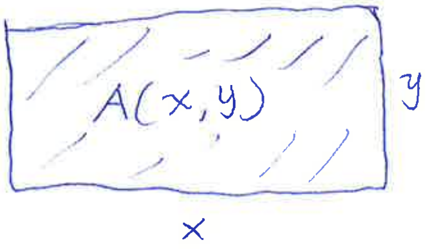
Funções de Varias Variáveis

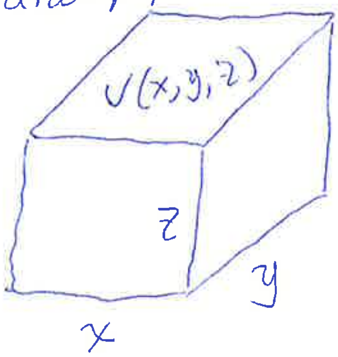
Retângulo



$A(x,y) = xy$

A área é uma função de duas variáveis

Paralepípedo



$V(x,y,z) = xyz$

O volumem do paralepípedo é uma função de três variáveis.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

A média é uma função de n variáveis.

- Definição: ~~Se~~ $f: \underset{D \subset \mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^2} \to \underset{I \subset \mathbb{R}}{\mathbb{R}}$ tal que para todo $(x,y) \in D \mapsto f(x,y)$ diremos que f é uma função real (escalar) de duas variáveis

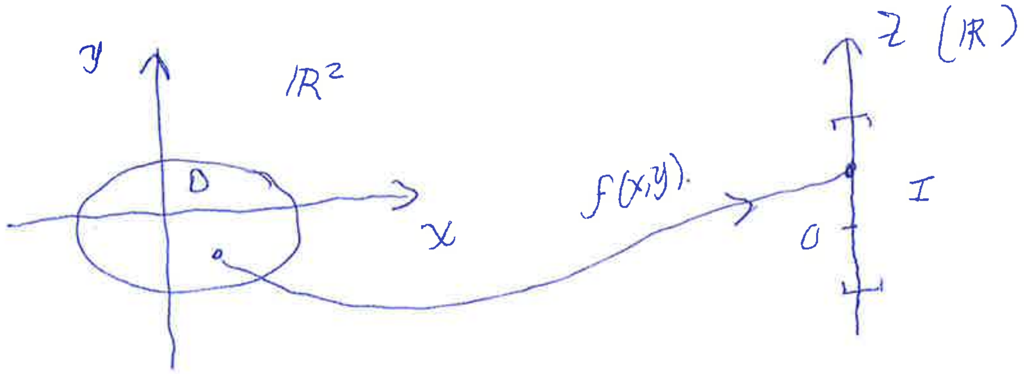
- Definição: Se $f: \underset{D \subset \mathbb{R}^3}{\mathbb{R}^3} \to \underset{I \subset \mathbb{R}}{\mathbb{R}}$ tal que para todo $(x,y,z) \in D \mapsto f(x,y,z)$ diremos que f é uma função real (escalar) de três variáveis

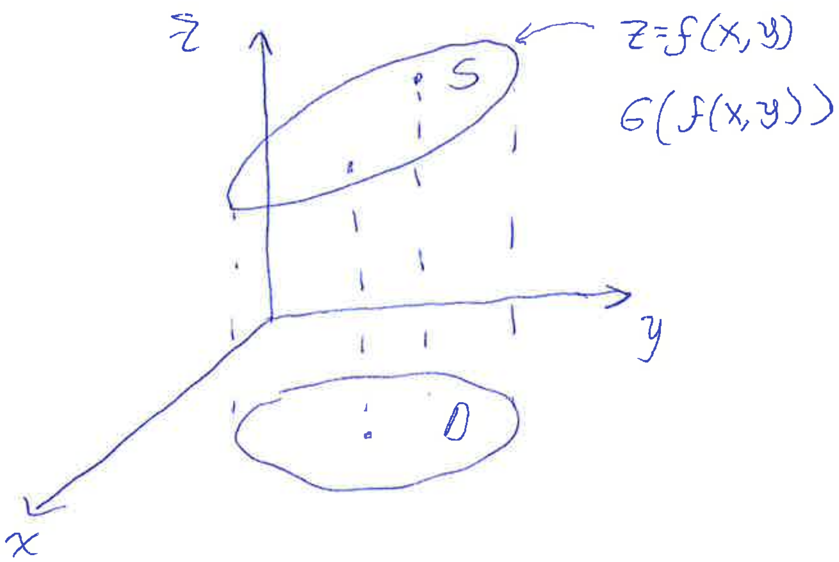
- Definição: Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \to I \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diremos que f é uma função real (escalar) de n variáveis

- O gráfico de uma função de duas variáveis pode ser interpretado como uma superfície.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$$

$$(x,y) \in D \longmapsto f(x,y) = z$$

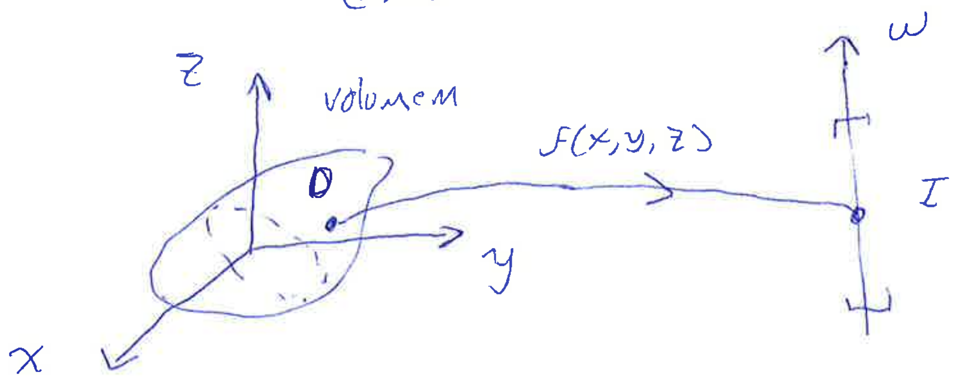




- O gráfico de uma função de três variáveis não pode ser representado diretamente.

$$f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \in D \longmapsto f(x,y,z) = w$$



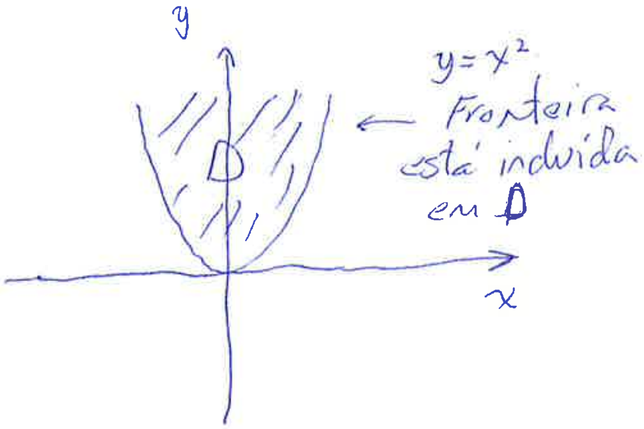
Ex.: Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

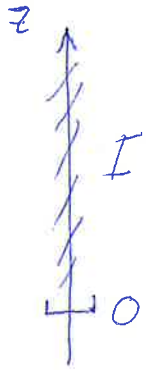
a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

<u>Sol.:</u> a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y - x^2 \geq 0\}$

$I = \{z \in \mathbb{R} \;|\; z \geq 0 \text{ e } z = \sqrt{y-x^2}\}$



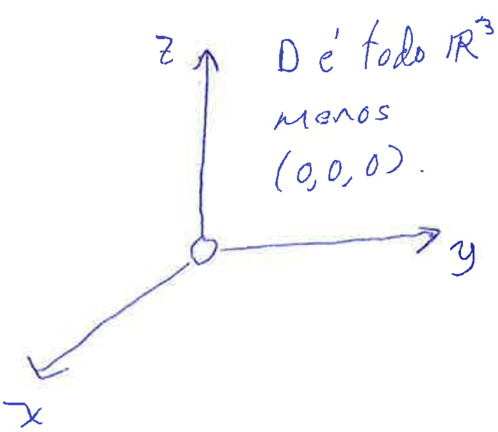


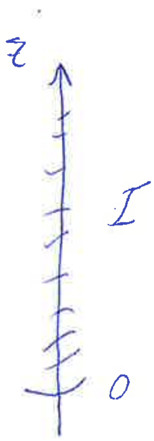
$I = [0, +\infty)$

← zero incluído em I.

b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;|\; x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$

$I = \left\{w \in \mathbb{R} \;|\; w > 0 \text{ e } w = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right\}$





$I = (0, +\infty)$

← zero não está incluído

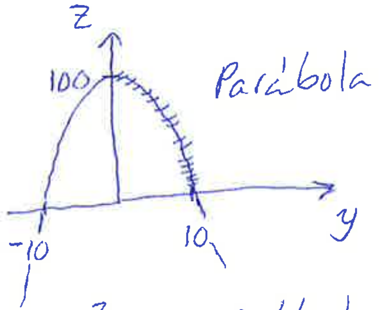
Ex.: Esboce o gráfico da função $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.

Sol.: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ não existem restrições, todo $\mathbb{R}^2$

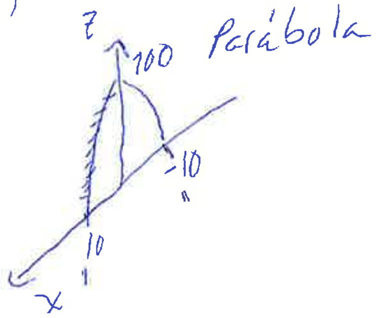
$$I = \{ z \in \mathbb{R} \mid z \leq 100 \text{ e } z = 100 - x^2 - y^2 \}$$

- Podemos simplificar o gráfico analizando três casos particulares: i) $x=0$, ii) $y=0$ e iii) $z=0$.

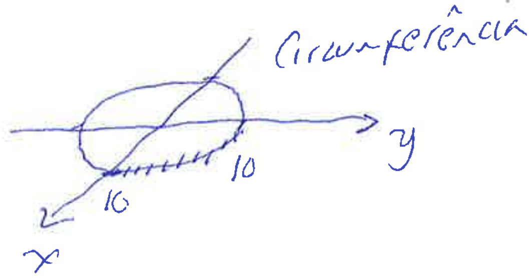
i) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 100 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 100 - y^2 \Rightarrow$



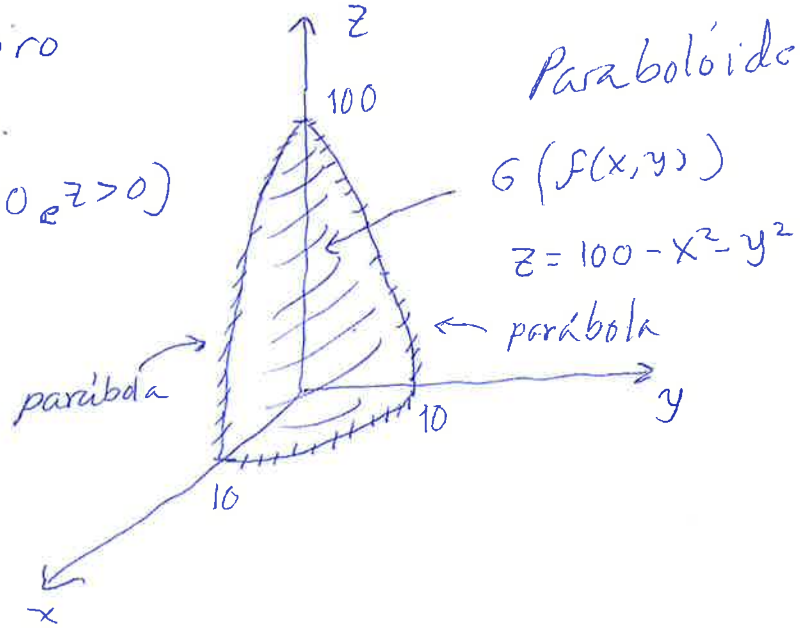
ii) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 100 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 100 - x^2 \Rightarrow$



iii) $\begin{cases} z = 0 \\ z = 100 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow$



- Juntando os gráficos anteriores no primeiro octante. ($x>0$ e $y>0$ e $z>0$)



Curvas de Nível

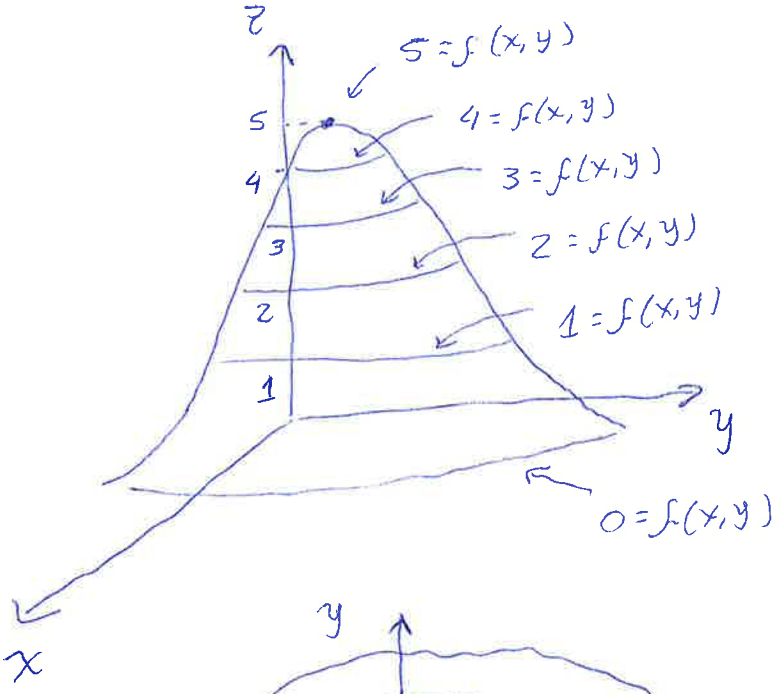
$$\underbrace{z}_{\text{variável dependente}} = f\underbrace{(x,y)}_{\text{duas variáveis independentes}} \rightarrow$$

Eq. que representa uma superfície

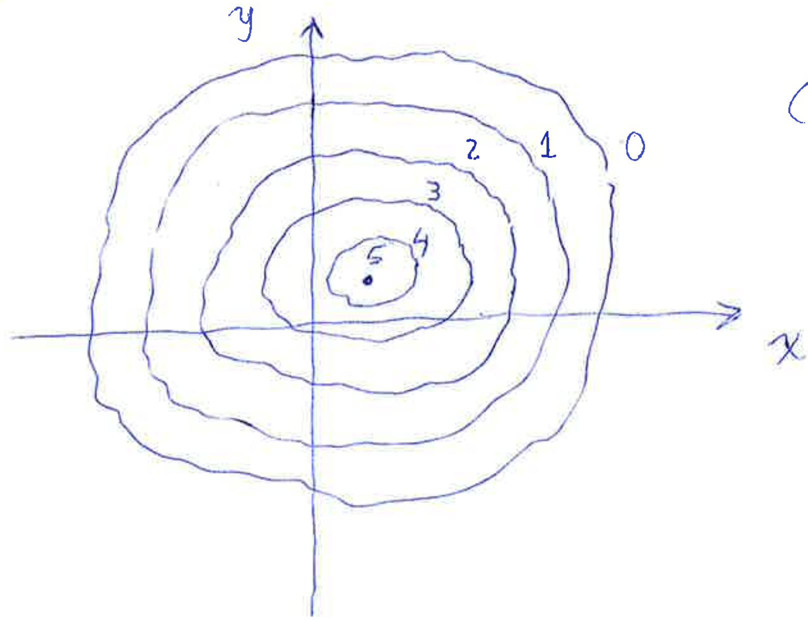
Gráfico da função $f(x,y)$.

$$z = cte = \boxed{h = \underbrace{f(x,y)}_{\text{somente uma variável independente}}} \rightarrow y(x), \; x(y)$$

implicitamente temos uma função de uma variável que representa uma curva.



Curvas de Altura constante



Curvas de Nível (Mapa de Contornos)

Projeção no plano xy (z=0) das curvas de altura constante.

Ex.: Esboce o gráfico da função $f(x,y) = 7 - 4x - 3y$ e algumas curvas de nível.

Sol.: $z = f(x,y)$

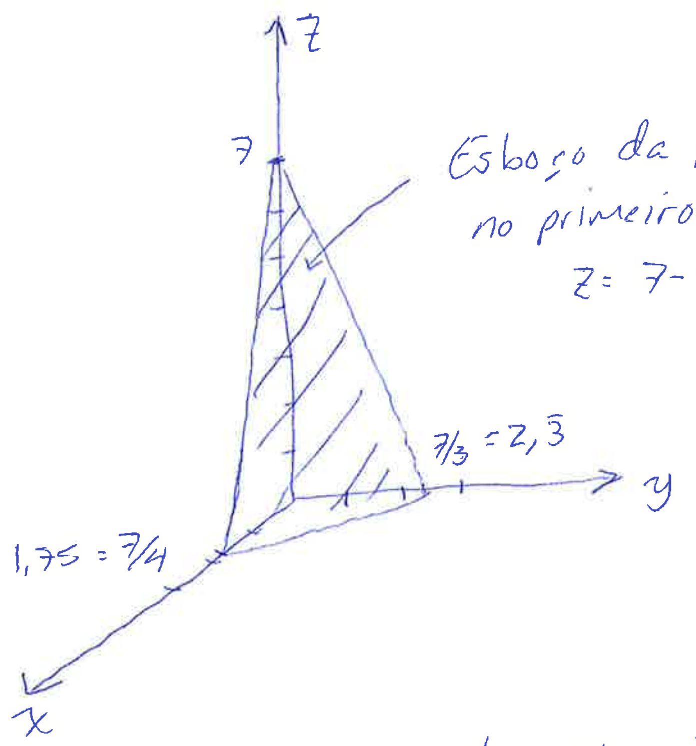
$z = 7 - 4x - 3y$ é a eq. de um plano

Neste caso basta encontrar três pontos do plano

- Se $x=0$ e $y=0 \Rightarrow z = 7 - 4\cdot 0 - 3\cdot 0 = 7 \Rightarrow (0,0,7)$

$x=0$ e $z=0 \Rightarrow 0 = 7 - 4\cdot 0 - 3y \Rightarrow y = \frac{7}{3} = 2{,}\bar{3} \Rightarrow (0, 7/3, 0)$

$y=0$ e $z=0 \Rightarrow 0 = 7 - 4x - 3\cdot 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4} = 1{,}75 \Rightarrow (\frac{7}{4}, 0, 0)$



Esboço da parte do plano no primeiro octante $z = 7 - 4x - 3y$

Curvas de Nível: $h = f(x,y)$, $h = \text{cte}$

$$h = 7 - 4x - 3y$$

$$3y = -4x + 7 - h$$

$$y = \underbrace{-\frac{4}{3}}_{m} x + \underbrace{\frac{7-h}{3}}_{b}$$

← Todas as Curvas de Nível de um plano são retas paralelas (m não depende de h)

Δh

$h = 7 \Rightarrow y(x) = -\frac{4}{3}x \quad , b = 0$

$h = 5 \Rightarrow y(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \quad , b = 2/3$

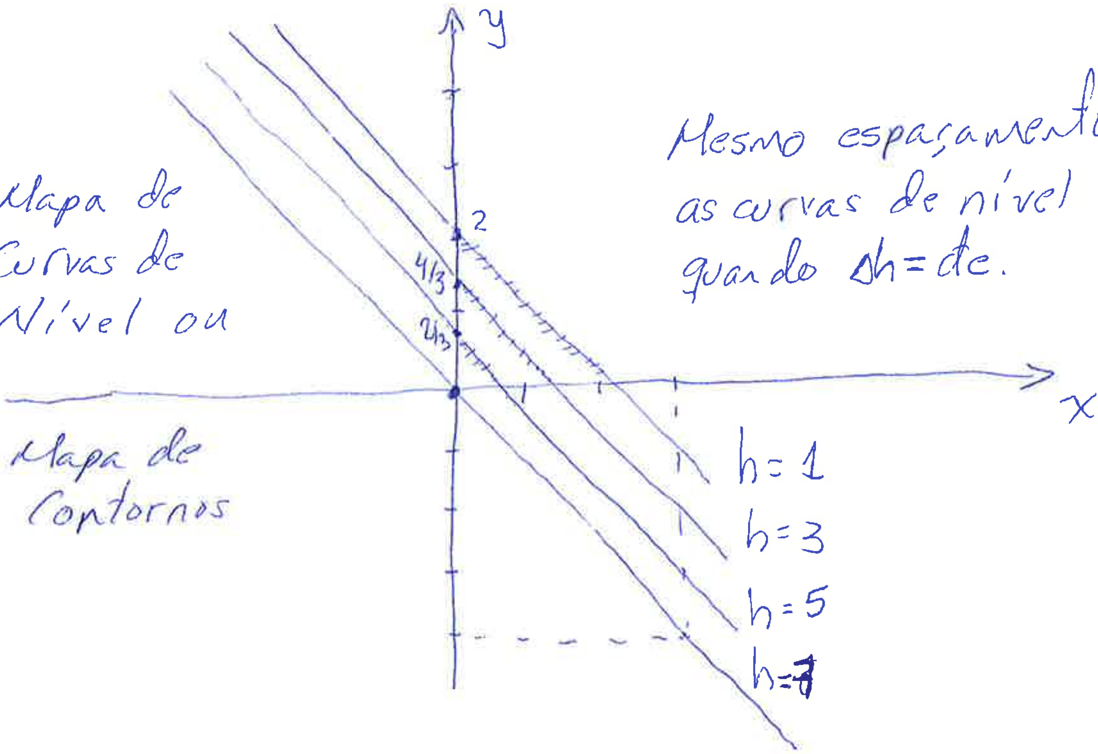
$h = 3 \Rightarrow y(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \quad , b = 4/3$

