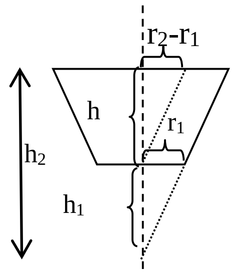
AULA DO DIA 3 DE JUNHO + PROBLEMAS ADICIONAIS

8. (Tipler Cap 13 E 21 modificado) O volume de um cone circular reto truncado, de altura h e raio da base r é $V = (\pi r_2^2 h_2/3) - (\pi r_1^2 h_1/3)$. Um vaso com forma de cone truncado, com 25 cm de altura, 15 cm e 20 cm de bases menor e maior, respectivamente, e apoiado na sua base menor, está cheio de água. a) Calcular o volume e o peso da água no vaso. b) Determinar a força exercida pela água sobre a base do cone. Explicar como esta força pode ser menor do que o peso da água.



a) Para poder usar a expressão do problema devemos saber qual e a altura do cone maior. Assim:

$$\frac{r_2 - r_1}{h} = \frac{r_1}{h_1} \Rightarrow h_1 = \frac{r_1 \cdot h}{r_2 - r_1} = \frac{0.075 \cdot 0.25}{0.1 - 0.075} = 0.75\,\mathbf{cm}$$

Usando a expressão do problema, e sendo h_2 a altura total do cone,

h_2 =(25+75) cm = 1 m

$$V = (\pi r_2^2 h_2/3) - (\pi r_1^2 h_1/3) = \pi\left[\left(\frac{0.1^2 \cdot 1}{3}\right) - \left(\frac{0.075^2 \cdot 0.75}{3}\right)\right] \approx 6.\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

A densidade da água é: $\rho = \dfrac{massa}{volume}$. Assim, o peso ($\omega$) da água:

$$peso = massa.g = \rho.volume.g = 10^3 \cdot 6\times 10^{-3}.10 = 60\ \mathrm{kg.m/s}^2 = 60\ \mathrm{N}$$

b) A pressão (p) é: $p = \dfrac{F}{A}$. Então, a força exercida pela água sobre a base do cone é:

$F = pA = \rho_{agua} g.h_{agua}.A_1 = 10^3\, 10.0{,}25.\pi.0{,}075^2 = 43\ \mathrm{N}$ (é o caso do recipiente A acima).

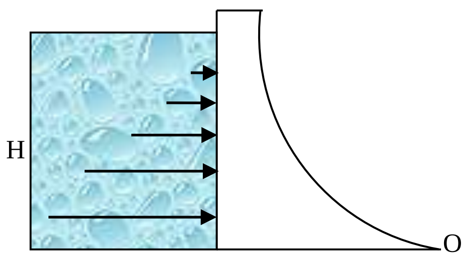
Se o vaso estiver apoiado sobre a superfície maior,

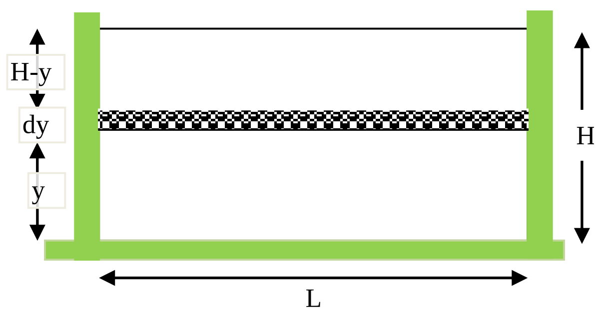
$F = pA = \rho_{agua} g.h_{agua}.A_2 = 10^3\, 10.0{,}25.\pi.0{,}1^2 = 77\ \mathrm{N}$ (é o caso do recipiente B acima).

Forças sobre Barragens

A água permanece a uma altura H atrás da face vertical (montante) de uma barragem, onde exerce uma força horizontal resultante, tendendo a fazer a barragem escorregar ao longo de suas fundações, e também um momento que tende a girá-la em torno do ponto O.

Para calcular a força horizontal de uma barragem de largura L, a pressão a uma altura ***y*** é:





$p = \rho g(H - y) = \rho gH - \rho gy$

a pressão atmosférica, P_0 , atua sobre a água e contra a outra face da barragem, assim, soma em ambos lados. A força sobre a faixa sombreada é:

$dF(y) = p\ dA = \rho g(H - y) \times L\ dy$

A força total:

$$F = \int dF = \int_0^H \rho gL(H - y)dy = \rho gLHy\Big|_0^H - \frac{\rho gLy^2}{2}\Big|_0^H = \rho gLH^2 - \frac{1}{2}\rho gLH^2 = \rho gLH^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho gLH^2$$

O torque da força *dF* em relação a um eixo passando por O é:

$d\tau = y\ dF = y\ \rho g(H - y)Ldy$

E o torque total:

$$\tau_{tot} = \int d\tau = \int_0^H \rho gL(H - y)y\ dy = \rho gL\int_0^H (Hy - y^2)dy = \rho gL\left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \rho gL\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right) = \frac{1}{6}\rho gLH^3$$

Se $\overline{H}$ fosse a altura acima de O na qual a força total F devesse ser aplicada para produzir este torque, então:

$$\tau_{tot} = F\overline{H} \Rightarrow = \frac{1}{6}\rho gLH^3 = \tfrac{1}{2}\rho gLH^2 \times \overline{H} \therefore \Rightarrow \overline{H} = \frac{1}{3}H$$

Assim, A linha de ação da força resultante está a 1/3 da profundidade acima de O ou a 2/3 de profundidade abaixo da superfície da água.

