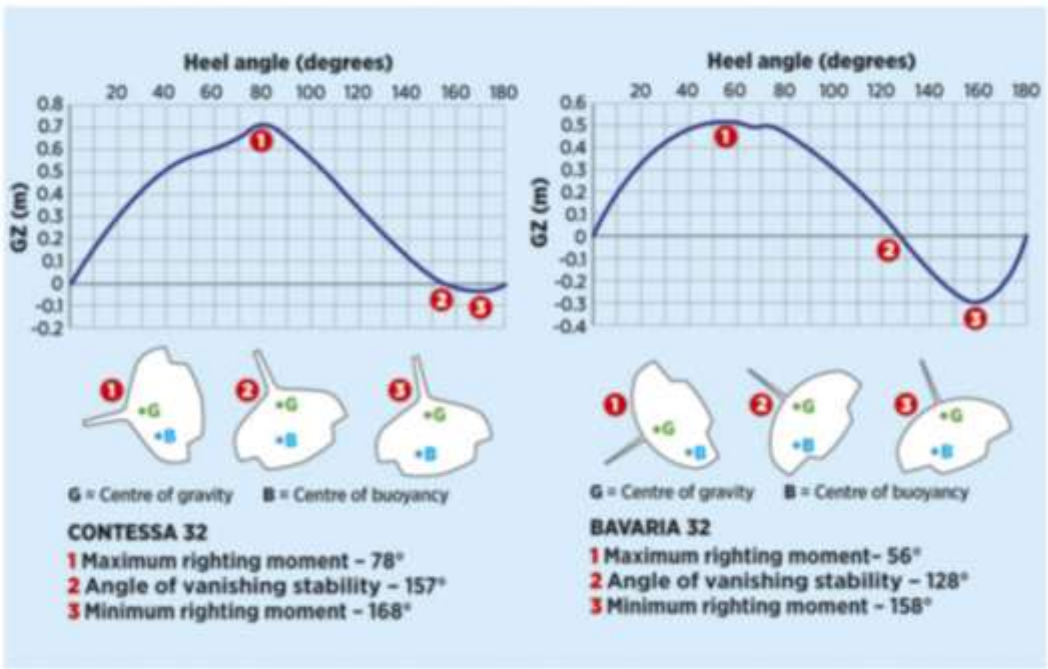
A vertical que passa por C' corta o eixo CG no ponto M que, para pequenas inclinações resulta ser praticamente independente do ângulo de inclinação; M é chamado Metacentro.

Se M estiver acima de G, o torque gerado por $\vec{E}'$ e $\vec{P}$ tende a restabelecer a posição de equilíbrio, e este é estável. Se M estiver abaixo de G, o torque tende a aumentar ainda mais o desvio e o equilíbrio é instável.

Todos los barcos de vela monocasco (es decir, que no sea un catamarán) están diseñados para ser más estables boca arriba que boca abajo. La idea es que si hay una ola suficientemente grande para volcar el barco y ponerlo boca abajo, seguro habrá alguna ola más pequeña que lo vuelva a poner boca arriba ya que es menos estable boca abajo. Esa característica se puede medir y graficar en lo que se llama la "curva de brazo adrizante" (en inglés righting moment curve). (Nota: adrizar quiere decir en lenguaje náutico poner un barco boca arriba y con el mástil vertical). El Contessa 32 (mi barco) es el modelo de barco que tiene la curva de brazo adrizante con la menor área negativa, es decir, es el barco menos estable que existe boca abajo. Te mando la gráfica del Contessa 32 comparada con la de un Bavaria (un modelo de producción en masa). El eje horizontal indica los grados de inclinación del mástil a partir de la posición de equilibrio (0 grados), es decir, con el mástil apuntando al cielo.

Te mando también el link de dónde he sacado la gráfica. Es un artículo en el que discuten de una forma llana todo esto sobre el brazo adrizante GZ (se mide en metros): https://www.yachtingmonthly.com/yacht-reviews/understand-boat-statistics-30154

4 The Angle of Vanishing Stability




Here we compare the AVS of the traditional, well-ballasted Contessa 32, to the more modern, beamy Bavaria 32

Quando analisamos o princípio de Arquimedes, podemos distinguir inicialmente dois exemplos:

i) Em um corpo totalmente submerso num fluido de densidade $\rho_f$, o empuxo para cima é dado por $E = w_f = \rho_f V_0 g$, onde $V_0$ é o volume do corpo.