$h = 1 \Rightarrow y(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{6}{3} \quad , b = \frac{6}{3} = 2$

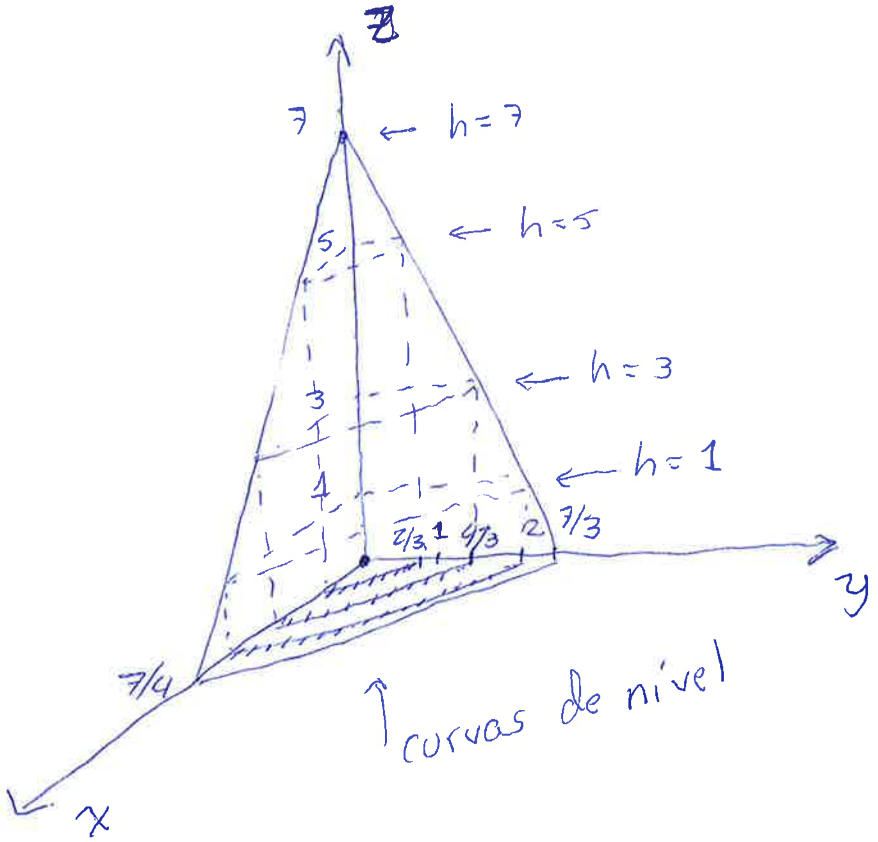
$\Delta h = cte$

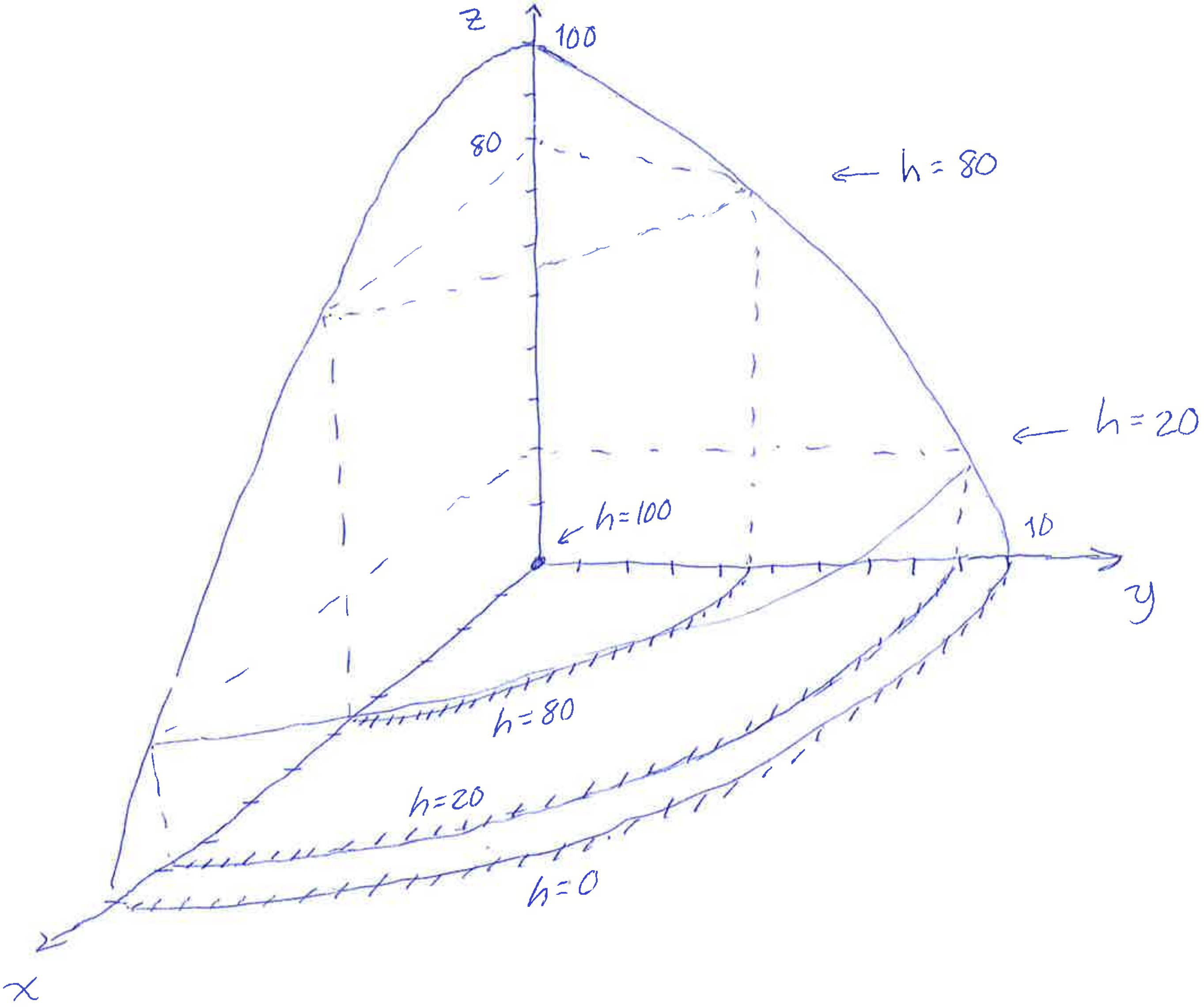
Mapa de Curvas de Nível ou

Mapa de Contornos



Mesmo espaçamento entre as curvas de nível de um plano quando $\Delta h = cte$.

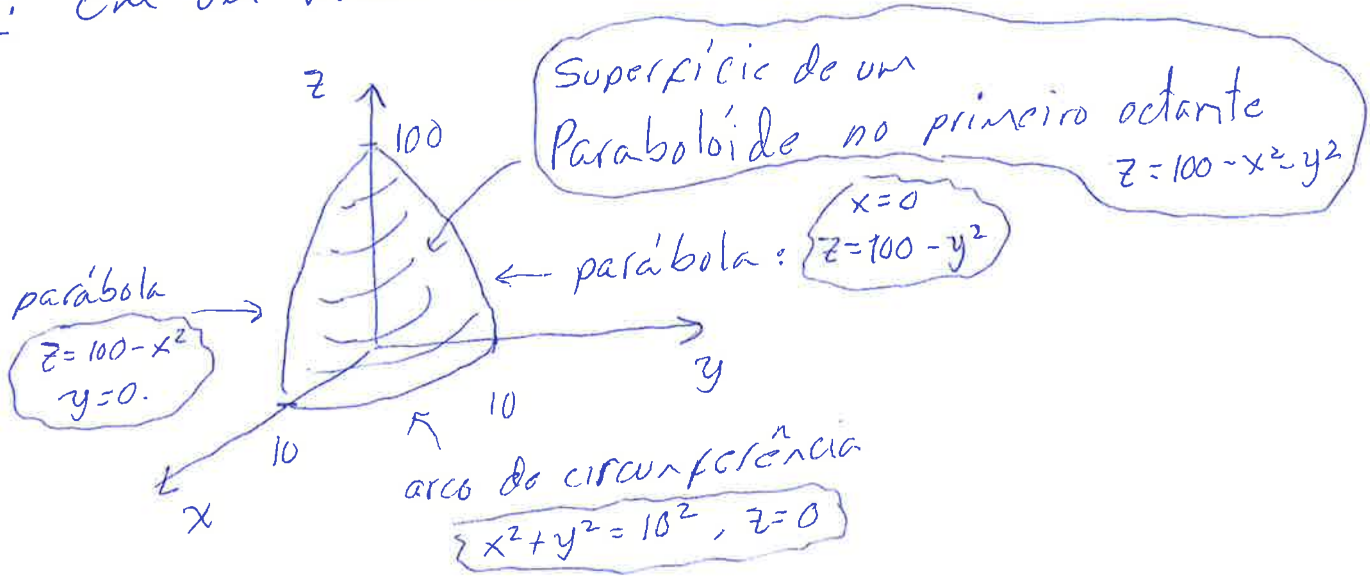



z
100
80
← h = 80
← h = 20
h=100
10
y
h=80
h=20
h=0
x

Ex. Esboce algumas curvas de nível da função

$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.

Sol.: Em um vídeo anterior esboçamos essa mesma função



Curvas de Nível: $h = f(x,y)$, $h = cte$

$$h = 100 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 100 - h$$

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ com } R = \sqrt{100-h}$$

As curvas de nível são circunferências centradas na origem e com raio $R = \sqrt{100-h}$.

Δh

$h = 100 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0^2 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$h = 80 \Rightarrow R = \sqrt{20} \approx 4,5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$

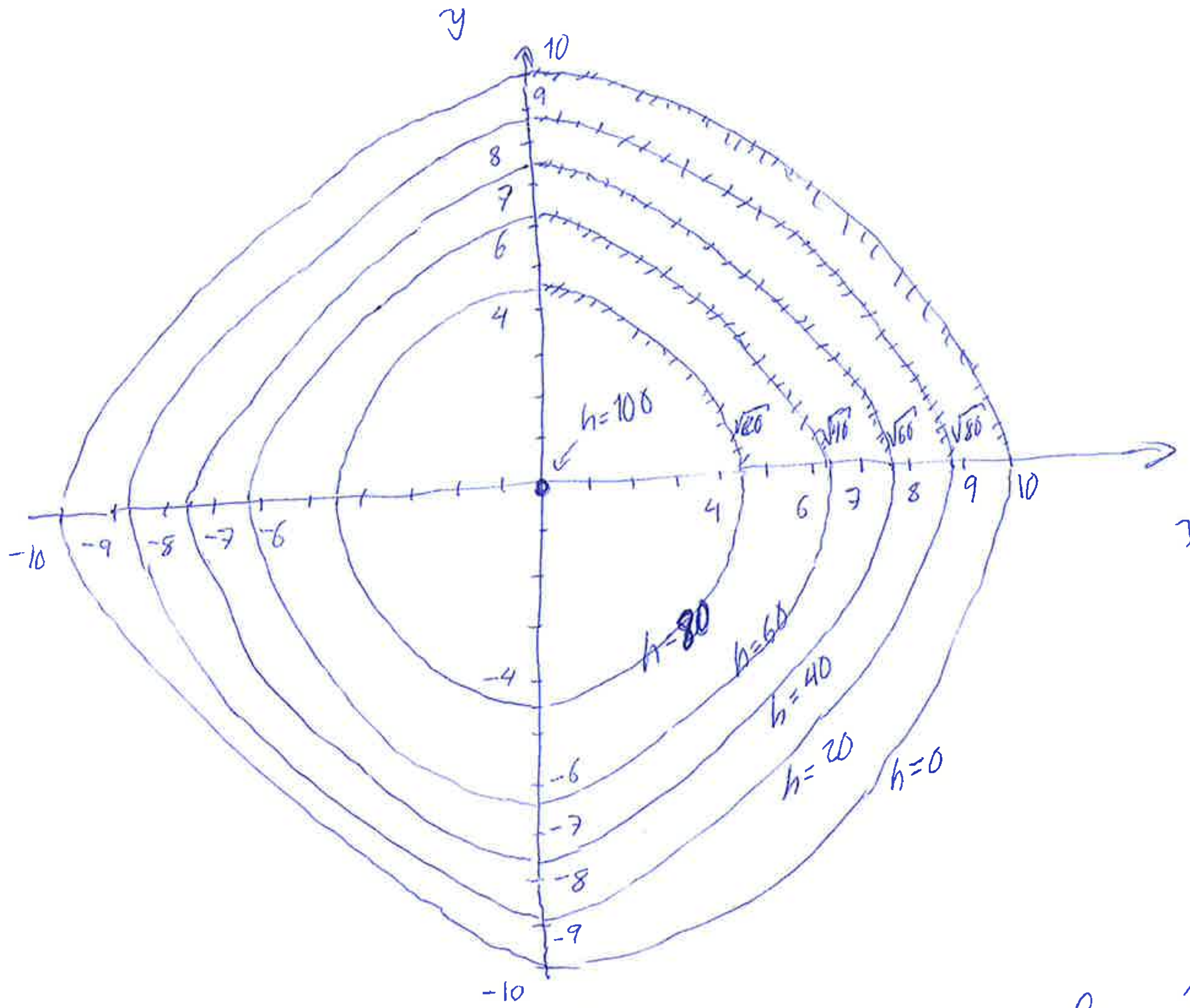
$h = 60 \Rightarrow R = \sqrt{40} \approx 6,3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 40$

$h = 40 \Rightarrow R = \sqrt{60} \approx 7,7 \Rightarrow x^2 + y^2 = 60$

$h = 20 \Rightarrow R = \sqrt{80} \approx 8,9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 80$

$h = 0 \Rightarrow R = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\Delta h = cte$



- Note que o espaçamento entre as curvas de nível não é constante.
- Quando as curvas de nível estão mais próximas (Δh=de) isso significa que a subida é mais "íngreme" (mais abrupta).
- Quando as curvas de nível estão mais afastadas a subida é mais "suave".
- Lembre que as curvas de nível em um plano estão igualmente espaçadas.

Superfícies de Nível

- A equação $w = f(x,y,z)$ não conseguimos representar diretamente. Precisaríamos 4 eixos perpendiculares entre si dois a dois.

$$\underbrace{w}_{\text{uma variável dependente}} = f(\underbrace{x,y,z}_{\text{três variáveis independentes}}) \leftarrow \text{Superfície 4D}$$

- Fixando $w = t = cte$

Superfície de Nível: $t = \boxed{cte = f(\underbrace{x,y,z}_{\text{somente duas variáveis independentes}})}$

implicitamente ou ou

$$\underbrace{x = g(y,z) \quad y = h(x,z) \quad z = \gamma(x,y)}_{\text{Superfícies 3D.}}$$

- A superfície 4D pode ser visualizada por um conjunto de superfícies 3D em diferentes valores de w (instantes de tempo, t). Essas superfícies 3D associadas a uma função de três variáveis são chamadas de superfícies de nível.

2

Ex.: Descreva e esboce algumas superfícies de nível da função $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Sol.: Superfície de Nível: $f(x,y,z) = R = cte$

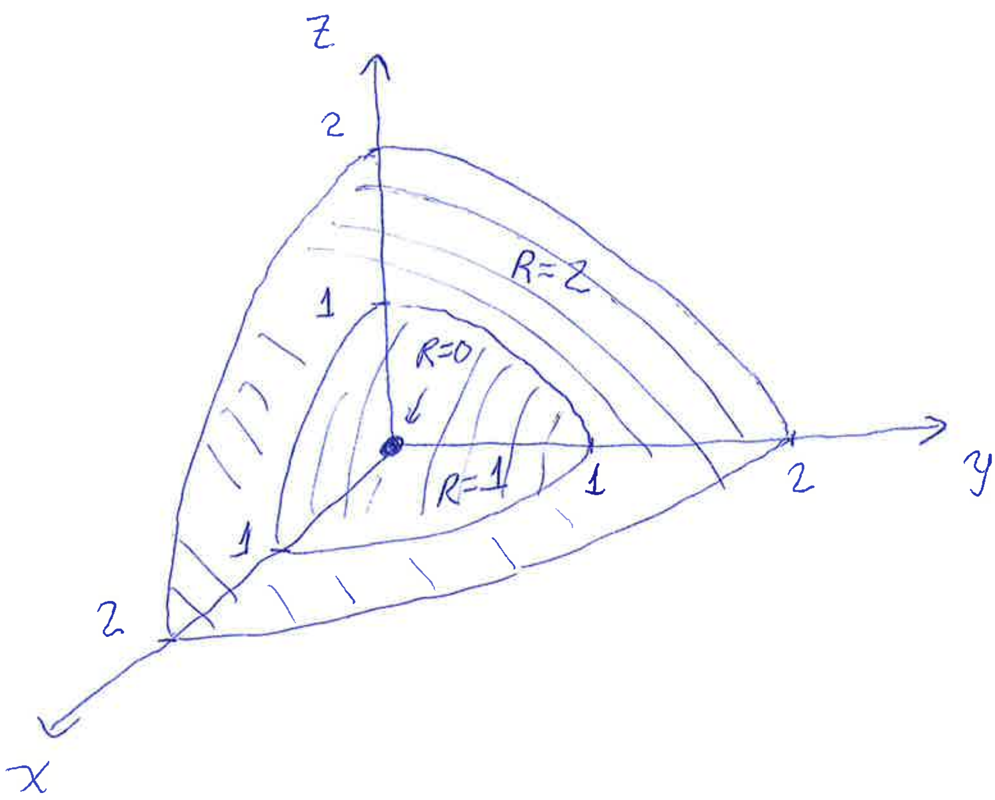
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$$

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$ ← As superfícies de nível são esferas de raio R e centradas na origem

$R=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 0^2 \Rightarrow (0,0,0)$ único ponto

$R=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1^2$

$R=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 2^2$



Funções de Várias Variáveis no Computador

1) $z = f(x,y) = y^2 - x^2$ Paraboloide Hiperbólico

2) $z = f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$

3) $z = f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $x^2+y^4 \neq 0$

4) $z = f(x,y) = x \ln(y^2-x)$, $y^2 - x > 0$

$y^2 > x$

5) $w = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

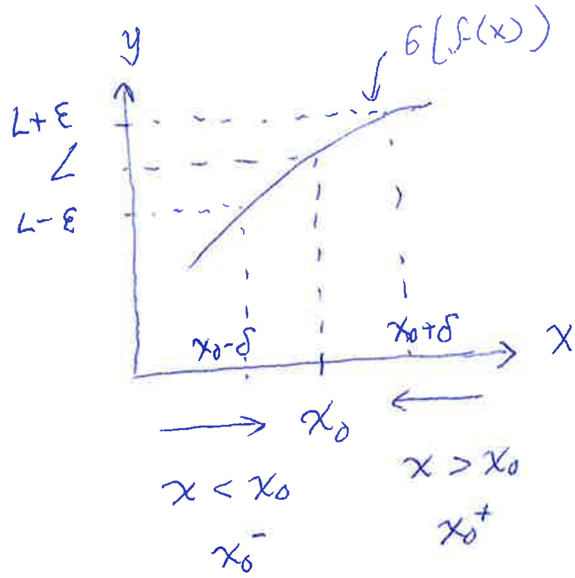
6) $w = f(x,y,z) = x^3 + y^2 - z^2$

7) $w = f(x,y,z) = xyz$

Limites de Funções de Duas Variáveis em um ponto seguindo uma curva

①

Funções de UMA Variável



Duas Possibilidades para se aproximar a x_0

Limites Laterais

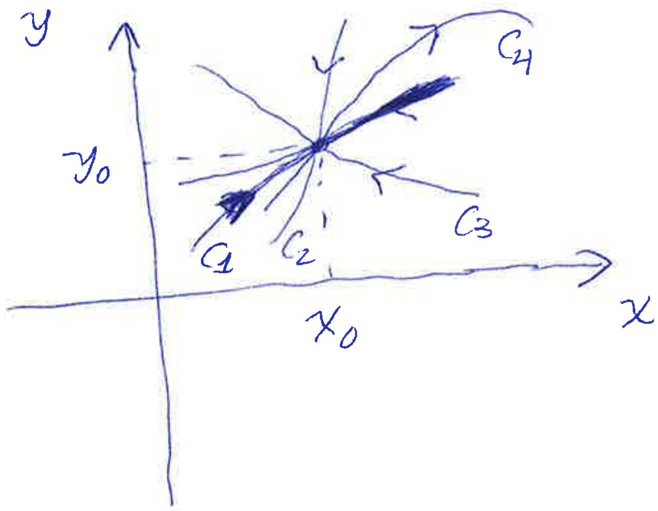
① $\lim\limits_{x \to x_0^+} [f(x)]$

② $\lim\limits_{x \to x_0^-} [f(x)]$

O limite existe se para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Para funções de duas variáveis o domínio é bidimensional. Existem infinitas curvas pela quais se pode aproximar de um ponto (x_0, y_0)



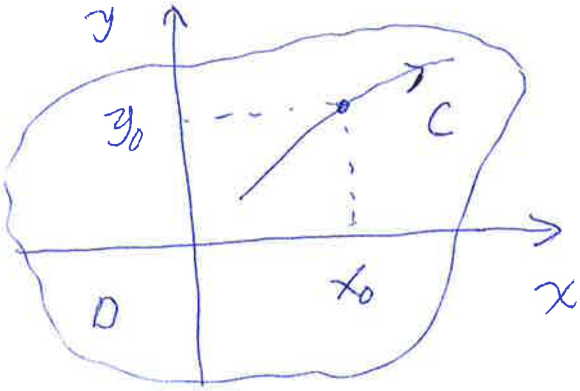
- Se o limite $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} [f(x,y)]$ existir ele deve ser o mesmo por todas as curvas possíveis

- Por outro lado, basta encontrar que o limite não existe seguindo uma curva ou que tem valor diferente por duas curvas diferentes para afirmar que o limite em geral não existe.