Problemas adicionais:

5. (SSY, 12-28) Uma piscina mede 25 m X 8 m e tem 3 m de profundidade. Calcule a força exercida pela água contra as paredes das extremidades e contra o fundo.

Nas extremidades de 8 m de largura, a força exercida será:

$$F = \frac{1}{2}\rho gLH^2 = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 10\cdot 8\cdot 3^2 = 3{,}6\cdot 10^5\ \text{N}.$$

Nas extremidades de 25 m de largura, a força exercida será:

$$F = \frac{1}{2}\rho gLH^2 = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 10\cdot 25\cdot 3^2 = 1{,}12\cdot 10^6\ \text{N} = 1{,}1\cdot 10^5\ \text{N}.$$

O volume da água da piscina é: $V = 25\cdot 8\cdot 3 = 600\ \text{m}^3$.

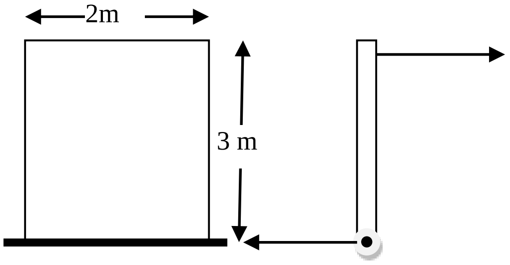
O peso da água, $W = m\cdot g = \rho\cdot V\cdot g = 1000\cdot 600\cdot 10 = 6\cdot 10^6\ \text{N}$.

Qual é a Força na base? $F = P\cdot A = \rho\cdot g\cdot h\cdot A = 1000\cdot 10\cdot 3\cdot 25\cdot 8 = 6\cdot 10^6\ \text{N}$.

A atmosfera tem uma massa de aproximadamente 5 x 10^{18} kg, sendo que três quartos dessa massa estão situados nos primeiros 11 km desde a superfície. A atmosfera terrestre se torna cada vez mais tênue conforme se aumenta a altitude, e não há um limite definido entre a atmosfera terrestre e o espaço exterior. Apenas em altitudes inferiores a 120 km a atmosfera terrestre passa a ser bem percebida durante a reentrada atmosférica de um ônibus espacial, por exemplo. A linha Kármán, a 100 km de altitude, é considerada frequentemente como o limite entre atmosfera e o espaço exterior.

Desafio!!! Qual é o peso do ar da atmosfera?

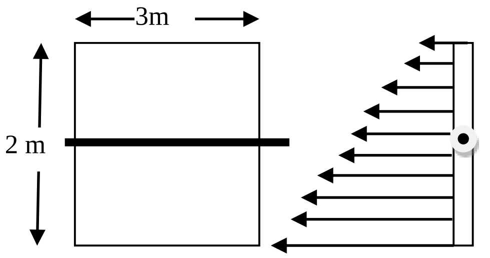
6. (SSY, 12-29) A parte superior de uma comporta vertical de uma represa tangencia a superfície da água. A comporta tem 2 m de largura e é articulada na base, que está a 3 m abaixo da superfície da água. Calcule o conjugado em relação à articulação.



O momento devido aos pares de forças com linha de ação paralelas, de mesma intensidade e sentido opostos é chamado de binário ou conjugado (de torção). Assim, aplicando a expressão:

$$\tau_{tot} = \frac{1}{6}\rho g L H^3 = \frac{1}{6}\cdot 1000\cdot 9{,}8\cdot 2\cdot 3^3 = 8{,}82\cdot 10^4 \text{ N.m}$$

7. (SSY, 12-30) A parte superior de uma comporta de uma represa tangencia a superfície da água. A comporta mede 2 m de altura e 3 m de largura e é articulada ao longo de um eixo tal que passa por seu centro. Calcular o Torque em relação a esse eixo.



Usando o conceito de altura média onde a força resultante deve ser aplicada, vemos que por causa da pressão diferenciada da parte superior ou da parte inferior haverá um toque resultante.
A linha de ação da força resultante está a 1/3 da profundidade acima de O ou a 2/3 de profundidade abaixo da superfície da água.
Há várias maneiras de resolver este exercício, comecemos pela mais tradicional, iremos integrar usando a origem na articulação. Dessa maneira as coordenadas de integração são [-H/2; +H/2]. Se no cálculo anterior, com a origem no fundo a coordenada for chamada y', o diferencial da força seria: $dF(y') = p\,dA = \rho g\left(H - y'\right)\times L\,dy'$, agora, estando a origem no meio da comporta, $y = y' - \frac{H}{2} \Rightarrow y' = y + \frac{H}{2}$. Assim o novo diferencial de força fica, fazendo a substituição de variáveis: $dF(y) = \rho g\left(H - y + \frac{H}{2}\right)\times L\,dy = \rho g\left(\frac{H}{2} - y\right)\times L\,dy$. O torque resultante pode ser calculado como:

$$\tau = \int y\,dF = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \rho g L\left(\frac{H}{2} - y\right) y\,dy = \rho g L \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{H}{2} - y\right) y\,dy = \rho g L\left[\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{H}{2} y\,dy - \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2\,dy\right] =$$

$$= \rho g L\left[\frac{H}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \rho g L\left[0 - 2\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^3}{3}\right] = -\frac{1}{12}\rho g L H^3 = -\frac{1}{12}\cdot 1000\cdot 10\cdot 3\cdot 1^3 = -\frac{1}{4}\cdot 10^4 \text{ N.m}$$

Considerando a Força total e analisando o esquema ao lado,

$$\tau_{tot} = F\overline{H} = \tfrac{1}{2}\rho gLH^2 \cdot \frac{1}{6}H = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\rho gLH^3 = \frac{1}{12}10^3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2^2 = \frac{1}{4}\cdot 10^4$$