Se o corpo tiver uma densidade $\rho_0$ o seu peso será: $W_0 = M_0 g = \rho_0 V_0 g$ e a resultante das forças verticais: $E - W_0 = (\rho_f - \rho_0) V_0 g$. Então, se a densidade do corpo for menor que a densidade do fluido, o objeto livre no fluido será acelerado para cima. Se a densidade do corpo for maior que a do fluido, então o corpo livre no fluido irá para o fundo.

ii) Um corpo é considerado flutuante quando se encontra em equilíbrio estático e flutuando no fluido, isto é o corpo encontra-se parcialmente imerso. Neste caso a força de flutuação para cima está equilibrada pelo peso do corpo, para baixo. Se V for o volume de fluido deslocado pelo corpo, então o empuxo é: E = W,

$$\rho_f V g = \rho_0 V_0 g \Rightarrow \rho_f V = \rho_0 V_0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{V}{V_0}$$

Em condições normais, a densidade média de um peixe é ligeiramente maior que a da água. Assim sendo, um peixe afundaria, se não tivesse mecanismos de ajuste da densidade. O peixe consegue este mecanismo pela regulação da bexiga natatória interna. Assim, pode manter o equilíbrio indiferente ao nadar em diversas profundidades. Será o mesmo mecanismo que é utilizado por aqueles peixes que migram do oceano para os rios e vice-versa?

A densidade relativa de um corpo é o quociente entre o peso do corpo no ar e o peso de um volume de água igual ao volume do corpo:

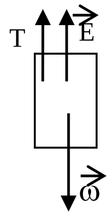
$$\text{densidade relativa} = \frac{\text{peso do corpo no ar}}{\text{peso de igual volume de agua}} = \frac{w_0}{w_{agua}}$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_f} = \frac{m_c g}{V_c}\frac{V_f}{m_f g} = \frac{w_c}{w_f}$$

Mas, pelo principio de Arquimedes, o peso do volume de água é o empuxo sobre o corpo submerso. Então a perda de peso que o corpo sofre ao ser pesado mergulhado na água é igual ao peso de igual volume de água:

$$\textbf{densidade relativa} = \frac{\textbf{peso do corpo no ar}}{\textbf{perda de peso quando imerso na agua}} = \frac{w_0}{w_{perdido}}$$

Do famoso exemplo da coroa, a densidade relativa do ouro é: $\rho_{ouro} = 19{,}3$.




Se uma coroa fosse feita de Au puro e pesasse no ar 8 N, o seu peso na água seria, estando o sistema em equilíbrio, do diagrama de corpo livre:

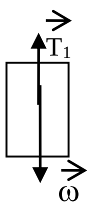
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{E} + \vec{T} + \vec{w} = 0 \Rightarrow E + T - w = 0 \quad (1)$$

Então, o peso da coroa na água é a diferença entre o peso no ar e o empuxo ocasionado pela água, $T = w - E$ , pela expressão acima:

$$\text{densidade relativa} = \frac{w_0}{w_{perdido}} \Rightarrow w_{perdido} = E = \frac{w_0}{\text{densidade relativa}} = \frac{8}{19{,}3} = 0{,}415 \text{ N}$$

Portanto o peso na água é: $T = w - E = 8 - 0{,}42 = 7{,}58$ N.

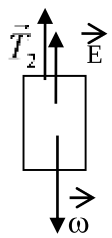
**9**: Um pedaço de Al está pendurado num fio e completamente imerso em um vaso com água. A massa do Al é 1 kg, e sua densidade $2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m$^3$. Calcular a tensão na corda antes e depois do Al ter sido imerso.




Da figura à esquerda, $T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg \qquad \therefore T_1 = 1 \cdot 9{,}8 = 9{,}8\,\textbf{N}$

Quando estiver imerso na água, do diagrama de corpo livre da figura à direita: $T_2 + E - mg = 0 \Rightarrow T_2 = mg - E$

Para calcular E, devemos em primeiro lugar calcular o volume dessa massa de Al, assim:




$$\rho_{Al} = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{massa}{\rho} = \frac{1}{2{,}7 \cdot 10^3} = 3{,}7 \cdot 10^{-4} \ \mathbf{m^3}$$

Como o empuxo é igual ao peso de igual volume de água deslocada, temos:

$$E = m_{agua} \cdot g = \rho_{agua} \cdot V_{Al} \cdot g = 1 \cdot 10^3 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}8 = 3{,}6 \text{ N}$$