- Vamos definir o sentido de calcular o limite de uma função de duas variáveis seguindo uma curva C.

$f(x,y)$ com domínio D

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{seguindo a curva } C}} [f(x,y)] = ?$$



- Vamos supor que a curva C seja lisa e escrita pela função vetorial $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, com $\vec{r}(t_0) = \langle x_0, y_0 \rangle$
- Nesse caso escrevemos

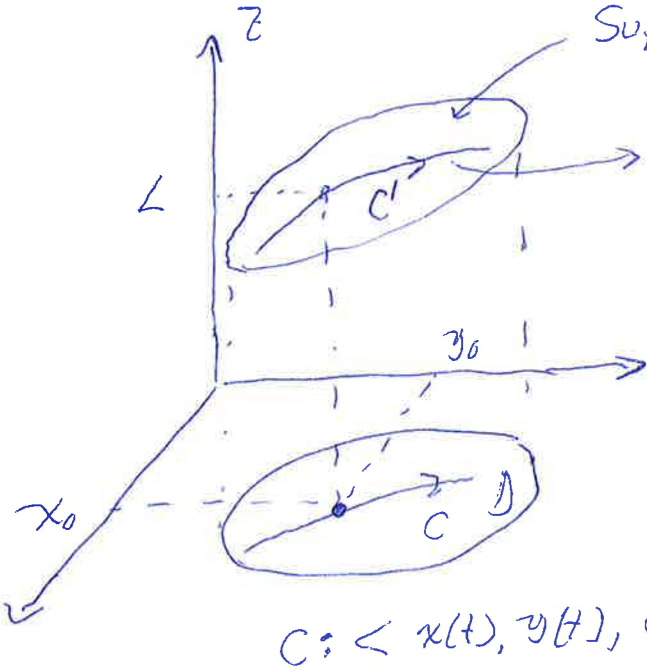
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{seguindo a curva } C}} [f(x,y)] = \lim_{t\to t_0} [f(x(t), y(t))]$$

Geometricamente

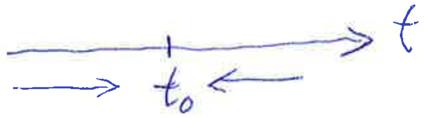
Superfície: $z = f(x,y)$

Curva da Superfície, C'

$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), f(x(t), y(t)) \rangle$



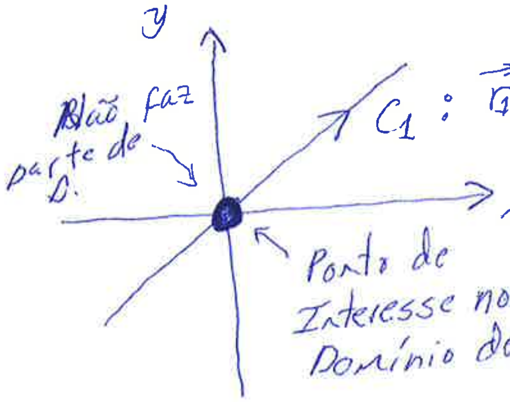
$C: \langle x(t), y(t), 0 \rangle$



Ex.: Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ não existe. (3)

Sol.: $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, não está definida em $(0,0)$

$D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

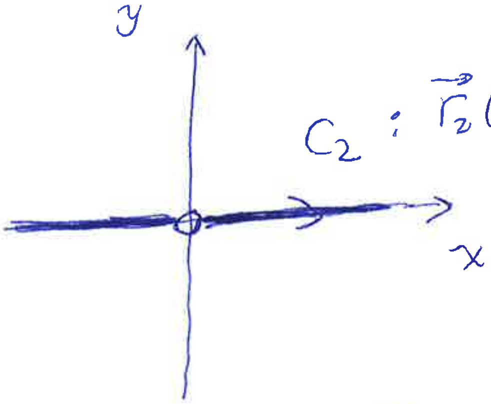


$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, t \rangle$, ou $y = x$

e $\vec{r}_1(0) = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow t_0 = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C_1}} \left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{(t,t)\to(0,0)} \left[\frac{t^2-t^2}{t^2+t^2}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{0}{2t^2}\right] = 0$$



$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle t, 0 \rangle$ e $\vec{r}_2(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$t_0 = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C_2}} \left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \left[\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[1\right] = 1$$

Logo, como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C_2}} [f(x,y)]$$

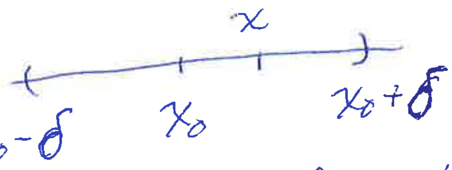
$$\Downarrow$$

O limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)]$ não existe.

Limite em Funções de Duas Variáveis

- Em funções de uma variável a ideia de estar perto de um ponto x_0 do domínio era escrita como $|x-x_0|<\delta$

dado $\delta>0$,



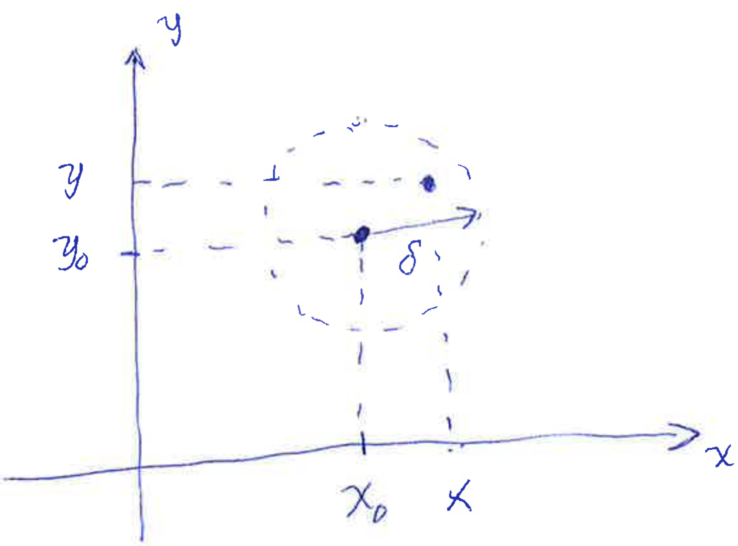
Se usa um intervalo aberto $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

- Em funções de duas variáveis a ideia de estar perto de um ponto do domínio (x_0,y_0) é escrita como

$$|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

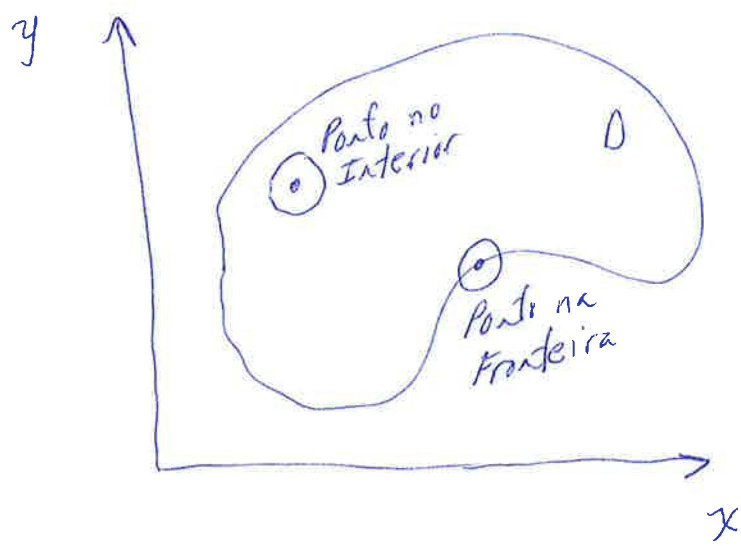
A distância entre (x,y) e (x_0,y_0) é menor que δ.



Disco Aberto Centrado em (x_0,y_0) de raio δ Fronteira NÃO incluída

Disco Fechado Centrado em (x_0,y_0) de raio δ Fronteira Incluída

- O disco subtitue o intervalo em funções de duas variáveis quando comparado a funções de uma variável.



- Um ponto é dito ~~estar~~ estar no interior do domínio quando existe algum disco aberto centrado no ponto que contenha unicamente pontos de D.
- Um ponto é de fronteira quando qualquer disco aberto centrado no ponto contem pontos de D e pontos que não são de D.

Definição de Limite

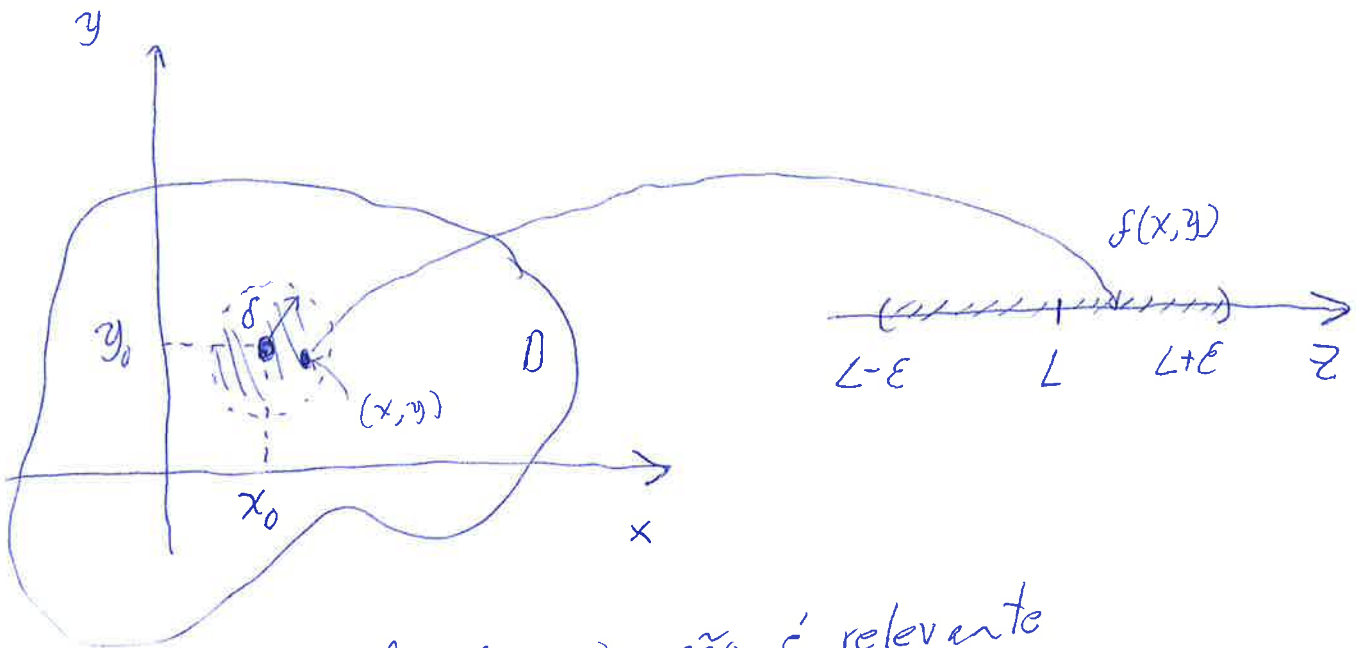
Seja f uma função de duas variáveis e suponha que f esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto centrado em (x_0, y_0), exceto, possivelmente, em (x_0, y_0).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)] = L$$

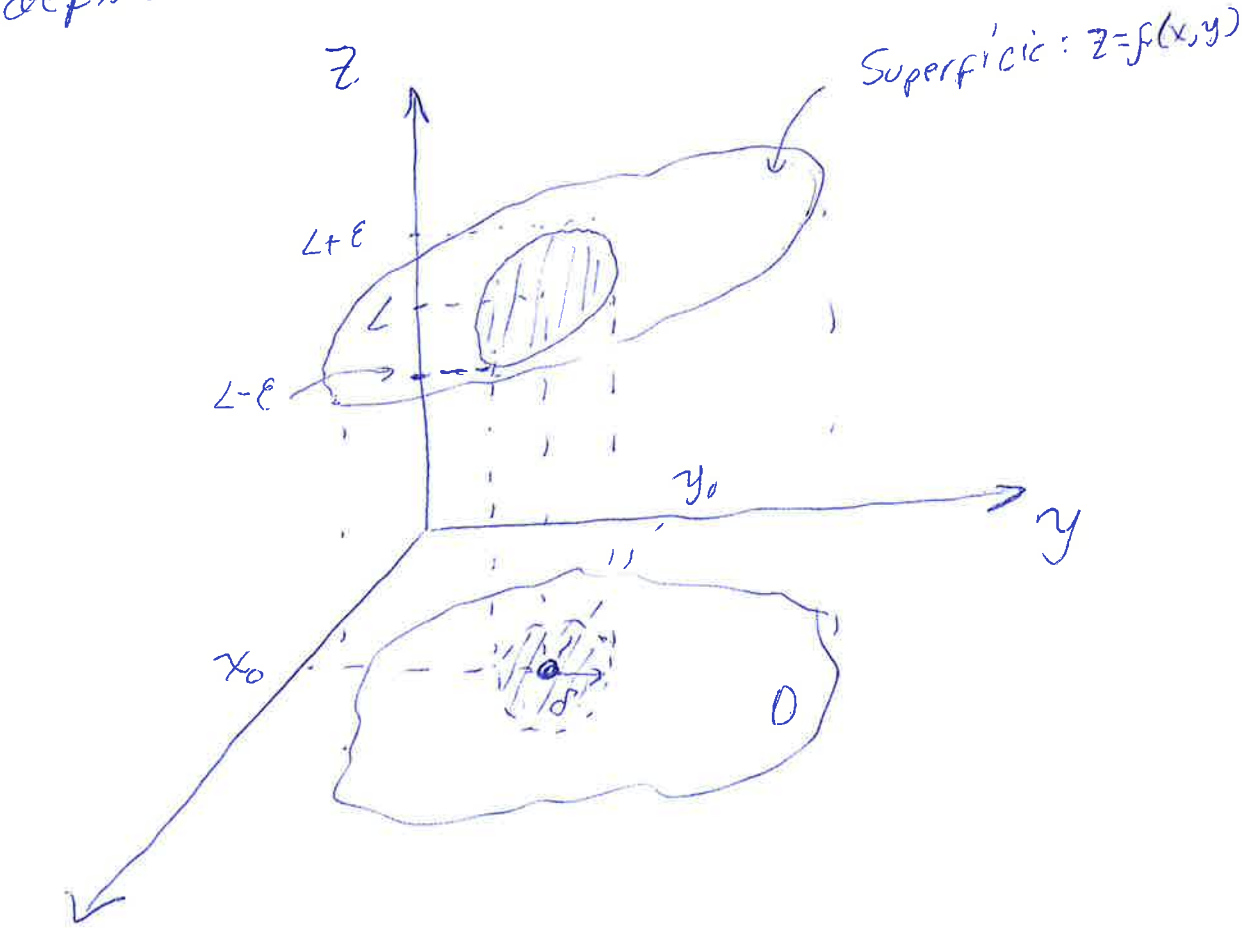
significa que dado $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeno) existe (podemos encontrar) $\delta > 0$ tal que $f(x,y)$ satisfaça

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

sempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$.



O ponto (x_0, y_0) não é relevante
que satisfaça essa condição (note $\delta > 0$).
Isto é, o limite pode existir sem que $f(x,y)$ esteja
definido em (x_0, y_0).



Continuidade em Funções de Duas Variáveis

- Em funções de uma variável era dito que $f(x)$ é contínua em x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)] = f(x_0)$$

- De forma análoga, uma função de duas variáveis é dita contínua em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} [f(x,y)] = f(x_0, y_0)$$

- As igualdades anteriores são locais (ponto a ponto). Requerem que o limite exista, a função esteja definida no ponto em que se analisa a continuidade e que os dois sejam iguais.

- A definição pode ser extendida para todos os pontos no interior de um domínio e para os pontos na fronteira do domínio. Neste último caso, a aproximação ao ponto de fronteira deve acontecer por curvas completamente contidas no domínio.

- Pode ser provado que

a) A soma, a diferença ou o produto de funções contínuas são contínuas

b) O quociente de funções contínuas é contínua, exceto onde o denominador for zero

c) A composição de funções contínuas é contínua.

Ex.: Determine se a função ~~f(x,y) = sen~~

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Sol.: Primeiro devemos calcular o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$$

- Note que podemos escrever $z = x^2+y^2$ e quando $(x,y)\to(0,0)$ segue que $z \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} 1$$

- A função está definida em $(0,0)$: $f(0,0) = 0$

- Mas $0 = f(0,0) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] = 1$, logo a função NÃO é contínua em $(0,0)$.

- Pode ser definida uma outra função de forma contínua em $(0,0)$:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & \text{se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Ex.: Determine se a função $h: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

é contínua em (0,0).

Sol.: - Primeiro devemos tentar calcular o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right]$$

Antes vamos racionalizar o denominador

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)}_{1} = \frac{x\cancel{(x-y)}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Soma e Produto de funções contínuas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x(\sqrt{x} + \sqrt{y})\right] = 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0$$

- A função está definida em (0,0)

$$h(0,0) = 0$$

$$- \quad h(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} [h(x,y)]$$

Logo $h(x,y)$ é contínua em (0,0).

Exercícios de Limite em funções de duas Variáveis - I

Ex.: Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}$, determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)]$.

- A função não está definida em $(0,0)$

Sol.: - Note que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ em todo $\mathbb{R}^2$. Logo podemos usar a ideia do sanduíche com $f(x,y)$.

$$0 \leq \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)|y| \leq |y|$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $|y| > 0$ (não muda a desigualdade)

$$0 \leq f(x,y) \leq |y|$$

Calculando limite nos três lados da desigualdade

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [0] \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} [|y|]$$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] \leq 0$$

Logo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] = 0$ $\blacksquare$

Ex.: Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right]$. (2)

Sol.: - A função não está definida em (0,0).
- Como y pode ser negativo o procedimento do exercício anterior agora é mais trabalhoso.
- Vamos tentar outro caminho: mudar para coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \quad e \quad \boxed{\text{se } (x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \longrightarrow f(r,\theta) = \frac{\cancel{r^2}\cos^2(\theta)\, r\,\text{sen}(\theta)}{\cancel{r^2}\cos^2(\theta) + \cancel{r^2}\text{sen}^2(\theta)}$$

$$f(r,\theta) = r\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0}\left[r\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)\right] = 0$$

Ex.: Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left[\dfrac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}\right]$.

Sol.: Neste caso o denominador não se anula em (0,1). Usamos que a função é construída pela soma e produto de funções contínuas, logo é contínua e basta subtituir no ponto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[\frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}\right] = \frac{0 - 0\cdot 1 + 3}{0^2\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 1 - 1^3} = \frac{3}{-1} = -3$$

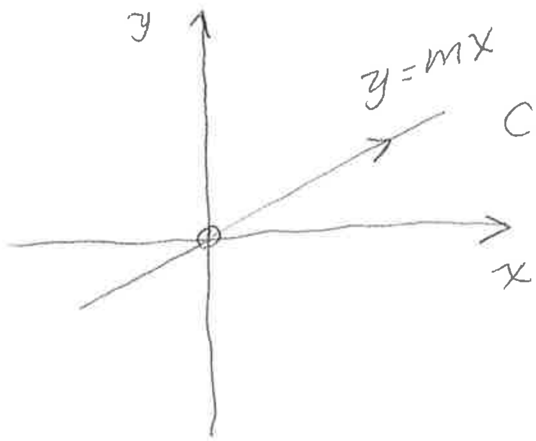
Ex.: Determine o limite ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right].$$

Sol.: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não está definida em $(0,0)$

Vamos mostrar que o limite não existe usando retas que passam pela origem.

$y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ (parâmetro)



$C: \vec{r}(t) = \langle t, mt \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$t_0 = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C}} \left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{t \cdot mt}{t^2 + m^2t^2}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{m}{1+m^2}\right] = \frac{m}{1+m^2}$$

Como o resultado depende de m o limite não existe. Retas distintas levam a resultados diferentes.

Exemplo: $m = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} [f(x,y)] = 0$

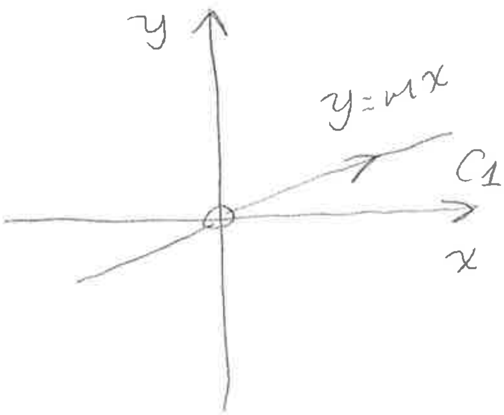
$m = 1 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} [f(x,y)] = \dfrac{1}{2}$

Ex.: Determine o limite ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right].$$

Sol.: $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, não está definida em $(0,0)$

Vamos tentar provar que o limite não existe usando retas que passam pela origem



$C_1: \vec{r}_1(t) = \langle t, mt \rangle$

$\vec{r}_1(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$t_0 = 0$

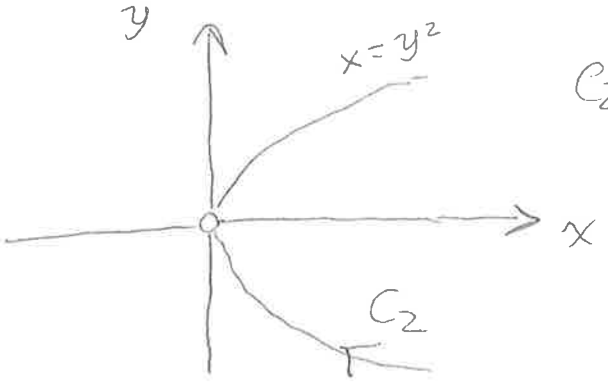
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{Seguindo } C_1}} \left[\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{t\cdot m^2 \cancel{t^2}}{\cancel{t^2} + m^4 t^{4\,2}}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{m^2 t}{1+m^4t^2}\right] = \frac{0}{1+0} = 0$$

- Logo, para todas as retas do tipo o limite é zero independentemente da inclinação. Isso significa que o limite é zero? Não.

