14 Derivadas Parciais

14.5 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia

Lembremo-nos de que a Regra da Cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para derivar uma função composta: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é uma função indiretamente diferenciável de t e

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para as funções de mais de uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta.

A Regra da Cadeia

A primeira versão (Teorema 2) lida com o caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é, por sua vez, uma função de duas variáveis t. Isso significa que z é indiretamente uma função de t, $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá uma fórmula para diferenciar z como uma função de t. Presumimos que f é diferenciável.

A Regra da Cadeia

Lembremo-nos de que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas.

2 **A Regra da Cadeia (Caso 1)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Como frequentemente escrevemos $\partial z/\partial x$ no lugar de $\partial f/\partial x$, podemos reescrever a Regra da Cadeia na forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 1

Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \text{sen } 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

SOLUÇÃO: A Regra da Cadeia fornece

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen } t)$$

Não é necessário substituir as expressões por x e y em termos de t.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Nós simplesmente observamos que quando $t = 0$, temos $x = \text{sen } 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$. Portanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\text{sen } 0) = 6$$

A Regra da Cadeia

Vamos considerar agora a situação onde $z = f(x, y)$, mas x e y são funções de outras duas variáveis s e t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Então z é indiretamente uma função de s e t e desejamos determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$. Lembre-se de que para calcular $\partial z/\partial t$ mantemos s fixo e calculamos a derivada ordinária de z em relação a t. Portanto, aplicando o Teorema 2, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

A Regra da Cadeia

Argumento análogo serve para $\partial z/\partial s$, e assim demonstramos a seguinte versão da Regra da Cadeia.

$\boxed{3}$ **A Regra da Cadeia (Caso 2)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t.

Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

O Caso 2 da Regra da Cadeia contém três tipos de variáveis: *s* e *t* são variáveis **independentes**, *x* e *y* são chamadas de variáveis i**ntermediárias**, e *z* é a variável **dependente**.

A Regra da Cadeia

Observe que o Teorema 3 tem um termo para cada variável intermediária e que cada um desses termos se assemelha à Regra da Cadeia unidimensional na Equação 1.

Para lembrar a Regra da Cadeia, é útil desenhar o **diagrama em árvore** da Figura 2.

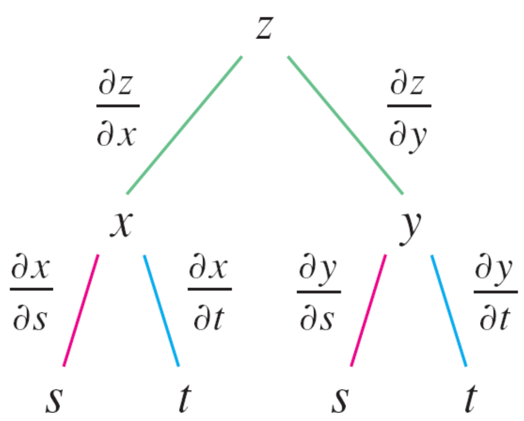

Figura 2

A Regra da Cadeia

Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente *z* para as variáveis intermediárias *x* e *y* a fim de indicar que *z* é uma função de *x* e *y*. Então, desenhamos os ramos saindo de *x* e *y* para as variáveis independentes *s* e *t*. Em cada ramo indicamos a derivada parcial correspondente. Para determinar $\partial z/\partial s$, nós determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de *z* a *s* e somamos esses produtos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Valores Máximo e Mínimo

Da mesma forma, para determinar $\partial z/\partial t$ usamos os caminhos de z a t.

Consideremos agora a situação mais geral, na qual a variável dependente u é uma função de n variáveis intermediárias $x_1, \ldots, x_n$, cada uma das quais, por seu turno, é função de m variáveis independentes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que existem termos, um para cada variável intermediária. A demonstração é semelhante à do Caso 1.

4 **A Regra da Cadeia (Versão Geral)** Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Diferenciação Implícita

Diferenciação Implícita

A Regra da Cadeia pode ser usada para dar uma descrição mais completa do processo de diferenciação implícita. Supomos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x. Já que x e y são funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Diferenciação Implícita

No entanto, $dx/dx = 1$, então, se $\partial F/\partial x \neq 0$ resolvemos para dy/dx e obtemos

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Para derivar essa equação, presumimos que $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como função de x.

Diferenciação Implícita

O **Teorema da Função Implícita**, comprovado no cálculo avançado, dá condições sob as quais essa suposição é válida: Ele afirma que se F é definida em um bola aberta contendo (a, b), onde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

Exemplo 8

Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUÇÃO: A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Diferenciação Implícita

Suponha agora que z dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Diferenciação Implícita

Mas, $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula nas Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de maneira semelhante.

Diferenciação Implícita

$$\boxed{7} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** estipula condições sob as quais nossa suposiçao é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas na esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais são dadas por $\boxed{7}$.