Portanto: $T_2 = mg - E = 9{,}8 - 3{,}6 = 6{,}2$ N

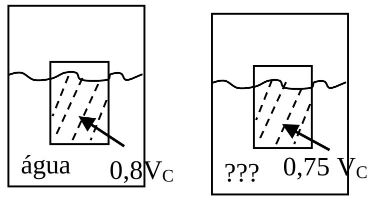
Desafio!: obtenha qual fração de um cubo de gelo flutua fora do nível da água em: a) água normal ($\rho_{agua}$ = 1 kg/m$^3$) e água salgada (agua salgada = 1,024 kg/m3). Sendo a densidade do gelo 0,92 g/cm$^3$. R: 8,3 % e 8,96%.

$$\left.\begin{array}{l} E = m_{agua}g = \rho_{agua}V_{agua}g \\ w_{gelo} = m_{gelo}.g = \rho_{gelo}V_{gelo}g \end{array}\right\} \rho_{agua}V_{agua} = \rho_{gelo}\cdot V_{gel} \text{ dado que } V_{agua} = V_{gelo\,baixo\,d'agua} \Rightarrow$$

$$V_{agua} = \frac{\rho_{gelo}}{\rho_{agua}}V_{gelo} = 0{,}92V_{gelo} \Rightarrow V_{for\,ad'agua} = 0{,}08V_{gelo}$$

$$V_{agua\,salgada} = \frac{\rho_{gelo}}{\rho_{agua\,salgada}}V_{gelo} = \frac{0{,}92}{1{,}024} = 0{,}898V_{gelo} \Rightarrow V_{fora\,d'agua\,salgada} = 0{,}10V_{gelo}$$

**10.** (Tipler Cap 13 E33) Um corpo flutua na água com 80% do seu volume imerso. O mesmo corpo quando colocado em um outro líquido, flutua com 75% do seu volume imerso. Determinar a densidade do corpo e a densidade relativa do líquido.



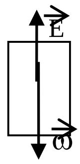

A força de empuxo $\vec{E}$, correspondente ao peso do volume de água deslocado, equivale à mesma porção da massa do objeto vezes a gravidade:

$$\left.\begin{array}{l} E = m_{agua}g = \rho_{agua}V_{agua}g \\ w_{corpo} = m_{corpo}.g \end{array}\right\} \rho_{agua}V_{agua} = \rho_{corpo}\cdot V_{corpo} \quad (1)$$

Assim: $\rho_{corpo} = \dfrac{\rho_{agua}V_{agua}}{V_{corpo}}$

Do gráfico, observamos que o volume de água deslocada é 0,8 $V_{corpo}$, no caso do mesmo estar submerso na água.

Assim, a expressão acima fica: $\rho_{corpo} = \dfrac{\rho_{agua}0{,}8V_{corpo}}{V_{corpo}} = 10^3.0{,}8 = 800\dfrac{kg}{m^3}$




Por (1) podemos deduzir que no caso do objeto estar submerso em outro fluido,

$$\rho_{agua}0{,}8V_{corpo} = \rho_{desconh}0{,}75V_{corpo} \Rightarrow$$

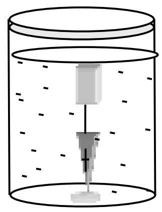
$$\rho_{desconh} = \frac{\rho_{agua}0{,}8V_{corpo}}{0{,}75V_{corpo}} = \frac{10^3\cdot 0{,}8}{0{,}75} = 1{,}1\cdot 10^3\frac{kg}{m^3}$$

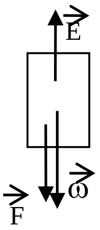
$$E = w_c$$

$$E' = w_c \Rightarrow E = E' \Rightarrow \rho_{agua}0{,}8V_{corpo} = \rho_{desconh}0{,}75V_{corpo} \Rightarrow$$

$$\rho_{desconh} = \frac{\rho_{agua}0{,}8V_{corpo}}{0{,}75V_{corpo}} = \frac{10^3\cdot 0{,}8}{0{,}75} = 1{,}1\cdot 10^3\frac{kg}{m^3}$$

**11. (Tipler Cap 13 E35)** Um pedaço de cortiça pesa 0,285 N no ar. Mantido sob a água, preso a um dinamômetro, como mostra a figura ao lado, provoca a leitura de 0,855 N. Calcular a densidade da cortiça.