- Vamos tentar uma parábola da forma $x = y^2$. Note a falta de simetria $f(x,y) \neq f(y,x)$

③



$C_2: \vec{r}_2(t) = < t^2, t >$

$\vec{r}_2(0) = <0,0>$

$t_0 = 0$

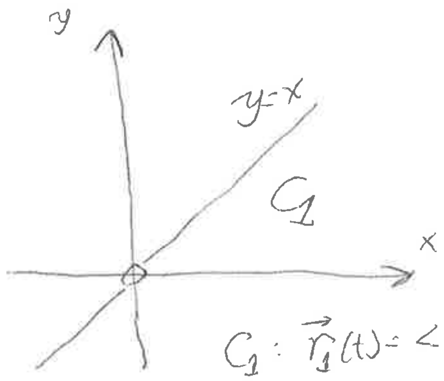
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{xy^2}{x^2+y^4} \right] = \lim_{t\to 0} \left[\frac{t^2 \cdot t^2}{t^4+t^4} \right] = \frac{1}{2}$$

Logo, o limite não existe.

$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ C_1}} [f(x,y)] \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ C_2}} [f(x,y)] = \frac{1}{2}$$

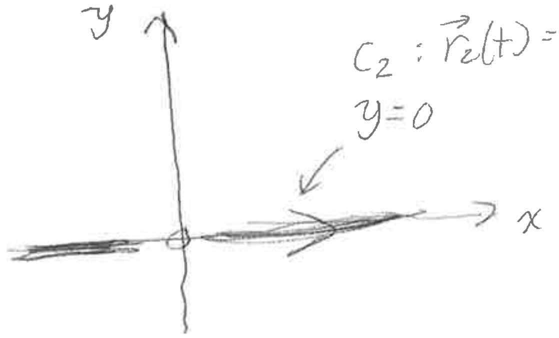
Limites de uma Função de Duas Variáveis no Computador

2) $$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} \left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{0}{2t^2}\right) = 0$$

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \langle t, t \rangle$



$C_2 : \vec{r}_2(t) = \langle t, 0 \rangle$

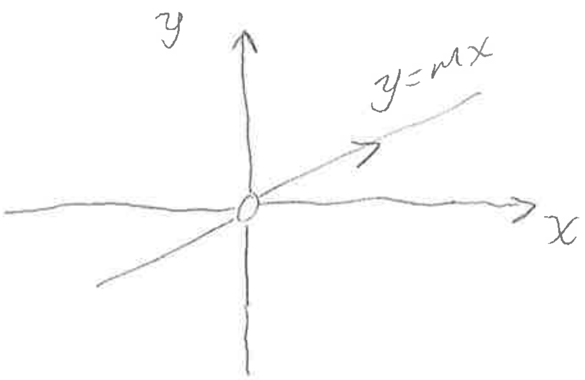
$y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = 1$$

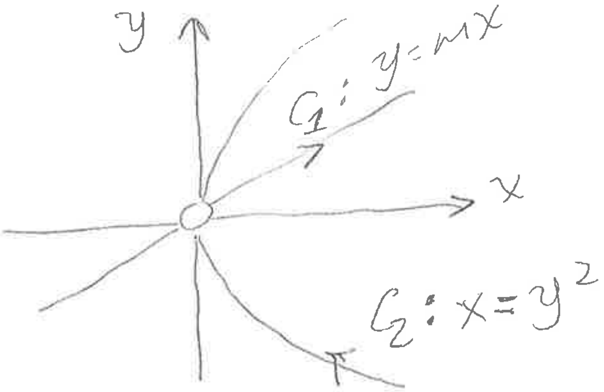
1) $$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] = 1.$$

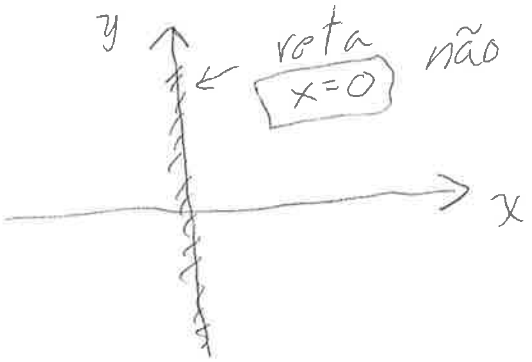
3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$



4) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$



5) $f(x,y) = \text{Arctan}(y/x)$

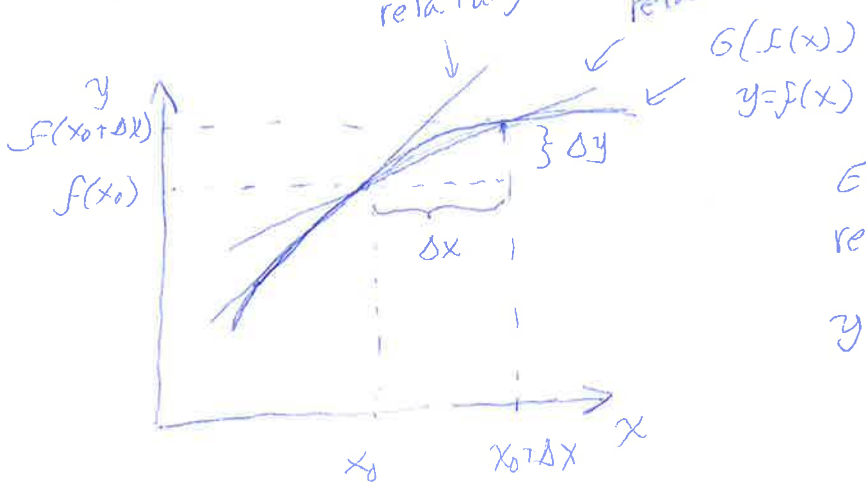


reta $\boxed{x=0}$ não faz parte do domínio de $f(x,y)$.

Derivadas Parciais

- Em funções de uma variável a derivada era definida como: $y=f(x)$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}^{\Delta y}}{\Delta x}\right]$$



Eq. da reta tangente

$$y-f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{inclinação}}(x-x_0)$$

- Para funções de duas variáveis: $z=f(x,y)$

a) Fixemos y, isto é, $y=\text{cte}=y_0$, logo $z=f(x,y_0)=g(x)$

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right)$$

Voltando a f

$$\boxed{\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}^{\Delta z}}{\Delta x}\right]}$$

A expressão anterior define a derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0,y_0).

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) \qquad \text{Notação}$$

- O símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ representa a derivada parcial em relação a x de uma função de várias variáveis. O símbolo $\frac{d}{dx}$ representa a derivada de uma função de UMA variável.

b) Fixemos x, isto é, $x = cte = x_0$, logo $z = f(x_0, y) = h(y)$

$$\left.\frac{dh(y)}{dy}\right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{h(y_0+\Delta y) - h(y_0)}{\Delta y}\right]$$

Voltando a f

$$\boxed{\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{\overbrace{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}^{\Delta z}}{\Delta y}\right]}$$

A expressão anterior define a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0).

<u>Ex.:</u> Seja $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$. Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5)$.

<u>Sol.:</u> <u>Caminho 1</u>

a) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $y = cte = -5$

$$f(x,-5) = x^2 - 15x - 6 = g(x)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2x - 15$$

$$\frac{dg(4)}{dx} = 2 \cdot 4 - 15 = \boxed{-7 = \frac{\partial f}{\partial x}(4,-5)}$$

b) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = de = 4$

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

$$f(4,y) = 16 + 12y + y - 1$$

$$f(4,y) = 15 + 13y = h(y)$$

$$\frac{dh(y)}{dy} = 13$$

$$\frac{dh(-5)}{dy} = \boxed{13 = \frac{\partial f(4,-5)}{\partial y}}$$

Caminho 2

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 8 - 15 = -7 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 12 + 1 = 13$$

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis são também funções de duas variáveis.

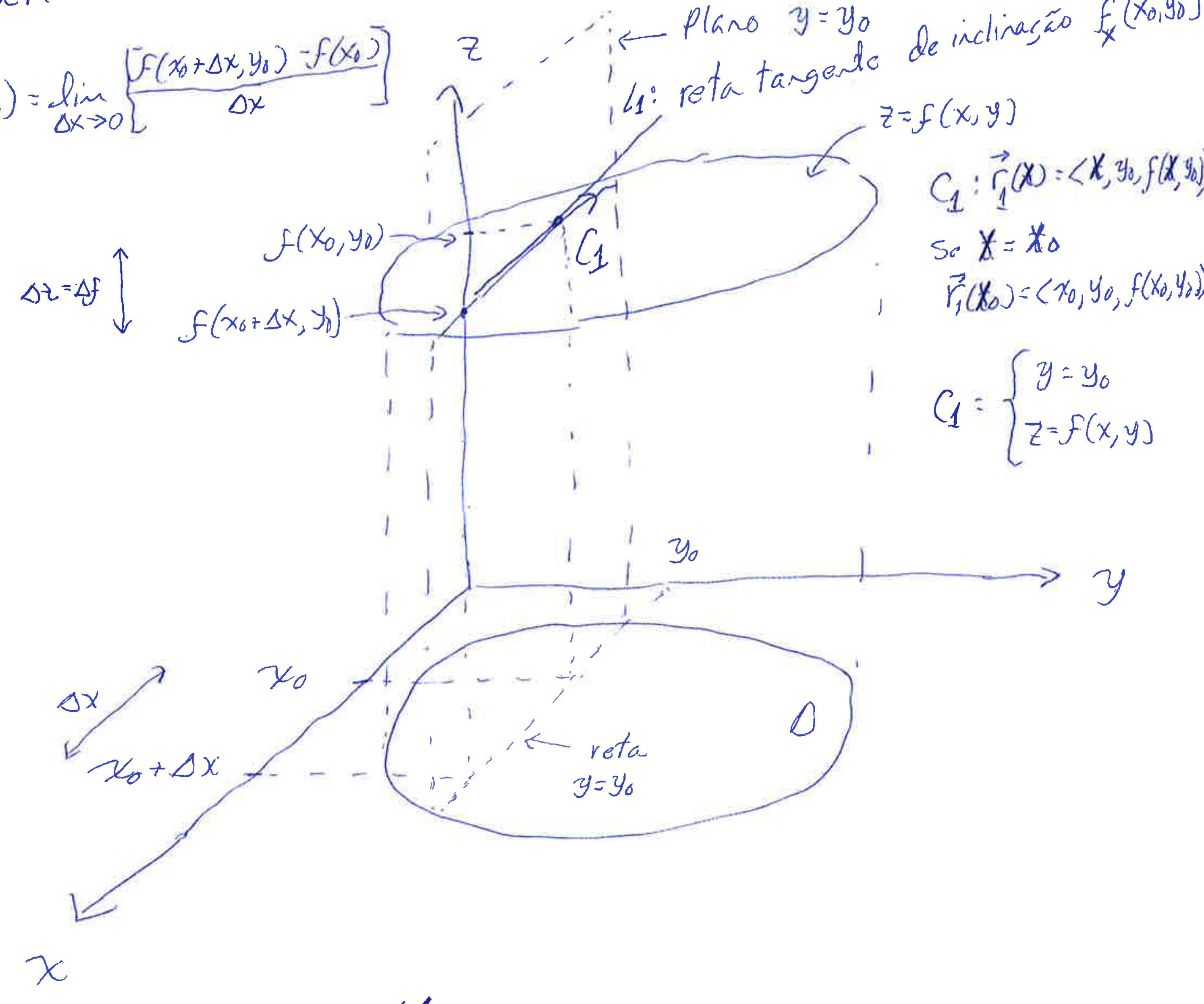
Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais ①

$f(x,y) \rightarrow$ função de duas variáveis

$z = f(x,y) \rightarrow$ Eq. da superfície. Gráfico de f.

- Derivada Parcial de f em relação a x em (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0)}{\Delta x} \right]$$



Equação da Reta $L1$

$$\vec{r}_{L1}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \vec{r}_1{}'(x_0) \cdot t$$

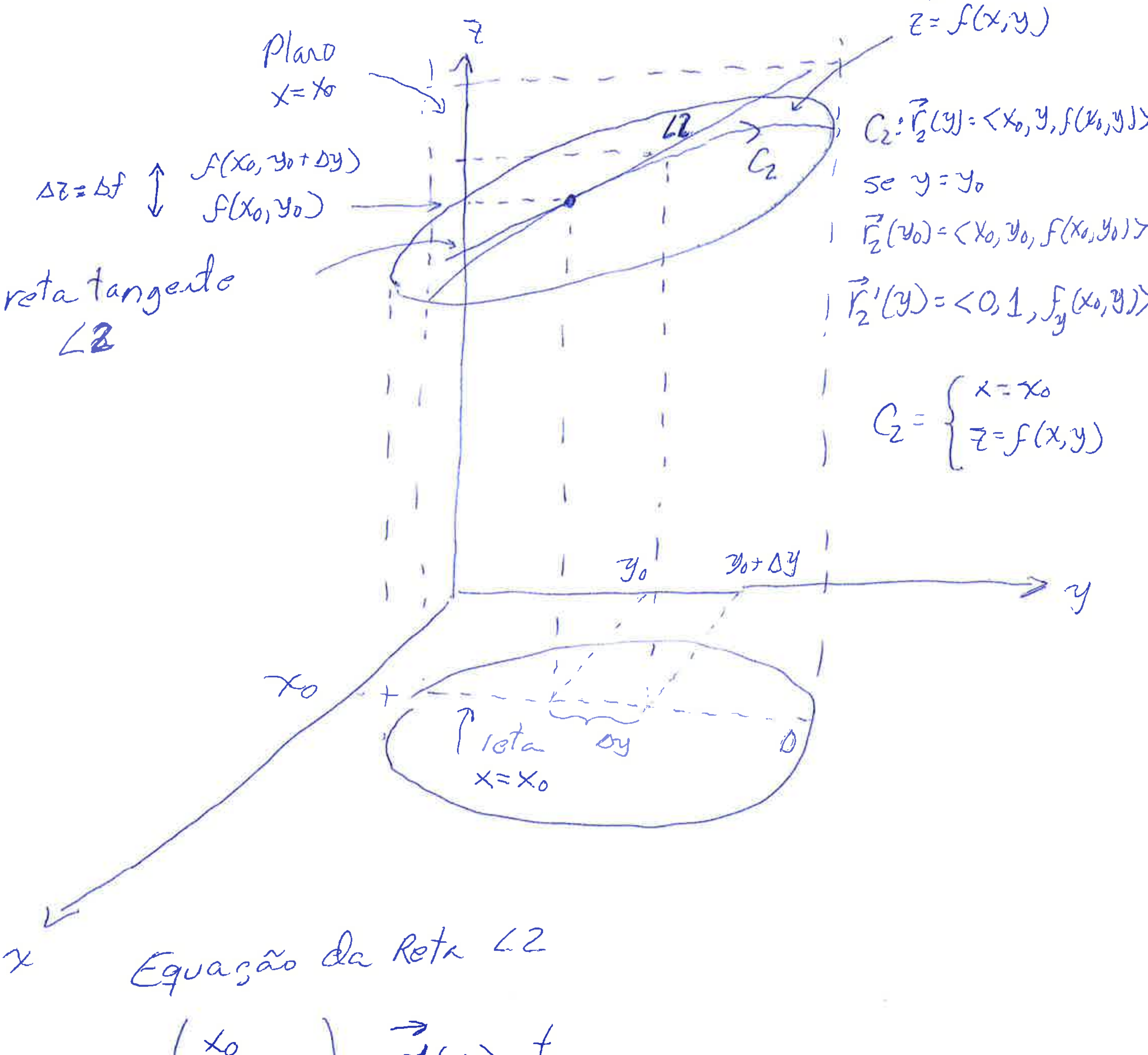
$$\vec{r}_{L1}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{f_x(x_0,y_0)} \end{pmatrix} \cdot t$$

$f_x(x_0,y_0)$ determina a inclinação da reta $L1$.

- Derivada Parcial de f em relação a y em (2)

(x_0, y_0).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{\overbrace{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}^{\Delta f = \Delta z}}{\Delta y}\right]$$



$C_2: \vec{r}_2(y) = \langle x_0, y, f(x_0,y)\rangle$

se $y = y_0$

$\vec{r}_2(y_0) = \langle x_0, y_0, f(x_0,y_0)\rangle$

$\vec{r}_2\,'(y) = \langle 0, 1, f_y(x_0,y)\rangle$

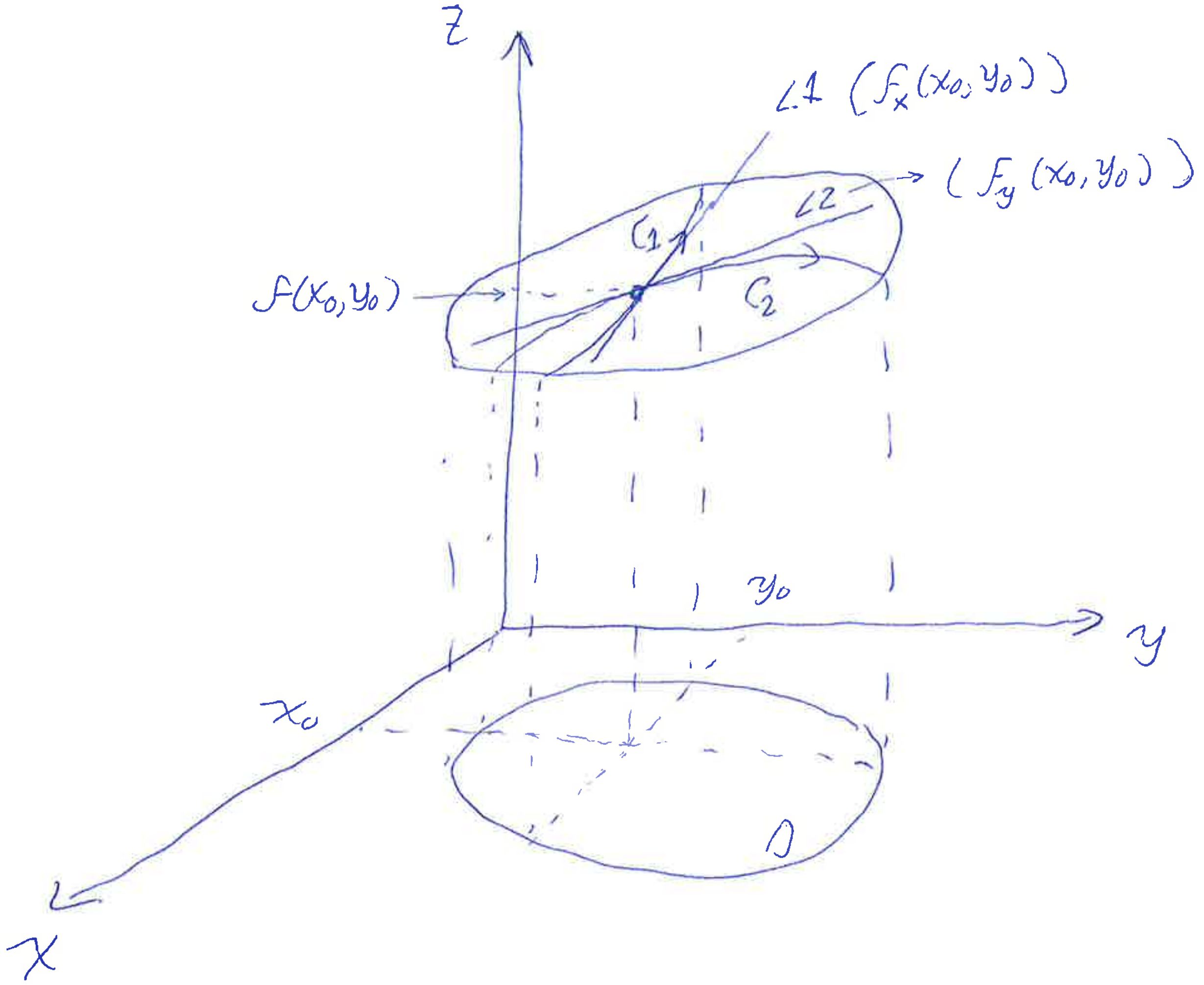
$$C_2 = \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

Equação da Reta $L2$

$$\vec{r}_{L2}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\vec{r}_0} + \vec{r}_2\,'(y)\cdot t$$

$$\vec{r}_{L2}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{f_y(x_0,y_0)} \end{pmatrix} t$$

$f_y(x,y)$ determina a inclinação da reta $L2$.


z
L1 ($f_x(x_0, y_0)$)
($f_y(x_0, y_0)$)
L2
C_1
C_2
$f(x_0, y_0)$
y_0
y
x_0
D
x

Derivadas Parciais Aproximadas de Tabelas e Curvas de Nível.

Ex.: A tabela mostra alguns valores do índice de sensação térmica (ST) medido em graus Celsius como função da temperatura (T) medida por um termômetro e a umidade relativa do ar (U). Note que ST(T,U).

←

Umidade Relativa (%)

Temperatura (°C) ↑

T \ U	50	45	40	35	30
32	39	38	37	36	34
31	38	36	35	34	33
30	36	35	34	33	31
29	34	33	32	31	30
28	33	32	31	29	28

a) Estime a derivada parcial de ST em relação a T no ponto $(T_0, U_0) = (30°C, 40\%)$

b) Estime a derivada parcial de ST em relação a U no ponto $(T_0, U_0) = (30°C, 40\%)$

Sol.: Note que $ST(30°C, 40\%) = 34°C$

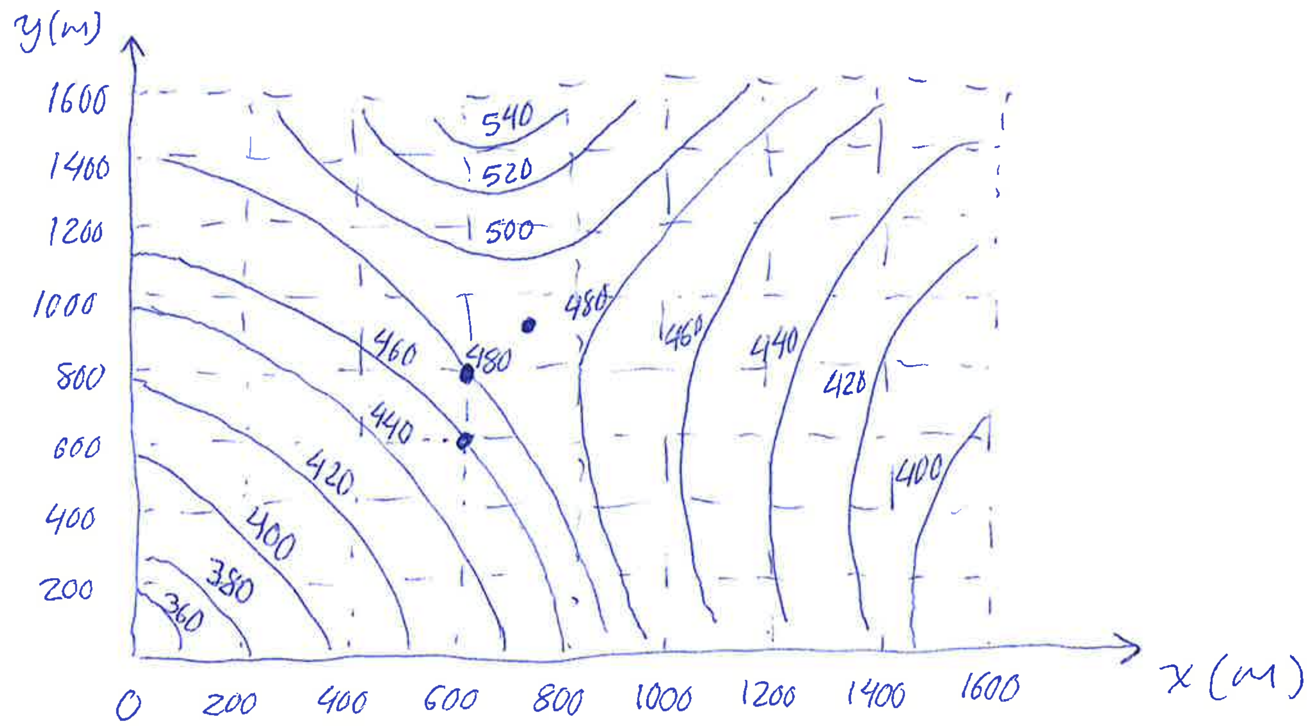
a) $\frac{\partial(ST)}{\partial T}(30°C, 40\%) \approx$ ~~ST(31)~~ $\frac{ST(31°C, 40\%) - ST(29°C, 40\%)}{\underbrace{31°C - 29°C}_{\Delta T}}$

$$\frac{\partial(ST)}{\partial T}(30°C, 40\%) \approx \frac{(35-32)}{2°C}°C = \frac{3}{2}$$

b) $\frac{\partial(ST)}{\partial u}(30°C, 40\%) \approx \frac{ST(30°C, 45\%) - ST(30°C, 35\%)}{45\% - 35\%}$

$$\frac{\partial(ST)}{\partial u}(30°C, 40\%) \approx \frac{(35-33)\,°C}{10\%} = \frac{2\,°C}{10\%} = \frac{1}{5}\,\frac{°C}{\%}$$

Ex. Estude o gráfico de curvas de nível de determinada região. O valor da curva de nível representa a altura em metros.



Temos que $h(x,y)$. Estime

a) $h(600,800)$ e $h(700,900)$

b) $\frac{\partial h}{\partial x}(600,600)$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(600,600)$

Sol.: a) $h(600,800) \approx 480\,m$ e $h(700,900) \approx 490\,m$

b) $\frac{\partial h}{\partial x}(600,600) \approx \frac{h(700,600) - h(600,600)}{\underbrace{700-600}_{\Delta x}} = \frac{(480-460)\,m}{100\,m}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(600,600) \approx \frac{20\,m}{100\,m} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(600,600) \approx \frac{h(600,800) - h(600,600)}{(800-600)\,m} = \frac{(480-460)\,\cancel{m}}{200\,\cancel{m}}$$ 3

$$\frac{\partial h}{\partial y}(600,600) \approx \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais no Computador

V179

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$f_x = x$$

$$f_y = -y$$

Exercícios de Cálculo de Derivadas Parciais

V180 (1)

Ex.: Seja $f(x,y) = y\,sen(xy)$. Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Sol.: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)\cdot y$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\cos(xy)}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1\cdot sen(xy) + y\cos(xy)\cdot x$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = sen(xy) + xy\cos(xy)}$$

Ex.: Seja $f(x,y) = \frac{2y}{y+\cos(x)}$. Encontre $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.

Sol.: Para encontrar f_x vamos escrever f como

$$f(x,y) = 2y\left[y+\cos(x)\right]^{-1}$$

e utilizar a regra da cadeia e a derivada de uma potência

$$f_x(x,y) = 2y(-1)\left[y+\cos(x)\right]^{-2}(-1)\,sen(x)$$

$$\boxed{f_x(x,y) = \frac{2y\,sen(x)}{\left[y+\cos(x)\right]^2}}$$

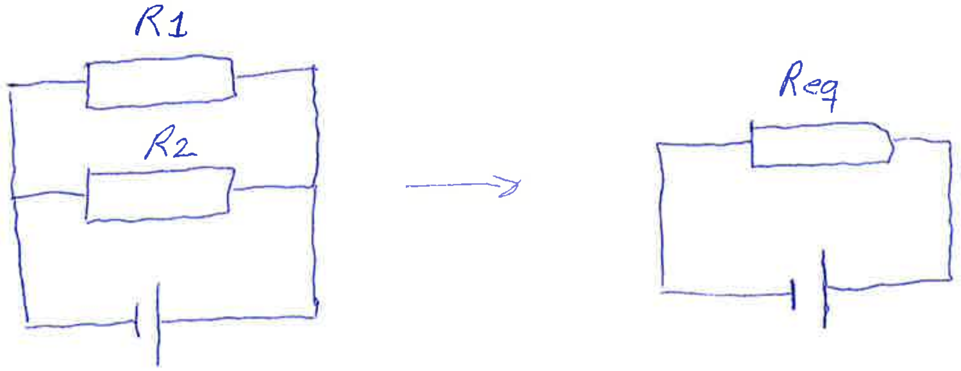
Para encontrar f_y vamos usar a regra do quociente (2)
para derivar. Isto é, $\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$

$$f(x,y) = \frac{2y}{y+\cos(x)}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2[\cancel{y}+\cos(x)] - 1\cdot 2\cancel{y}}{[y+\cos(x)]^2}$$

$$\boxed{f_y(x,y) = \frac{2\cos(x)}{[y+\cos(x)]^2}}$$

Ex.: Calcule a taxa de variação da resistência elétrica equivalente do circuito dado em relação a uma das resistências.



Sol.: Dos cursos de Física sabemos que num circuito em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

$$R_{eq}(R_1,R_2) = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Queremos calcular $\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1}$

Usando a regra do quociente para derivar (3)

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1}(R_1,R_2) = \frac{R_2(\cancel{R_1}+R_2) - \cancel{1\cdot R_1R_2}}{(R_1+R_2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1}(R_1,R_2) = \frac{R_2^{\,2}}{(R_1+R_2)^2}}$$

Taxa de Variação da Resistência Equivalente em relação ~~ao~~ resistência R_1.

Derivada Parcial Implícita - I

- Em Cálculo I estudaram que dada uma eq. do tipo $h(x,y) = cte$ pode não ser possível colocar uma das variáveis em evidência. Mesmo assim em determinados pontos de essa curva é possível encontrar sua inclinação, isto é, $\frac{dy}{dx}$.

Ex.: $\underbrace{x^2 + xy - y^2}_{h(x,y)} = \underbrace{4}_{cte}$

Queremos achar $\frac{dy}{dx}$, vamos supor $y = f(x)$

$$x^2 + x\,y(x) - [y(x)]^2 = 4$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 + x\,y(x) - [y(x)]^2\right] = \frac{d}{dx}[4]$$

$$2x + y(x) + x\,y'(x) - 2y(x)\,y'(x) = 0$$

$$(x - 2y(x))\,y'(x) = -y(x) - 2x$$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{2x + y(x)}{x - 2y(x)} \quad \text{se } x \neq 2y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2x + y}{x - 2y}\right) \quad \text{se } x \neq 2y}$$

- Vamos estudar agora a equação $h(x,y,z) = cte$ no caso em que não conseguimos colocar uma das variáveis em evidência em relação as outras duas.

Ex.: Dada a equação $x^2 + z\,sen(xyz) = 0$ determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ de forma implícita.

Sol.: $\underbrace{x^2 + z\,sen(xyz)}_{h(x,y,z)} = \underbrace{0}_{cte}$

Mas não conseguimos escrever $z = f(x,y)$. Supomos que essa função existe implicitamente.

$$x^2 + z(x,y)\,sen(x\,y\,z(x,y)) = 0$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + z(x,y)\,sen(xy\,z(x,y))\right] = \frac{\partial}{\partial x}[0]$$

$$2x + \frac{\partial z}{\partial x}\,sen(xyz) + z\cos(xyz)\left[yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0$$

$$\left[sen(xyz) + xyz\cos(xyz)\right]\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - yz^2\cos(xyz)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{2x + yz^2\cos(xyz)}{sen(xyz) + xyz\cos(xyz)}\right) \quad \text{se } sen(xyz) \neq -xyz\cos(xyz) \text{ ou } \tan(xyz) \neq -xyz}$$

- $$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + z(x,y)\,sen(xy\,z(x,y))\right] = \frac{\partial}{\partial y}[0]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,sen(xyz) + z\cos(xyz)\left[xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0$$

$$\left[sen(xyz) + xyz\cos(xyz)\right]\frac{\partial z}{\partial y} = -xz^2\cos(xyz)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2\cos(xyz)}{\operatorname{sen}(xyz) + xyz\cos(xyz)} \quad \text{se } \tan(xyz) \neq -xyz}$$ (3)

Note que o denominador nas duas derivadas parciais é o mesmo.

Derivadas Parciais e Continuidade em Funções de Duas Variáveis

VI82

- Para funções de uma variável:

$$\text{Existe } f'(x_0) \Longrightarrow f \text{ em } x_0 \text{ é contínua}$$

- Um teorema análogo não é válido para funções de duas, ou mais variáveis:

$$\text{Existem } f_x(x_0,y_0) \text{ e } f_y(x_0,y_0) \not\Longrightarrow f \text{ em } (x_0,y_0) \text{ seja contínua}$$

Estudemos um contra-exemplo. Seja $f(x,y)$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que as duas derivadas parciais existem no ponto $(0,0)$ usando a definição:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \right]$$

, usaremos que $(x_0,y_0) = (0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \right]$$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{0-0}{\Delta x} \right] = 0$$

$$f_x(0,0) = 0 \quad \leftarrow \text{Existe e é igual a zero}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}\right]$$

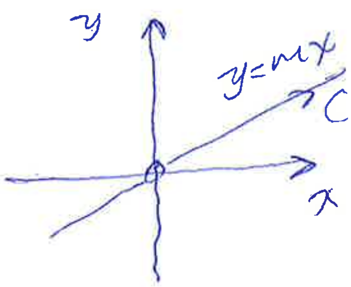
$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}\right]$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{0-0}{\Delta y}\right] = 0$$

$f_y(0,0) = 0$ ← Existe e é igual a zero.

Logo, as duas derivadas parciais existem e são iguais a zero no ponto $(0,0)$. Porém, como tinhamos visto nos videos sobre limite, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$ não existe. Isto é, f em $(0,0)$ não é contínua.

Lembrando, para calcular o limite em $(0,0)$ podemos escolher retas que passem por $(0,0)$:



$C: \vec{r}(t) = \langle t, mt \rangle$

$t_0 = 0$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{seguindo } C}}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{t\,mt}{\cancel{t^2}+m^2\cancel{t^2}}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{m}{1+m^2}\right] = \frac{m}{1+m^2}$$

Como o resultado depende de m o limite não existe.

Derivadas Parciais de Funções com mais de duas Variáveis

(1)

Para uma função de três variáveis, há três derivadas parciais

V183

$$f(x,y,z) \begin{cases} \nearrow f_x(x,y,z) \\ \rightarrow f_y(x,y,z) \\ \searrow f_z(x,y,z) \end{cases}$$

- Para calcular f_x se consideram como constantes y e z

  " " f_y " " " " x e z

  " " f_z " " " " x e y.

- Em geral, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e queremos calcular $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ consideramos constante todas as x_j com $i \neq j$, i e j variam de 1 até n.

__Ex.:__ Seja $f(x,y,z) = x\,\text{sen}(y+3z)$. Encontre f_x, f_y e f_z.

__Sol.:__

$$f_x(x,y,z) = \text{sen}(y+3z)$$

$$f_y(x,y,z) = x\cos(y+3z)\cdot 1$$

$$f_z(x,y,z) = x\cos(y+3z)\cdot 3$$

Ex.: Seja $f(x,y,z) = z\ln(x^2 y\cos(z))$. Determine f_x, f_y, f_z. 2

Sol.: $f_x(x,y,z) = \dfrac{z}{\cancel{x^2}\cancel{y}\cancel{\cos(z)}} \cdot \cancel{y}\cancel{\cos(z)} \cdot 2\cancel{x}$

$$\boxed{f_x(x,y,z) = \frac{2z}{x}}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{z}{\cancel{x^2}y\cancel{\cos(z)}} \cdot \cancel{x^2}\cancel{\cos(z)}$$

$$\boxed{f_y(x,y,z) = \frac{z}{y}}$$

$$f_z(x,y,z) = \ln(x^2y\cos(z)) + \frac{z}{\cancel{x^2y}\cos(z)} \cdot \cancel{x^2y}(-1)\operatorname{sen}(z)$$

$$\boxed{f_z(x,y,z) = \ln(x^2y\cos(z)) - \frac{z\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}}$$

Resolução de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares em Derivadas Parciais de primeira ordem

Ex.: Encontre uma função $f(x,y)$ que satisfaz o sistema de equações lineares em derivadas parciais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x + y & (I) \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x & (II) \end{cases}$$

Sol.: De (II) temos que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$

$$\partial f(x,y) = x\, \partial y$$

$$\int \partial f(x,y) = \int x\, \partial y$$

$$f(x,y) = xy + C(x) \qquad (III)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + C'(x) \qquad (IV)$$

Igualando (I) e (IV)

$$x + \cancel{y} = \cancel{y} + C'(x)$$

$$C'(x) = \frac{dC(x)}{dx} = x$$

$$dC(x) = x\,dx$$

$$\int dC(x) = \int x\,dx$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + D \quad , D \in \mathbb{R}$$

Voltando em (III)

$$f(x,y) = xy + \frac{x^2}{2} + D$$

Vamos verificar se a função encontrada satisfaz as duas eq. diferenciais de partida.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y + \frac{2x}{2} = x + y \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \quad \checkmark$$

Logo, a função encontrada é solução do sistema

Derivadas Parciais de Segunda Ordem e Superiores

$$f(x,y)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y)$ $\qquad$ 1^{ra} Ordem

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$

$(f_x(x,y))_x = f_{xx}(x,y)$

Derivadas Parciais Mistas de 2^{da} ordem

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

$(f_y(x,y))_y = f_{yy}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$(f_x(x,y))_y = f_{xy}(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

$(f_y(x,y))_x = f_{yx}(x,y)$

As derivadas parcias de 2^{da} ordem de $f(x,y)$ podem ser escritas na forma de um determinante.

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Esse determinante vai ter um papel importante para saber se existe máximo ou mínimo em $f(x,y)$.

Ex.: Seja $f(x,y) = x\cos(y) + ye^x$. Encontre as derivadas parciais de segunda ordem.

Sol.:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \cos(y) + ye^x \\ f_y(x,y) &= -x\,\mathrm{sen}(y) + e^x \end{aligned}\right\}$$ Derivadas Parciais de 1ra ordem

$$(f_x)_x = f_{xx}(x,y) = ye^x$$

$$(f_y)_y = -x\cos(y) = f_{yy}(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} (f_x)_y &= f_{\overrightarrow{xy}}(x,y) = -\mathrm{sen}(y) + e^x \\ (f_y)_x &= f_{\overrightarrow{yx}}(x,y) = -\mathrm{sen}(y) + e^x \end{aligned}\right\}$$ iguais

Teorema de Clairaut

Seja f uma função de duas variáveis. Se f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.

~~[illegible]~~. Pelo momento ~~[illegible]~~ vamos explorar suas consequências. A prova se encontra no apêndice do Stewart, Vol. 2, Cálculo.

Ex.: Encontre $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ se $w(x,y) = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$.

Sol.: Seguindo a notação deveríamos primeiro achar $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ e depois $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Chamaremos a essa sequência de 1.

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = x + \frac{e^y[y^2+1] - 2ye^y}{(y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y) = 1.$$

Por outro lado, poderíamos ter notado que existem as segundas derivadas parciais de $w(x,y)$ e são contínuas. Com isso, usando o T. de Clairaut $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

Sequência 2: Primeiro calculamos $\frac{\partial w}{\partial x}$ e depois $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = 1.$$

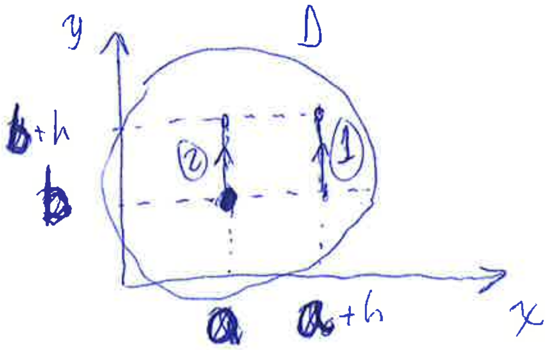
A segunda sequência é mais fácil de calcular.

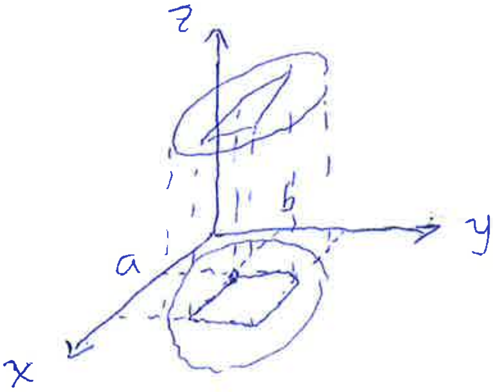
Demonstração do Teorema de Clairaut

Teorema de Clairaut

Suponha que f esteja definida em um disco D que contenha o ponto (a,b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Prova:





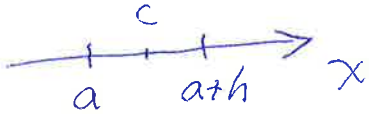
Para pequenos valores de h, $h \neq 0$ considere a diferença

$$\Delta(h) = \underbrace{[f(a+h,b+h) - f(a+h,b)]}_{1} - \underbrace{[f(a,b+h) - f(a,b)]}_{2}$$

Defina $\cancel{g(x) = g(a+h) - g(a)}$

$$g(x) = f(x,b+h) - f(x,b) \text{ , logo}$$

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$



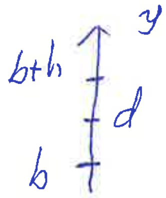
Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e $a+h$ tal que

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a) = g'(c)h = \underbrace{[f_x(c,b+h) - f_x(c,b)]}\,h$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio novamente, agora para f_x na direção y, existe d entre b e $b+h$

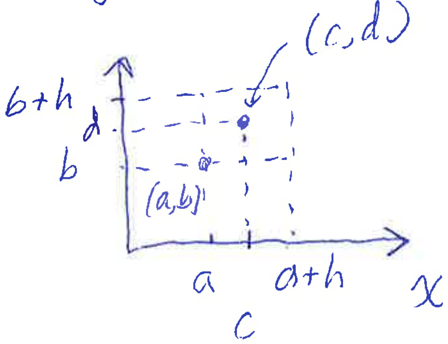
tal que

$$f_x(c,b+h) - f_x(c,b) = f_{xy}(c,d)\,h$$



logo.

$$\Delta(h) = f_{xy}(c,d)\,h^2 \Rightarrow \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(c,d)$$



se $h \to 0 \Rightarrow (c,d) \to (a,b)$

Como $f_{xy}(x,y)$ é contínua em (a,b).