O diagrama de corpo livre do pedaço dentro da água é:

$E = \omega + F$ , então o Empuxo, dentro da água é:

$E = 0{,}285 + 0{,}855 = 1{,}14N$

Sabemos que E equivale ao peso do volume de água deslocado, então:

$$E = \rho_{agua} V_{deslocado} g = 1{,}14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{deslocado} = \frac{E}{\rho_{agua}.g} = \frac{1{,}14}{\rho_{agua} g} = \frac{1{,}14}{10^3 \cdot 9{,}8} = 0{,}116 \cdot 10^{-3} m^3$$

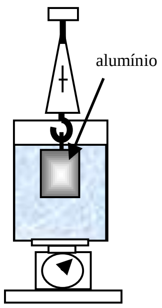
O peso do objeto é conhecido, e é dado por: $\omega = m_{cortiça}.g$.

Portanto é possível saber sua massa.

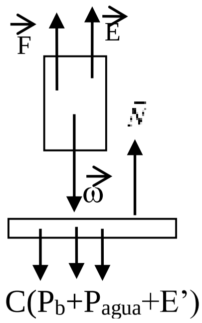
A razão entre a massa e o volume é a densidade:

$\rho_{cortiça} = \dfrac{m_{cortiça}}{V}$ , mas já calculamos na expressão anterior o seu volume, substituindo,

$$\rho_{cortiça} = \frac{\dfrac{\omega_{cortiça}}{g}}{V} = \frac{\dfrac{\omega_{cortiça}}{g}}{\dfrac{E}{\rho_{agua}.g}} = \frac{\omega_{cortiça} \cdot \rho_{agua}}{E} = \frac{\omega_{cortiça} \cdot \rho_{agua}}{(\omega_{cortiça} + F)} = \frac{0{,}285 \cdot 10^3}{(0{,}285 + 0{,}855)} = 0{,}25 \cdot 10^3 \, kg/m^3$$




**12. (Tipler Cap 13 E 40)** Um bécker, de 1 kg, tem 2 kg de água e está sobre o prato de uma balança. Um corpo de alumínio, com 2 kg e densidade relativa 2,70, pendurado num dinamômetro, é mergulhado na água, como mostra a figura ao lado. Determinar as leituras das duas balanças.




O diagrama de corpo livre do corpo de Al dentro da água é:

$$\vec{\omega}_{Al} + \vec{F} + \vec{E} = 0 \Rightarrow -mg + F + E = 0 \therefore F = mg - E \qquad \textbf{(1)}$$

Mas: $E = \rho_{agua} V_{deslocado} g$ **(2)**

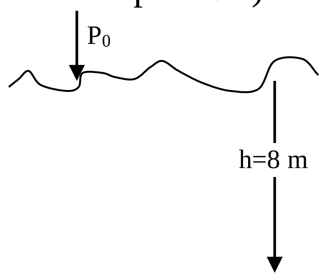
Dado que: $\rho_{AL} = \dfrac{m_{Al}}{V_{Al}} \Rightarrow V_{Al} = \dfrac{m_{Al}}{\rho_{AL}}$.

Por outro lado, o volume do corpo é o mesmo que o deslocado, assim, substituindo em (2):

$E = \rho_{agua} \dfrac{m_{Al}}{\rho_{Al}} g = \dfrac{10^3 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{2{,}7 \cdot 10^3} = 7{,}4$ N. A leitura do dinamômetro de cima é a força F, assim, de (1): $F = mg - E = 20 - 7{,}4 = 12{,}6$ N.

A leitura da balança é a compressão ocasionada pelo peso do Becker, peso da água e pela reação do empuxo, assim: $C = P_b + P_{agua} + E' = 10 + 20 + 7{,}4 = 37{,}4\,\mathrm{N}$

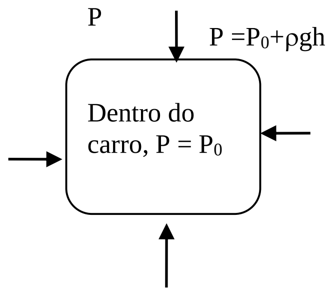
**14. (Tipler Cap 13 E 72)** Num acidente, um carro, com as janelas fechadas, cai num lago e afunda até a profundidade de 8 m. O ocupante do carro tenta abrir a porta mas não consegue, embora ela não pareça danificada. a) Se a área externa da porta do carro for 0,9 m$^2$, qual a força que a água do lago exerce sobre ela? b) Que força o ar confinado no interior do carro, à pressão atmosférica, exerce sobre a porta? c) Como o ocupante do carro deve agir a fim de abrir a porta e sair do carro acidentado?