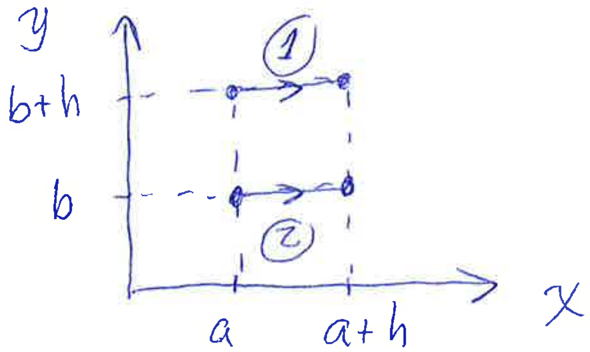
$$\lim_{(c,d)\to(a,b)} \left[f_{xy}(c,d)\right] = f_{xy}(a,b)$$

$$\boxed{\lim_{\substack{\cancel{(c,d)\to(a,b)} \\ h\to 0}} \left(\frac{\Delta(h)}{h^2}\right) = f_{xy}(a,b)} \quad (I).$$

Analogamente, escrevendo a função $\Delta(h)$ como

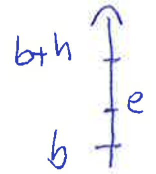
$$\Delta(h) = \underbrace{\left[f(a+h,b+h) - f(a,b+h)\right]}_{1} - \underbrace{\left[f(a+h,b) - f(a,b)\right]}_{2}$$

Trocaram de lugar



Defina $\gamma(y) = f(a+h, y) - f(a,y)$, logo

$$\Delta(h) = \gamma(b+h) - \gamma(b)$$



Se existir $\gamma'(y)$, pelo Teorema do Valor Médio, existirá um número (e) ~~e tal que~~ entre b e $b+h$ tal que

$$\Delta(h) = \gamma(b+h) - \gamma(b) = \gamma'(e)\,h$$

mas $\gamma'(e) = f_y(a+h, e) - f_y(a, e)$

logo $\Delta(h) = [\underbrace{f_y(a+h,e) - f_y(a,e)}]\,h$

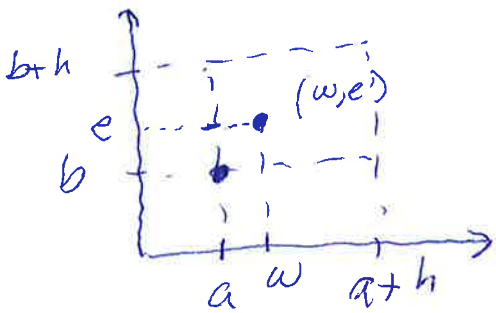
A função $f_y(x,e)$ não depende de y, logo considere agora o intervalo

. Aplicando o Teorema do Valor Médio a $f_y(x,e)$, supondo que existe $f_{yx}(x,e)$, existirá um ponto w entre a e $a+h$ tal que

$$f_y(a+h, e) - f_y(a,e) = f_{yx}(w,e)\cdot h$$

Logo $\Delta(h) = f_{yx}(w,e)\cdot h^2$

e $f_{yx}(w,e) = \dfrac{\Delta(h)}{h^2}$



Se $h \to 0$

$\Downarrow$

$(w,e) \to (a,b)$

Como, por hipótese, $f_{yx}(x,y)$ é contínua em (a,b)

$$\lim_{(w,e)\to(a,b)} \left[f_{yx}(w,e) \right] = f_{yx}(a,b)$$

mas $f_{yx}(w,e) = \dfrac{\Delta(h)}{h^2}$, logo

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta(h)}{h^2} \right] = f_{yx}(a,b). \quad (II)}$$

De (I) e (II) temos que

$$\boxed{f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)}$$

$\boxtimes$

Exercícios de Derivadas Parciais de Ordem Superior

Ex.: Seja $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$. a) Calcule f_{yxz} e f_{yzx}. b) Calcule f_{zyx}.

Sol.: a) Vamos calcular f_{yxz}

$$f_y(x,y,z) = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx}(x,y,z) = -4yz + 2x$$

$$f_{yxz}(x,y,z) = -4y$$

Vamos calcular f_{yzx}

$$f_y(x,y,z) = -4xyz + x^2$$

$$f_{yz}(x,y,z) = -4xy$$

$$f_{yzx}(x,y,z) = -4y$$

$f_{yxz} = f_{yzx}$

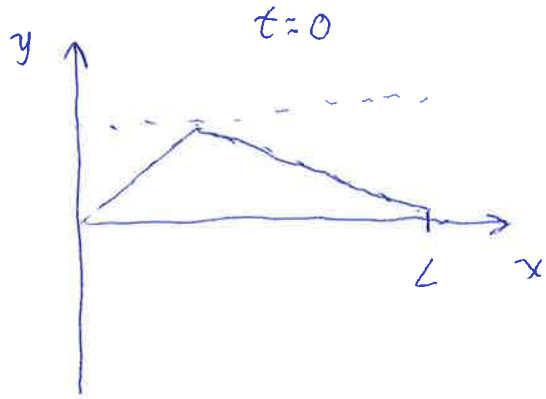
Teorema de Clairaut

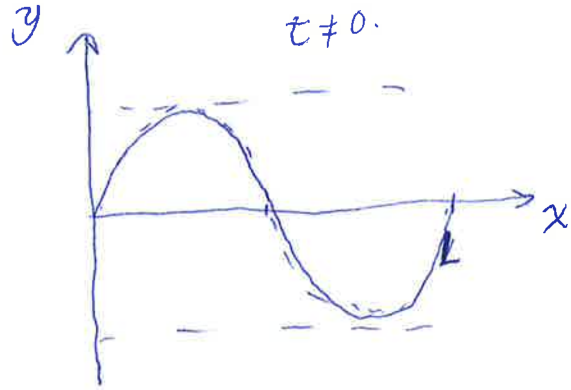
b) $f_{zyx} = f_{yzx} = -4y$

Ex.: Mostre que a função $y(x,t) = \operatorname{sen}(x - vt)$ é uma solução da equação diferencial em derivadas parciais para uma onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$v \to$ velocidade de propagação da onda na direção do eixo x.





Sol.:

$$y(x,t) = \operatorname{sen}(x - vt)$$

$$\begin{cases} y_x(x,t) = \cos(x - vt) \\ y_{xx}(x,t) = -\operatorname{sen}(x - vt) \end{cases}$$

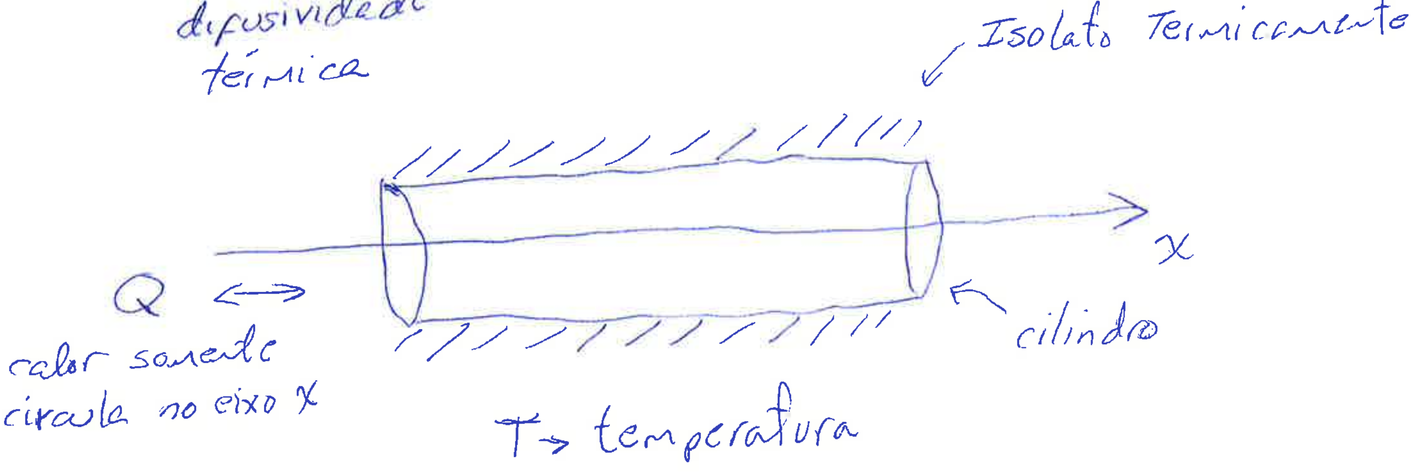
$$\begin{cases} y_t(x,t) = -v\cos(x - vt) \\ y_{tt}(x,t) = -v^2 \operatorname{sen}(x - vt) \end{cases}$$

$$y_{tt} = v^2 y_{xx} \quad \checkmark$$

Ex.: Mostre que a função $T(x,t) = e^{-\alpha^2 t}\operatorname{sen}(x)$ é uma solução da equação diferencial em derivadas parciais de condução do calor:

$$\alpha^2 T_{xx}(x,t) = T_t(x,t)$$

α^2
difusividade térmica



Sol.:

$$T(x,t) = e^{-\alpha^2 t}\,\text{sen}(x)$$

$$T_t(x,t) = -\alpha^2 e^{-\alpha^2 t}\,\text{sen}(x)$$

$$T_x(x,t) = e^{-\alpha^2 t}\cos(x)$$

$$T_{xx}(x,t) = -e^{-\alpha^2 t}\,\text{sen}(x)$$

$$\alpha^2 T_{xx} = T_t \quad \checkmark$$

Diferenciabilidade de Funções de Duas Variáveis

- Em funções de uma variável diferenciabilidade era equivalente a existencia da derivada da função em um ponto do domínio.

- $f(x)$ é diferenciável em x_0 se existe $f'(x_0)$, isto é

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = f'(x_0), \qquad f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

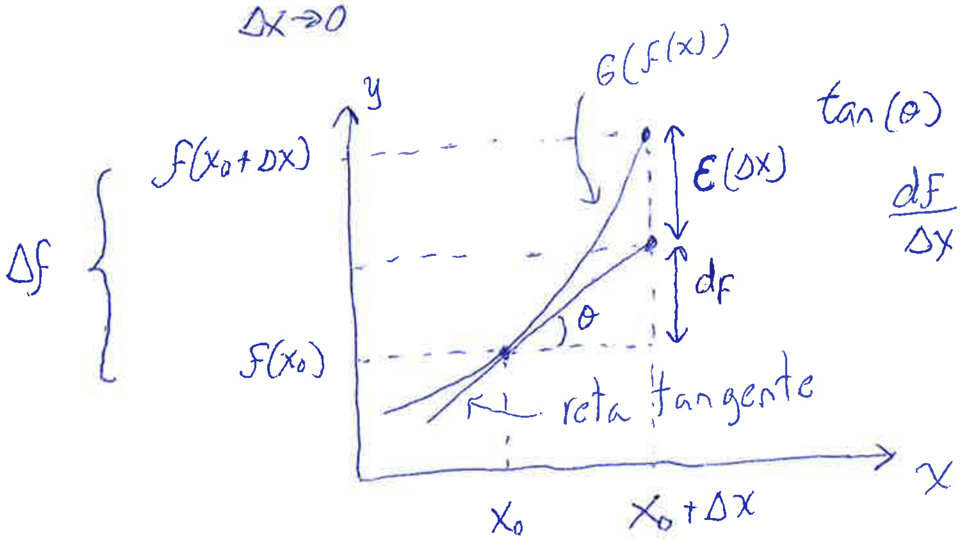
Mas isso é equivalente a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} \right] = 0$$

$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f \rightarrow$ inscremento de f

$f'(x_0)\Delta x = df \rightarrow$ diferencial de f

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f - df}{\Delta x} \right) = 0$$



$\tan(\theta) = f'(x_0)$

$\frac{df}{\Delta x} = f'(x_0)$

$df = f'(x_0)\Delta x$

Se $\Delta x \to 0 \Rightarrow df \to \Delta f$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f - df}{\Delta x} \right) = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x} \right) = 0$$

$$\Delta f = df + \boxed{\varepsilon(\Delta x)} \quad \text{erro}$$

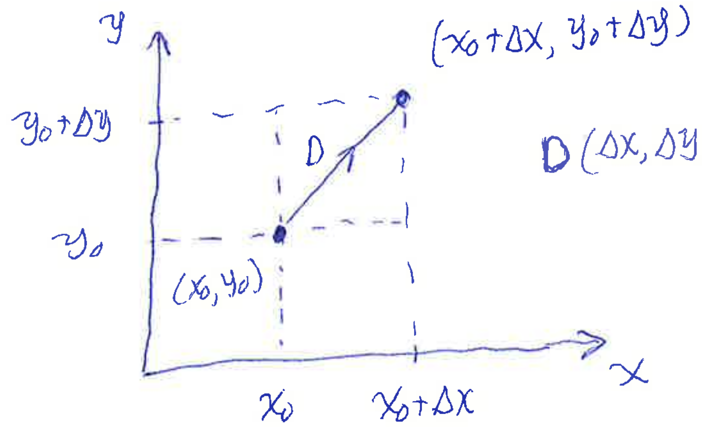
(2)

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$$

Quando $\Delta x \to 0$, o erro tende a zero mais rapidamente que a distância Δx.

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x)}_{\text{curva}} \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}_{\text{reta}}$$

Para funções de duas variáveis não basta exigir a existência das duas derivadas parciais, pois queremos que uma função diferenciável em um ponto seja contínua no mesmo ponto. Vimos um exemplo em um vídeo anterior, onde existiam as duas derivadas parciais, porém a função não era contínua em um ponto.



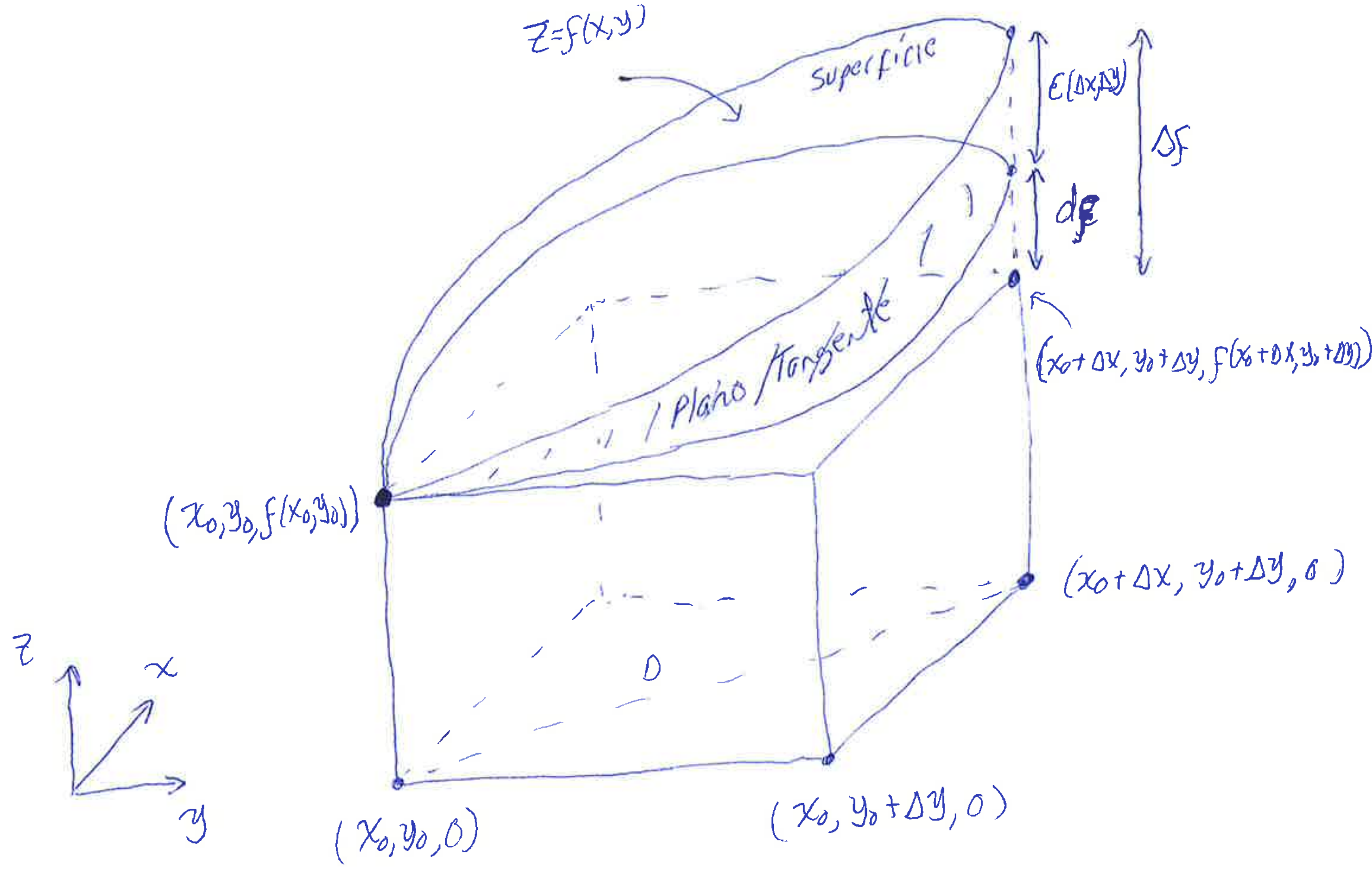
$$D(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

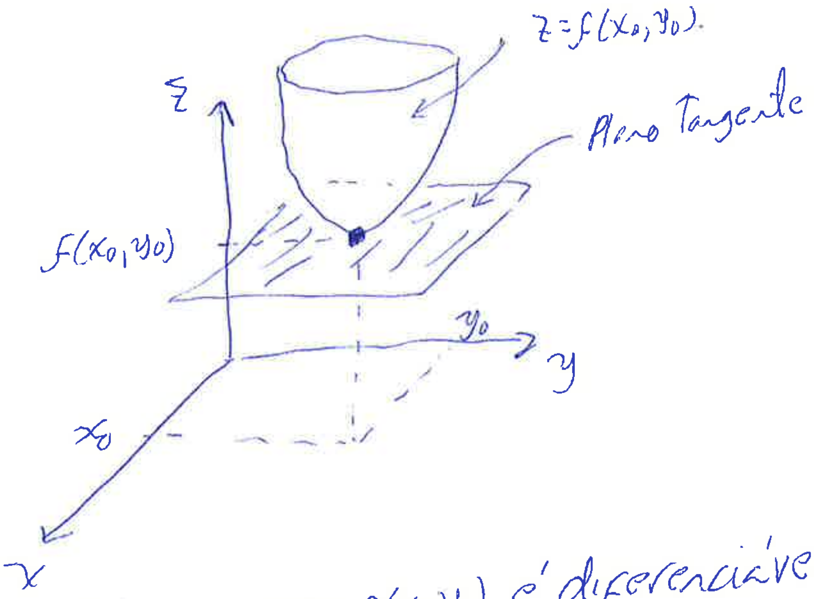
$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$\Delta f = df + \underbrace{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}_{\text{erro}}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(\frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{D} \right) = 0$$





Definição: Dizemos que $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0) se $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ existirem e

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\,\Delta x - f_y(x_0,y_0)\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right) = 0$$

Exemplo de Função NÃO Diferenciável

Definição: $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0) se $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ existirem e

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right) = 0$$

Ex.: Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol.: Primeiro, vamos mostrar que f é contínua em $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2} \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$$

mas $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2} \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\cancelto{0}{x} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)}_{\substack{\text{limitado} \\ \text{não vai a } \infty}} \right) = 0$$

como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y)] = f(0,0) = 0$ a função é contínua em $(0,0)$. Quando $(x,y) \neq (0,0)$ a função é formada a partir de funções contínuas, logo será contínua também.

- Segundo, vamos mostrar $f_x(0,0)$ existe

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} \right) = 1$$

logo $\boxed{f_x(0,0) = 1}$

- Terceiro, vamos mostrar que $f_y(0,0)$ existe

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} \right)$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\frac{0^3}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{0^3}{\Delta y^3} \right) = 0$$

logo, $\boxed{f_y(0,0) = 0}$

- Quarto, vamos mostrar que o limite a seguir, o mesmo da definição de diferenciabilidade, não existe.

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right)$$

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$$

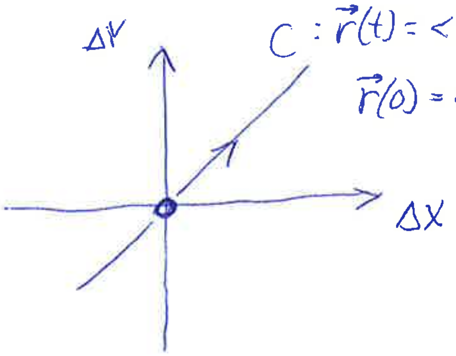
$$\Delta f = \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 = \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$f_x(0,0)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

$$f_y(0,0)\Delta y = 0 \cdot \Delta y = 0$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2} - \Delta x - 0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{\frac{\cancel{\Delta x^3} - \Delta x(\cancel{\Delta x^2} + \Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{-\Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right)$$



$C : \vec{r}(t) = \langle t, t \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle 0, 0 \rangle$

$$\lim_{(t,t)\to(0,0)} \left(\frac{-t \cdot \cancel{t^2}}{(\cancel{t^2+t^2})\sqrt{t^2+t^2}} \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|} \right)$$

$$\text{Se } t>0 \Rightarrow |t| = t \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{-\cancel{t}}{2\sqrt{2}\,\cancel{t}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{se } t<0 \Rightarrow |t| = -t \Rightarrow \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{-\cancel{t}}{2\sqrt{2}\,\cancel{(-)t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

logo, o limite não existe. A função dada não é diferenciável em (0,0), mesmo sendo contínua em (0,0) e existindo as derivadas parcias em (0,0).

Diferenciabilidade implica Continuidade

Teorema: Se f for diferenciável em (x_0, y_0) então f será contínua em (x_0, y_0)

Prova: Por hipóteses, existem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right) = 0$$

onde $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

mas $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \right] = 0$

e $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right) = 0$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right) = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[\left(\cancel{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right) \left(\frac{\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\cancel{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y \right] = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[\Delta f \right] = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \right] = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} (\Delta f) = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \right] = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \right] = f(x_0,y_0)$$

Mas, esta última igualdade significa que f é contínua em (x_0,y_0).

Teorema: Se todas as derivadas parciais de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto.

$f(x,y)$ existem f_x e f_y e são contínuas em (x_0,y_0) $\Rightarrow$ f é diferenciável em (x_0,y_0)

$\not\Leftarrow$

- A prova deste Teorema pode ser estudada no Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo", Vol. 2, 5ª Edição, pag. 195.
- Um exemplo de função diferenciável em $(0,0)$, porém em que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ não são contínuas é

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ex.: Seja $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + z^3$. Em que pontos f é diferenciável?

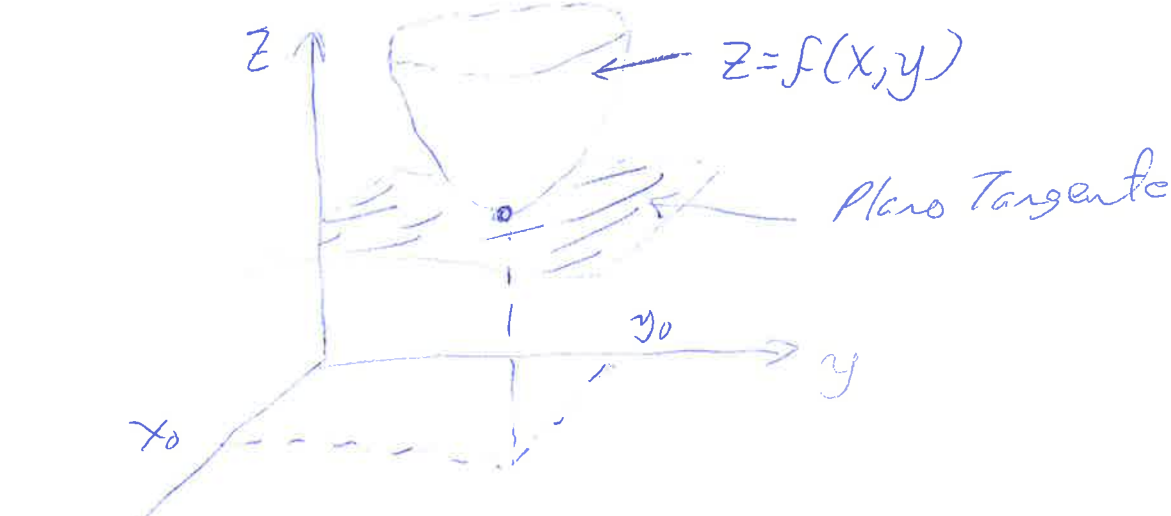
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x + 2y \\ f_y(x,y,z) &= 2x \\ f_z(x,y,z) &= 3z^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

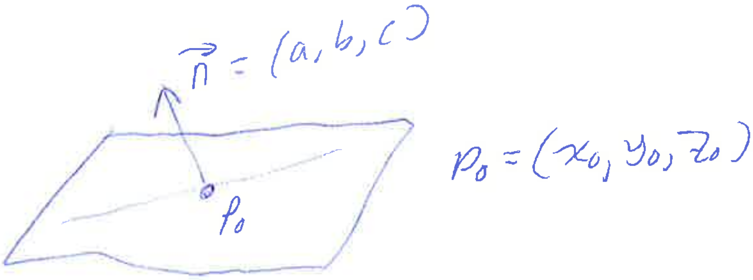
Existem e são contínuas em todo $\mathbb{R}^3$

$$\Downarrow$$

f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$.

Equação do Plano Tangente em um ponto de $z=f(x,y)$ (1)





- Eq. do Plano é: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

  ou supondo $c \neq 0$

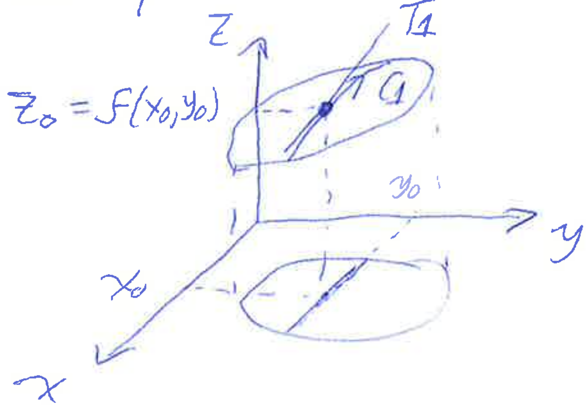
$$z-z_0 = \left(-\frac{a}{c}\right)(x-x_0)\left(-\frac{b}{c}\right)(y-y_0)$$

$$z-z_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0) \quad (I)$$

- Note que quando $y=y_0$, a eq. do plano se transforma na eq. de uma reta:

$$z-z_0 = A(x-x_0) \quad (II)$$

- Mas quando definimos $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $y=\text{cte}=y_0$



e a equação da reta T_1 pode ser escrita como

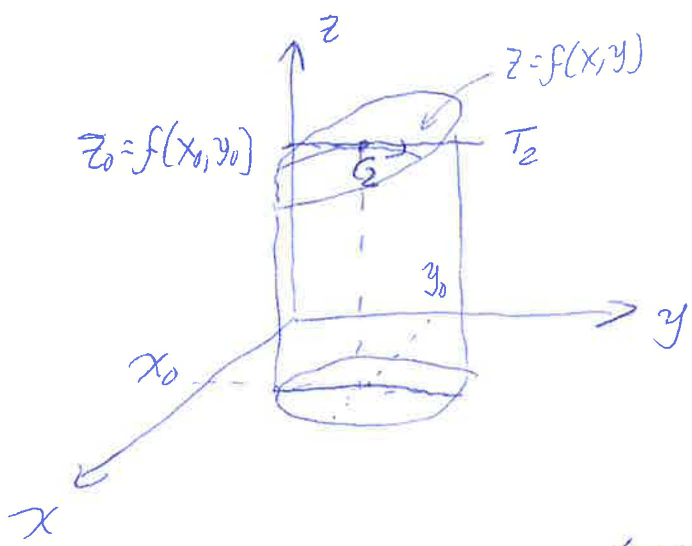
$$T_1 = \begin{cases} y=y_0 \\ z-z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \end{cases}$$

- Comparando a equação de T_1 com II

$$A = f_x(x_0, y_0)$$

- De forma análoga, em (I), se $x = x_0$, a eq. do plano fica $z - z_0 = B(y - y_0)$ (III)

- Na definição de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, fixamos $x = x_0$



e a eq. da reta T_2 pode ser escrita como

$$T_2 = \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

- Comparando T_2 com (III)

$$B = f_y(x_0, y_0)$$

- Logo, se a função f for diferenciável no ponto (x_0, y_0) a equação do plano tangente será

$$\boxed{z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

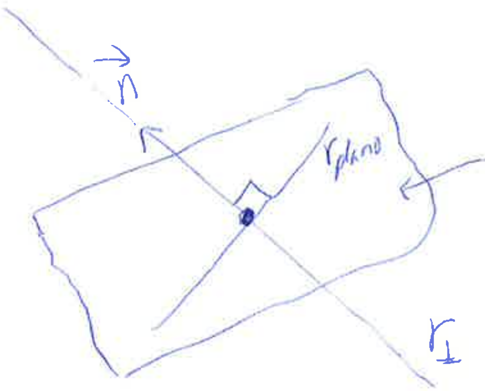
- Se re-escrevemos a eq. do plano tangente como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

notaremos que um vetor normal ao plano é

③

$$\vec{n} = \left(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1 \right)$$



logo, as equações paramétricas de uma reta ($r_\perp$) perpendicular ao plano tangente serão

$$\vec{r_\perp}(t) = \vec{r_0} + \vec{n}\cdot t \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} t$$

Exemplo de Plano Tangente e Reta Normal

Ex.: Encontre as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ no ponto $(4,3)$.

Sol.: A função f está bem definida no ponto $(4,3)$.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2} \longrightarrow \boxed{f(4,3) = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{1}{5}}$$

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \cancel{2}x = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \longrightarrow f_x(4,3) = \frac{-4}{(4^2+3^2)^{3/2}} = \frac{-4}{5^3}$$

$$\boxed{f_x(4,3) = \frac{-4}{125}}$$

Por simetria

$$f_y(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \longrightarrow f_y(4,3) = \frac{-3}{(4^2+3^2)^{3/2}} = \frac{-3}{5^3}$$

$$\boxed{f_y(4,3) = \frac{-3}{125}}$$

OK

A equação do plano tangente, como $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ existem e são contínuas em $(4,3)$ f será diferenciável em $(4,3)$, será da forma

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(4,3) + f_x(4,3)(x-4) + f_y(4,3)(y-3)$$

$$\boxed{z = \frac{1}{5} - \frac{4}{125}(x-4) - \frac{3}{125}(y-3)}$$

A equação da reta normal ao plano tangente ②

$$\vec{r_1}(t) = \vec{r_0} + \vec{n}\cdot t \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \quad \vec{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$$

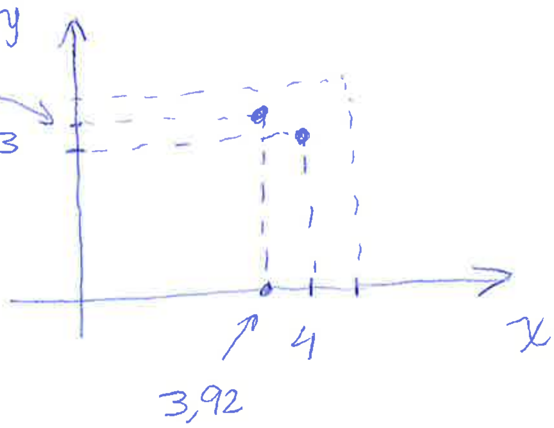
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{125} \\ -\frac{3}{125} \\ -1 \end{pmatrix} t$$

$$r_1 \begin{cases} x(t) = 4 - \frac{4}{125}t \\ y(t) = 3 - \frac{3}{125}t \\ z(t) = \frac{1}{5} - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ex.: Para a mesma função do exemplo anterior use uma aproximação linear para estimar $f(3{,}92\,;\,3{,}01)$. Compare o erro cometido com a aproximação linear com a distância entre os pontos $(4,3)$ e $(3{,}92\,;\,3{,}01)$.

Sol.: $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(4,3) = \frac{1}{5}$

$L(x,y) = z = \frac{1}{5} - \frac{4}{125}(x-4) - \frac{3}{125}(y-3)$ equação do plano tangente em $(4,3)$



$y - y_0 = 3{,}01 - 3$

$\boxed{\Delta y = 0{,}01}$

$\Delta x = x - x_0 = 3{,}92 - 4 = -0{,}08$

$\boxed{\Delta x = -0{,}08}$

(3)

- Seguindo a linearização (equação do plano)

$$L(3{,}92;\ 3{,}01) = \frac{1}{5} - \frac{4}{125}(-0{,}08) - \frac{3}{125}(0{,}01)$$

$$L(3{,}92;\ 3{,}01) = 0{,}20232$$

- O valor exato seguindo f é

$$f(3{,}92;\ 3{,}01) = \frac{1}{\sqrt{(3{,}92)^2 + (3{,}01)^2}} = 0{,}202334$$

$$\text{Erro} = |f - L| = |0{,}202334 - 0{,}20232|$$

$$\text{Erro} = 0{,}0000142382$$

- Distância entre $(4;3)$ e $(3{,}92;3{,}01)$

$$D = \sqrt{(-0{,}08)^2 + (0{,}01)^2}$$

$$D = 0{,}0806226$$

$$\text{Erro Relativo} = \frac{\text{Erro}}{D} = \frac{0{,}0000142382}{0{,}0806226}$$

$$\text{Erro Relativo} = 0{,}018\ \%.$$

O erro cometido usando a linearização é muito menor que a distância entre os pontos $(4,3)$ e $(3{,}92;3{,}01)$. Justamente pelo fato de f ser diferenciável em $(4,3)$.

Diferenciabilidade no Computador

1) $\boxed{f(x,y) = 9 - x^2 - y^2}$

$f_x(x,y) = -2x$

$f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = -2y$

$f_y(0,0) = 0$

Eq. do Plano Tangente

$$z - z_0 = \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{0}\,(x - \underset{\uparrow 0}{x_0}) + \underbrace{f_y(x_0,y_0)}_{0}\,(y - \underset{\uparrow 0}{y_0})$$

$$z_0 = f(0,0) = 9$$

$$\boxed{z = 9} \longrightarrow \vec{r}(x,y) = \langle x, y, 9 \rangle$$

campo vetorial

2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostramos em um vídeo anterior que f é contínua em $(0,0)$, existem as derivadas parciais

$f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = 0$

Porém, f <u>não</u> é diferenciável em $(0,0)$.

A eq. do plano seria

$$z = \underbrace{z_0}_{0} + \underbrace{f_x(0,0)}_{1}\,(x - \underset{\uparrow 0}{x_0}) + \underbrace{f_y(0,0)}_{0}\,(y - \underset{\uparrow 0}{y_0})$$

$$\boxed{z = x} \rightarrow \vec{r}(x,y) = \langle x, y, x \rangle$$

O plano $\boxed{z=x}$ é secante com a superfície $z=f(x,y)$ ②

3)
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Mostramos em um vídeo anterior que $f_x(0,0)=0$ e $f_y(0,0)=0$, porém $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ não existe, logo f não é contínua em $(0,0)$.

A eq. do plano seria

$$z = \underset{0}{\underset{\uparrow}{z_0}} + \underbrace{f_x(0,0)}_{0}(x-\underset{0}{\underset{\uparrow}{x_0}}) + \underbrace{f_y(0,0)}_{0}(y-\underset{0}{\underset{\uparrow}{y_0}})$$

$$\boxed{z=0} \rightarrow \vec{r}(x,y) = \langle x, y, 0 \rangle$$

Regra da Cadeia

Sejam duas ~~Ea~~ funções de uma variável

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: B \subset \mathbb{R} \to C \subset A \subset \mathbb{R}$

$x \in A \mapsto f(x)$ $\qquad t \in B \mapsto g(t)$

A função composta $f \circ g(t) = f(g(t)) = F(t)$ será

$F: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \in B \mapsto f(g(t))$

– Em outras palavras, se $y = f(x)$ e $x = g(t)$ então $y = f(x = g(t)) = F(t)$. Queremos derivar F em relação a t, isto pode ser feito pela REGRA da CADEIA

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$$

$\frac{df}{dx}$: $f \to x$; $\frac{dx}{dt}$: $x \to t$

Devem existir $f'(x)$ e $x'(t)$

ou $f(x)$ e $x(t)$ são diferenciáveis

Ex. Seja $f(x) = x^2$ e $x(t) = sen(t)$. a) Determine a função composta $F(t) = f(x(t))$. b) Encontre a derivada de $F(t)$ em relação a t.

Sol.: a) $f(x(t)) = sen^2(t) = F(t)$

b) $$\frac{dF(t)}{dt} = \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$$

$$= 2x \cdot \cos(t)$$

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = 2 \cdot sen(t)\cos(t)}$$

- Suponha agora que seja dada uma função de duas variáveis $f(x,y)$ e duas funções de uma variável $x(t)$ e $y(t)$. Isto é

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \in D \mapsto f(x,y)$$

$$x: I \subset \mathbb{R} \to X \subset \mathbb{R}$$
$$t \in I \mapsto x(t)$$

$$y: I \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$$
$$t \in I \mapsto y(t)$$

Se $(X \times Y) \subset D$ podemos escrever $f(x(t), y(t)) = F(t)$

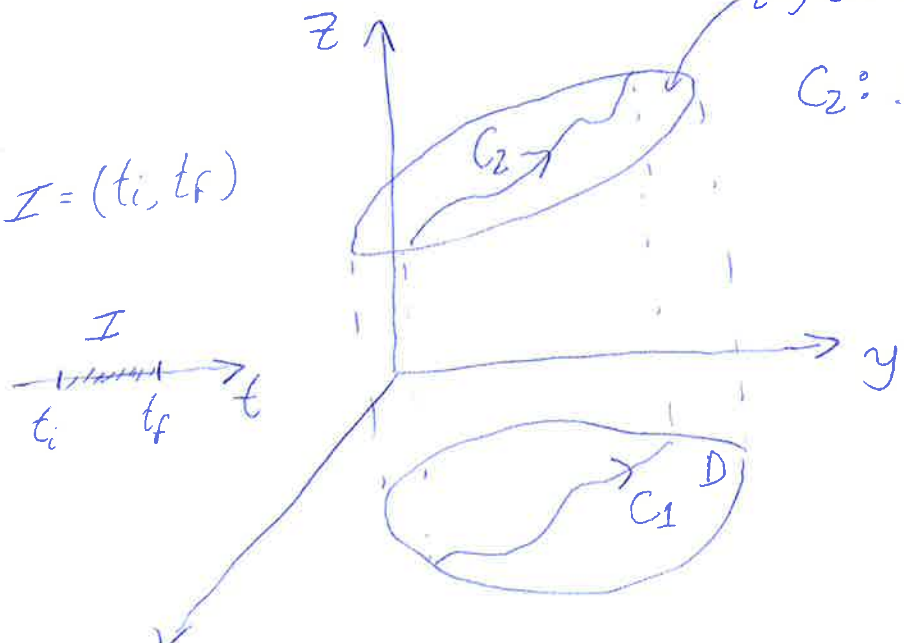
$$F: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \in I \mapsto f(x(t), y(t))$$

- Graficamente, as duas funções $x(t)$ e $y(t)$ podem ser escritas como uma função vetorial $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$.
$\vec{r}(t)$ significa uma curva no domínio de $f(x,y)$.

$z = f(x,y)$ $\quad \vec{r_2}(t) = \langle x(t), y(t), F(t) \rangle$

$C_2: f(x(t), y(t)) = F(t)$

$I = (t_i, t_f)$



$F(t)$ descreve a curva C_2 sobre a superfície $z = f(x,y)$.

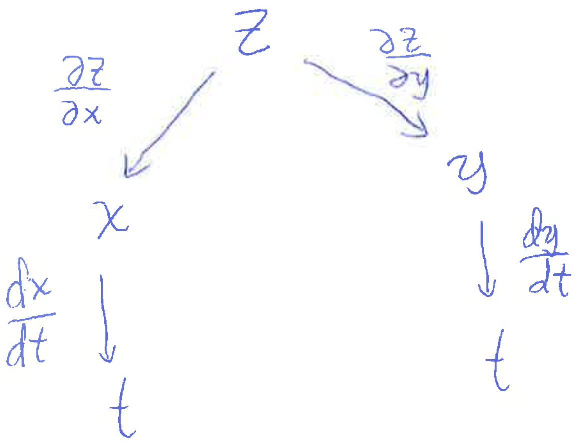
Ou $f(\vec{r}(t)) = F(t)$

$C_1: \vec{r}(t)$

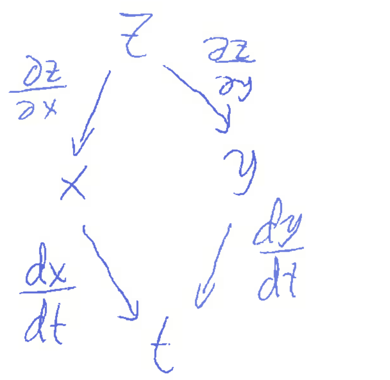
Teorema: Se $x(t)$ e $y(t)$ forem diferenciáveis em t e se $f(x,y)$ for diferenciável no ponto $(x,y)=(x(t),y(t))$, então $z=f(x(t),y(t))$ será diferenciável em t e

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as parciais são calculadas em (x,y).



ou



Ideia da Demonstração

$$\Delta f^{(x_0,y_0)}=f(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f^{(x_0,y_0)}\approx df^{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y$$

quando $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}\approx\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\qquad\blacksquare$$

Exemplos do Uso da Regra da Cadeia - I

Ex. Sejam $z = f(x,y) = x/y$, $x(t) = 2\cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(t)$.

Determine $\frac{dz}{dt}$. ~~~

Sol: $\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), \operatorname{sen}(t) \rangle$

O gráfico de $\vec{r}(t)$ é uma elipse no plano xy.

$\vec{r}\,'(t) = \langle -2\operatorname{sen}(t), \cos(t) \rangle = \langle x'(t), y'(t) \rangle$

$\vec{r}(t)$ é diferenciável.

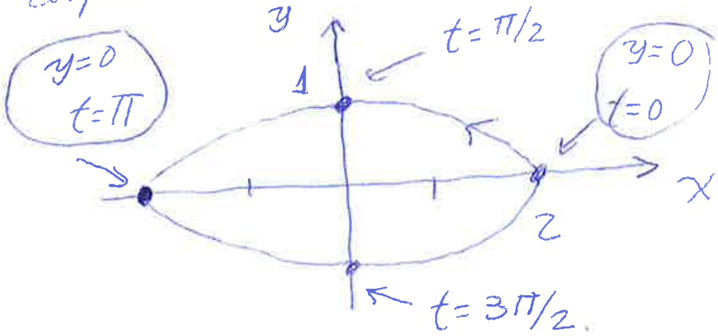
Por outro lado $f(x,y) = x/y$ está bem definida se $y \neq 0$ e suas derivadas parciais são

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

As derivadas parciais são contínuas se $y \neq 0$.

f será diferenciável se $y \neq 0$.