A unidade de pressão no sistema internacional é N/m$^2$. 1 N/m$^2$ equivale a 1 Pa. Também são utilizadas o bar = $10^5$ N/m$^2$ =10 N/cm$^2$ = $10^3$ milibars, a atmosfera, 1 atm = 1,013 $\times 10^5$ N/m$^2$ e o mm de mercúrio = 1 mm HG = 1,316 $\times 10^{-3}$ atm.

A pressão é: $P = \dfrac{F}{A}$ (1).

No fundo do lago, a pressão da água é:




$$p = p_0 + \rho_{agua} g h_{agua} = 1{,}013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 8 = 1{,}813 \cdot 10^5 \,\frac{N}{m^2}$$

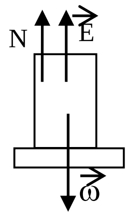
A pressão dentro do carro, é a pressão que tinha no momento do acidente, ou seja é a pressão atmosférica, $p_0 = 1{,}013.10^5$N/m$^2$.

a) de (1), a força da água na porta é: $F = P.A = 1{,}813 \cdot 10^5 .0{,}9 = 1.63 \cdot 10^5$ N

b) Então, como dentro do carro o ar está a pressão atmosférica, a força do ar dentro do carro é: $F = P.A = 1{,}013 \cdot 10^5 .0{,}9 = 9 \cdot 10^4$ N

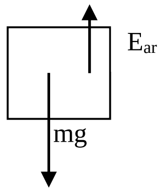
c) $\Delta F = 1{,}63 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^4 = 7{,}3 \cdot 10^5$ N. Para mim, deveria abrir levemente o vidro, já que o movimento deste é tangencial à força. Uma vez que a agua entra no carro, as pressões se igualem e só nesse momento conseguiria abrir a porta.

***Considerações respeito do empuxo no ar***




O peso que se mede de um corpo submerso num fluido, $F_s$ ou peso aparente, é a diferença entre o peso do corpo e o empuxo E, do diagrama de corpo livre: $N = F_s = w - E$

Se a densidade do corpo for $\rho$, o seu volume $V$, e a densidade do fluido $\rho_f$, dado que o peso do corpo é: $w = \rho.g.V$ e o empuxo: $E = \rho_f g.V$, o peso do corpo submerso, da formula acima:




$$N = F_s = w - E = \rho g V - \rho_f g V = gV(\rho - \rho_f) = \rho g V\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) = P\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right).$$

No caso de pesagens de precisão, os valores obtidos devem ser corrigidos pelo empuxo do ar ($\rho_{ar}$ = 1,29 kg/m$^3$). Exemplo com uma folinha de Au:

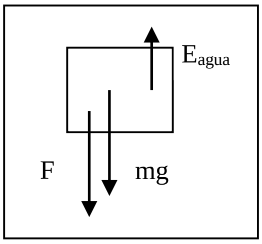
$N = W\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) = W\left(1 - \frac{1{,}29 \cdot 10^{-3}}{19{,}3}\right) = W(0{,}999933) \Rightarrow$ só quando estiver pesando massas da ordem de décima ou centésima de g o empuxo irá afetar a medida.

Do diagrama de corpo livre no ar:

$P_{aparente} = m\,g - E_{ar} = \rho_{corpo} V\,g - \rho_{ar} V\,g = gV(\rho_{corpo} - \rho_{ar}) = P'$ (1)

Do diagrama de corpo livre dentro d'água,

$F + mg = E_{agua}$ (2) → $F = gV(\rho_{agua} - \rho_{corpo})$ (3)




(1) ÷ (3) → $\dfrac{P'}{F} = \dfrac{\rho_{corpo} - \rho_{ar}}{\rho_{agua} - \rho_{corpo}} \rightarrow P'(\rho_{agua} - \rho_{corpo}) = F(\rho_{corpo} - \rho_{ar})$

isolando $\rho_{corpo}$ → $\rho_{corpo}(P' + F) = \rho_{agua} P' + \rho_{ar} F$ →

$$\rho_{corpo} = \frac{\rho_{agua} P' + \rho_{ar} F}{P' + F} \quad \text{(R1)}$$

Solução ignorando o empuxo do ar

P = m g = $\rho$ gV (1') (1')÷ (3) → $\dfrac{P}{F} = \dfrac{\rho}{\rho_{agua} - \rho}$ → $\rho = \rho_{agua} \dfrac{P}{P + F}$ (R2)

Esse resultado é mais fácil de perceber assim:

De (1') → m = P/g (4)

De (2) → $\rho_{agua}$ gV = P + F → $V = \dfrac{P + F}{\rho_{agua} g}$ (5)

A densidade é a razão m/V, que dá exatamente o resultado R2

Fatorando $\rho_{agua}$ em R1 e dividindo por P' →

$\rho_{corpo} = \rho_{agua} \dfrac{P' + \dfrac{\rho_{ar}}{\rho_{agua}} F}{P' + F} = \rho_{agua} \dfrac{P'}{P' + F} + \rho_{ar} \dfrac{F}{P' + F}$ que é o resultado (R1) mais um termo da ordem de grandeza da densidade do ar.

Usando P' = 0.285 e F = 0.855.... $R_1$: 0.25075~0.251 a comparar com $R_2$: 0.250

**13. (Tipler Cap 13 E 78)** Um pedaço de madeira, com 1,5 kg, flutua na água com 68 % do seu volume imerso. Um pedaço de chumbo é colocado cuidadosamente sobre a madeira, e observa-se que todo o seu volume fica imerso. Estimar a massa do pedaço de chumbo.

$\rho_{chumbo}$=11,4

$\rho_m V_m g = \rho_a (0{,}68 \cdot V_m) g \Rightarrow \rho_m = \rho_a 0{,}68$ a densidade relativa da madeira é 0,68

$$massa_{chumbo} g = 0{,}32 . V_{madeira} \rho_{agua} g$$

$$massa_{chumbo} = 0{,}32 \frac{massa\ madeira}{\rho_{madeira}} \rho_{agua}$$

$mas, \dfrac{\rho_{madeira}}{\rho_{agua}}$ é a densidade relativa da maderira

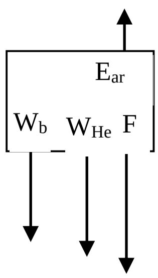
então, a massa de chumbo é $massa_{chumbo} = 0{,}32 \dfrac{1{,}5}{0{,}68} = 0{,}706 \approx 700g$

**15. (Tipler Cap 13 E 95)** Um balão está cheio com hélio, a pressão atmosférica. O invólucro do balão tem massa 2,8 kg e o volume do balão cheio é 16 m$^3$. Qual o maior peso que o balão pode erguer?

$\rho_{He}$= 0,1785; $\rho_{ar}$= 1,29

No enunciado não se menciona a massa do He.

Do diagrama de corpo livre no ar:




$$\vec{F} + \vec{\omega}_{balao} + \vec{\omega}_{He} + \vec{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F - (mg)_{balao} - (mg)_{He} + E = 0 \therefore$$

$$F = -(mg)_{balao} - (mg)_{He} + E$$

$F = P_{aparente\ He} = -m_{balao}\, g - \rho_{He} V_{He}\, g + E_{ar} =$

$= - m_{balao}\, g - \rho_{He} V_{He}\, g + \rho_{ar} V_{He}\, g =$

$= - m_{balao}\, g + g V_{He}(-\rho_{He} + \rho_{ar}) = P'$ (1)

P'= -2,8 9,8+16 . 9,8 (-0,1785 +1,29)= 146,84 N que equivalem a uma massa de 14,984 ~15 kg.

**16.** A diminuição relativa da pressão atmosférica P com a altura z é expressa pela seguinte equação: *dP/P = -Cdz* onde C é uma constante.

(a) Mostrar que $P(z)=P_0e^{(-Cz)}$ .

(b) Sabendo-se que a pressão atmosférica na altura 5,5 km é a metade da pressão no nível do mar, determinar a constante C.

a)A integral $\int \frac{dx}{x} = \ln\ x + C$ , então:

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -C\int_0^z dz \quad \Rightarrow \quad \ln P\Big|_{P_0}^{P} = -Cz\Big|_0^z$$

$$\therefore \ln P - \ln P_0 = -Cz \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{P}{P_0} = -Cz$$

Aplicando a função inversa: $\frac{P}{P_0} = e^{-Cz} \Rightarrow P = P_0e^{-Cz}$

b)Se para z=5,5 km $P=P_0/2$, substituindo na expressão anterior:

$$\frac{P_0}{2} = P_0e^{-Cz} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-Cz}$$

Aplicando o logaritmo à expressão acima:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -Cz \Rightarrow -\ln(2) = -Cz \Rightarrow C = \frac{\ln(2)}{z} = \frac{0,6931}{5,5 \cdot 10^3} = 1,26 \cdot 10^{-4}$$