- Logo, se $t \in (0, \pi)$ ou $t \in (\pi, 2\pi)$ (Intervalos Abertos) podemos fazer a composição e derivar seguindo a regra da cadeia

$$f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = F(t)$$

$$F(t) = \frac{2\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$

- Caminho-1

derivando diretamente

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\, 2\cos(t)}{\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-2}{\operatorname{sen}^2(t)}}$$

$t \in (0, \pi)$ ou

$t \in (\pi, 2\pi)$

- Caminho-2: Usando a Regra da Cadeia

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{y}\left[-2\operatorname{sen}(t)\right] + -\frac{x}{y^2}\left[\cos(t)\right]$$

Mas $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ e $x(t) = 2\cos(t)$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-2\cancel{\operatorname{sen}(t)}}{\cancel{\operatorname{sen}(t)}} + \frac{-2\cos(t)}{\operatorname{sen}^2(t)}\cos(t)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = -2 - \frac{2\cos^2(t)}{\operatorname{sen}^2(t)} = \frac{-2\operatorname{sen}^2(t) - 2\cos^2(t)}{\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-2}{\operatorname{sen}^2(t)}}$$

Exemplo do Uso da Regra da Cadeia - II

Ex.: Sejam $w = 5\cos(xy) - \text{sen}(xz)$, $x = 1/t$, $y = t$ e $z = t^3$. Determine $\dfrac{dw}{dt}$.

Sol.: Note que temos uma função de três variáveis $f(x,y,z) = 5\cos(xy) - \text{sen}(xz)$ e uma curva do espaço tridimensional $\vec{r}(t) = \left< \dfrac{1}{t}, t, t^3 \right>$. Devemos ter $t \neq 0$ para $\vec{r}(t)$ ser contínua. f é contínua em todo $\mathbb{R}^3$. Vamos achar as derivadas:

$$\vec{r}\,'(t) = \left< -\frac{1}{t^2}, 1, 3t^2 \right> = \left< x'(t), y'(t), z'(t) \right>$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -5y\,\text{sen}(xy) - z\cos(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -5x\,\text{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x\cos(xz)$$

- $\vec{r}\,'(t)$ é contínua ~~se~~ $t \neq 0$ $\Rightarrow$ $\vec{r}(t)$ é diferenciável se $t \neq 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ são contínuas em todo $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$.

Se $t \neq 0$ podemos construir a função composta

$$w = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = w(t)$$

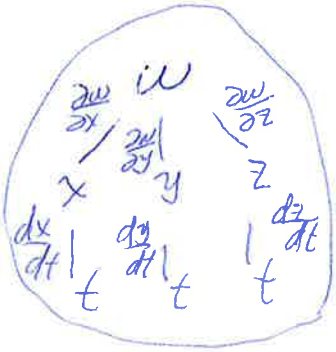
$$w(t) = 5\cos\left(\frac{1}{t}\cdot t\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{t}\cdot t^3\right)$$

$$w(t) = 5\cos(1) - \text{sen}(t^2), \quad t \neq 0$$

Caminho-1: Derivar Diretamente

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\cos(t^2)\,2t = \boxed{-2t\cos(t^2)}, \quad t \neq 0$$

Caminho-2: Usando a Regra da Cadeia



$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(-5y\,\text{sen}(xy) - z\cos(xz)\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \left(-5x\,\text{sen}(xy)\right)\cdot 1 + \left(-x\cos(xz)\right)3t^2.$$

Mas $x = \frac{1}{t}$, $y = t$ e $z = t^3$

$$\frac{dw}{dt} = \left(-5t\,\text{sen}(1) - t^3\cos(t^2)\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \left(-5\frac{1}{t}\,\text{sen}(1)\right) + \left(-\frac{1}{t}\cos(t^2)\right)3t^2$$

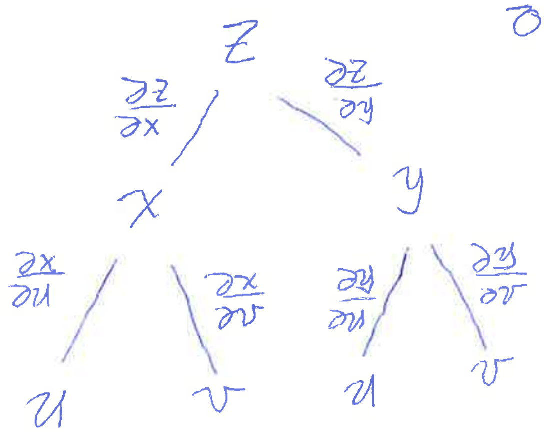
$$\frac{dw}{dt} = \cancel{\frac{5}{t}\,\text{sen}(1)} + t\cos(t^2) - \cancel{\frac{5}{t}\,\text{sen}(1)} - 3t\cos(t^2)$$

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = -2t\cos(t^2)}$$

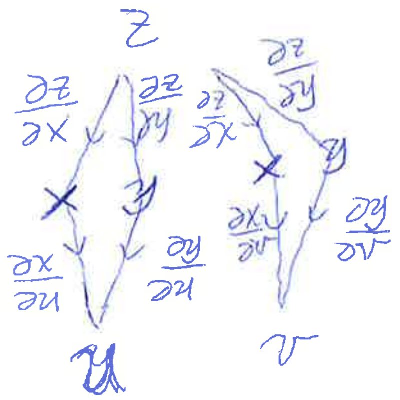
Regra da Cadeia para Derivadas Parciais

Suponha agora que $f(x,y)$ e que $x(u,v)$ e $y(u,v)$.
Podemos pensar na função composta:

$$f(x(u,v),\, y(u,v)) = F(u,v) = z$$



ou



Queremos achar $\frac{\partial F}{\partial u}$ e $\frac{\partial F}{\partial v}$.

Teorema: Se $x(u,v)$ e $y(u,v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u,v), e se $z = f(x,y)$ for diferenciável no ponto $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$, então $z = f(x(u,v), y(u,v))$ terá derivadas parciais de primeira ordem no ponto (u,v) dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) \quad (I) \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) \quad (II)$$

Prova: Vamos demonstrar somente a fórmula (I), a fórmula (II) é feita de forma análoga.

Se v for constante, $v = v_0$, x e y dependem de uma única variável $x(u, v_0)$ e $y(u, v_0)$. Faça a mudança $u = t$, $x(t)$ e $y(t)$ e aplique o teorema anterior sobre regra da cadeia: $f(x(t), y(t)) = z$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}$$

volte a u ($t = u$) e note que as derivadas normais $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ devem ser trocadas pelas derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$. Isto é:

$$\frac{dz}{dt} \to \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{\partial x}{\partial u}$$

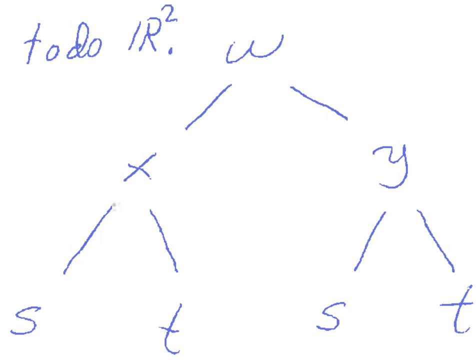
$$\frac{dy}{dt} \to \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$\boxtimes$

Ex.: Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$, onde $w(x,y) = x/y$ e $x(s,t) = se^{t}$ e $y(s,t) = 1 + se^{-t}$.

Sol.: Note que w não está definida em $y = 0$. Existem as derivadas parciais de primeira ordem de x e y em relação a s e t em todo $\mathbb{R}^2$.



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$w(x,y) = \frac{x}{y} \longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$x(s,t) = se^t \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = se^t$$

$$\longrightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = e^t$$

$$y(s,t) = 1 + se^{-t} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -se^{-t}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial y}{\partial s} = e^{-t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{1}{y}\right) se^t + \left(\frac{-x}{y^2}\right)\left(-se^{-t}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{se^t}{1+se^{-t}} + \frac{(s^2e^t)^{\cancel{2}} \cdot e^{-t}}{[1+se^{-t}]^2} = \frac{se^t[1+se^{-t}] + s^2}{[1+se^{-t}]^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{se^t + 2s^2}{[1+se^{-t}]^2} = \frac{s(2s+e^t)}{[1+se^{-t}]^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \left(\frac{1}{y}\right) e^t + -\frac{x}{y^2}\, e^{-t}$$

$$= \frac{e^t}{1+se^{-t}} - \frac{se^t e^{-t}}{[1+se^{-t}]^2} = \frac{e^t + s - s}{[1+se^{-t}]^2} =$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{e^t}{[1+se^{-t}]^2}}$$

Exemplo do Uso da Regra da Cadeia - III

Ex. Expresse $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial t}$ em termos de r e t se

$w(x,y,z) = x + 2y + z^2$, $x(r,t) = r/t$, $y(r,t) = r^2 + \ln(t)$

e $z(r) = 2r$.

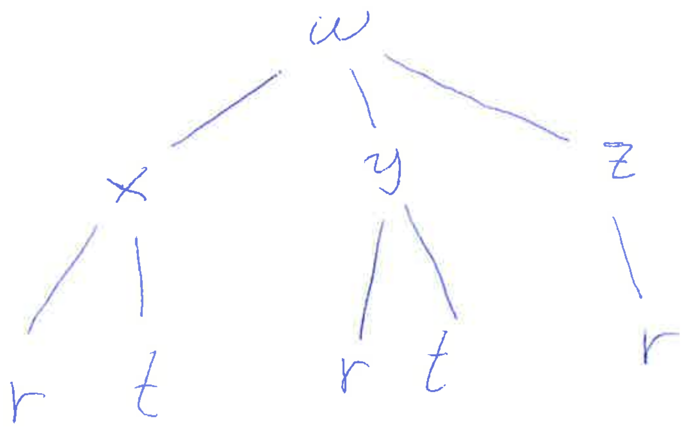
Sol.: w é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$

x é diferenciável se $t \neq 0$, $D_x = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 / t \neq 0\}$

y é " ~~em todo $\mathbb{R}^2$~~ $D_y = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 / t > 0\}$

z é " em todo $\mathbb{R}^2$.

A função composta $w(x(r,t), y(r,t), z(r,t))$ terá como domínio $\{(r,t) \in \mathbb{R}^2 / t > 0\}$



derivada normal

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$$

Três Somandos

$w(x,y,z) = x + 2y + z^2$

$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 1$

$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 2$

$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 2z$

②

$$x(r,t) = \frac{r}{t} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{t}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{r}{t^2}$$

$$y(r,t) = r^2 + \ln(t) \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = 2r$$

$$\longrightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{t}$$

$$z(r) = 2r \longrightarrow \frac{dz}{dr} = 2$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 1 \cdot \frac{1}{t} + 2 \cdot 2r + 2z \cdot 2 = \frac{1}{t} + 4r + 4\underbrace{z}_{2r}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{t} + 12r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \longleftarrow$$ Somente dois somandos.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 1\left(-\frac{r}{t^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{-r}{t^2} + \frac{2}{t} = \frac{-r+2t}{t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{-r+2t}{t^2}}$$

Derivação Implícita usando a Regra da Cadeia

Teorema: Se a equação $f(x,y)=c$ definir y implicitamente como uma função diferenciável de x, e se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Prova: $f(x,y)=c$ ← Eq. em duas variáveis, c é constante

$z=f(x,y)$

$y=g(x)$ ← implicitamente

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\ x & & x \end{tikzcd}$$

$(z=c)$
$$\underbrace{\frac{dz}{dx}}_{0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{dx}{dx}\right)}_{1} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{se } \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}}$$

Ex.: Encontre $\frac{dy}{dx}$ se $y^2 - x^2 = \text{sen}(xy)$.

Sol.: $y^2 - x^2 = \text{sen}(xy)$ Não é possível colocar x (ou y) em evidência.

(Forma $f(x,y)=c$)

$$\underbrace{y^2 - x^2 - \text{sen}(xy)}_{f(x,y)} = \underbrace{0}_{c}$$

$$f(x,y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x - y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x\cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Se $2y \neq x\cos(xy)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2x - y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} \quad \blacksquare$$

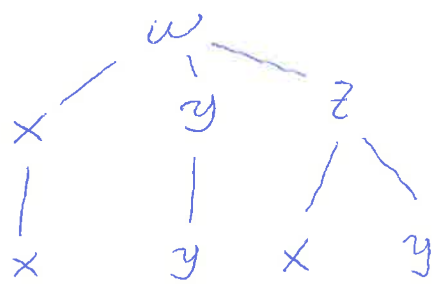
Teorema: Se a equação $f(x,y,z) = c$ definir z implicitamente como uma função diferenciável de x e y, e se $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

Prova: $f(x,y,z) = c$ ← Eq. em três variáveis, c é constante

$w = f(x,y,z)$

$z = g(x,y) \longrightarrow$ implicitamente



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{dx}{dx}\right)}_{1} + \frac{\partial w}{\partial y}\cancel{\frac{dy}{dx}}^{0} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$(w = c)$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}}} \quad \text{se } \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x}\cancelto{0}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)} + \frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{dy}{dy}\right)}_{1} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$(w = c)$ se $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}}}$$

Ex.: Seja $yz - \ln(z) = x + y$. Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Sol.: $yz - \ln(z) = x + y$

$$\underbrace{yz - \ln(z) - x - y}_{f(x,y,z)} = 0 = c$$

$$f(x,y,z) = yz - \ln(z) - x - y$$

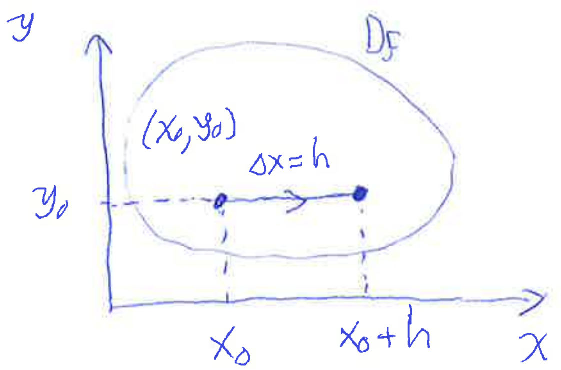
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y - \frac{1}{z}$$

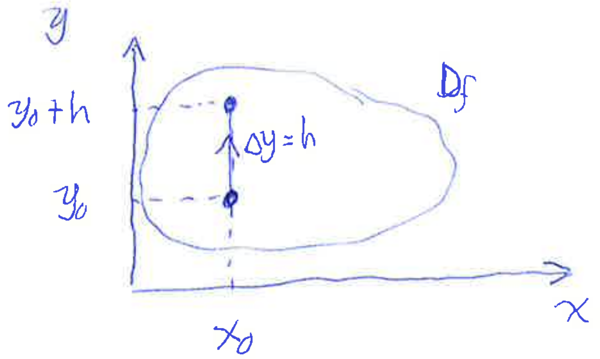
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-1}{y - \frac{1}{z}} = \frac{z}{yz - 1} \\ &\text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{(z-1)}{y - \frac{1}{z}} = \frac{z(1-z)}{yz - 1} \end{aligned}\right\} \text{ Se } y \neq \frac{1}{z}$$

Derivadas Direcionais



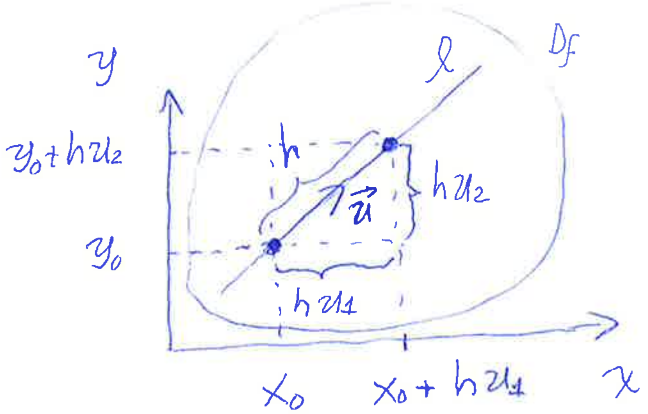
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$\vec{u} = (1, 0) = \vec{i}$



$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$\vec{u} = (0, 1) = \vec{j}$



$$\begin{cases} x(h) = x_0 + hu_1 \\ y(h) = y_0 + hu_2 \end{cases}$$

$h \in \mathbb{R}$

Eq. Paramétricas da reta ℓ, com parâmetro h.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $|\vec{u}| = 1$ (unitário)

$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$

$$(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - (x_0, y_0) = (hu_1, hu_2) = h(u_1, u_2)$$

$$|h(u_1, u_2)| = |h| \, |(u_1, u_2)| = |h| \cdot 1 = |h|$$

Definição: A derivada direcional de $f(x,y)$ na direção e sentido do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$, será denotada e definida como (em (x_0, y_0)):

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} \right]$$

desde que o limite exista.

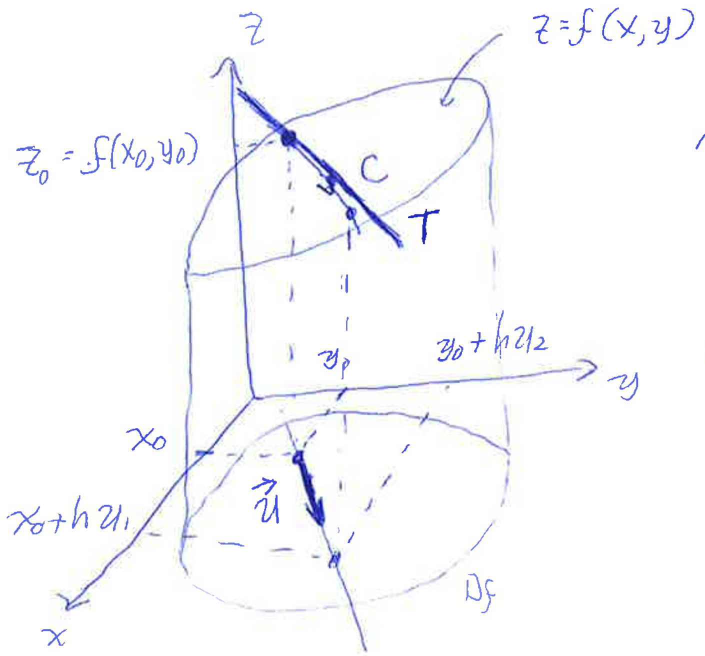
Note que se $\vec{u} = (1,0) = \vec{i}$ então

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

e se $\vec{u} = (0,1) = \vec{j}$, então

$$D_{\vec{j}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

As derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais.



A derivada direcional indica a inclinação da reta tangente T a curva C no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

Teorema: Se $f(x,y)$ é uma função diferenciável, então a derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ pode ser calculada como

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\, u_1 + f_y(x,y)\, u_2$$

Prova: Vamos definir a função $g(h)$ de uma única variável

$$g(h) = f(x_0 + h u_1, y_0 + h u_2)$$

Pela definição de derivada direcional

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+hu_1, y_0+hu_2) - f(x_0,y_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(h)-g(0)}{h}\right)$$

$$= g'(0)$$

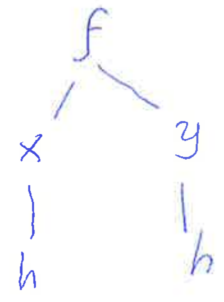
Logo, temos que

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = g'(0)} \quad (I)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$g(h) = f(x, y) \quad \text{onde} \quad x(h) = x_0 + hu_1 \quad e \quad y(h) = y_0 + hu_2$$

Usando a Regra da Cadeia



$$g'(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dh}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dh}\right)$$

$$g'(h) = f_x(x, y)\, u_1 + f_y(x, y)\, u_2$$

Se $h = 0$ então $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$

$$\boxed{g'(0) = f_x(x_0, y_0)\, u_1 + f_y(x_0, y_0)\, u_2} \quad (II)$$

Comparando (I) e (II)

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, u_1 + f_y(x_0, y_0)\, u_2 \quad \boxtimes$$

Exemplos de Cálculo da Derivada Direcional, Vetor Gradiente

Ex. Encontre a derivada de $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ no ponto $(2,0)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3,-4)$.

Sol.: O vetor $\vec{v}$ não é unitário

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(3,-4) \quad \text{é um vetor unitário}$$

$$f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$$

$$f_x(x,y) = e^y - y\,\text{sen}(xy)$$

$$f_y(x,y) = xe^y - x\,\text{sen}(xy)$$

$$f_x(2,0) = e^0 - 0\,\text{sen}(2\cdot 0) = 1$$

$$f_y(2,0) = 2e^0 - 2\,\text{sen}(2\cdot 0) = 2$$

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,u_1 + f_y(x_0,y_0)\,u_2$$

$$D_{(3,-4)} f(2,0) = \underbrace{f_x(2,0)}_{1}\,\frac{3}{5} + \underbrace{f_y(2,0)}_{2}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$D_{(3,-4)} f(2,0) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1 \quad \boxed{}$$

A derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,u_1 + f_y(x_0,y_0)\,u_2$$

$$= \underbrace{\langle f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\rangle}_{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)} \cdot \underbrace{\langle u_1, u_2\rangle}_{\vec{u}}$$

$\underbrace{\vec{\nabla} f(x_0, y_0)}$ $= < f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) >$

vetor gradiente de $f(x,y)$ em (x_0, y_0).

O símbolo $\vec{\nabla}$ pode ser pensado como um operador

$$\vec{\nabla} : f \longrightarrow \vec{\nabla} f$$
$$f(x,y) \mapsto < f_x(x,y), f_y(x,y) >$$

A uma função de duas variáveis associa um campo vetorial

Com isto

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla f(x_0, y_0)} \cdot \vec{u}}$$

Ex.: Determine a derivada direcional da função $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $(0,0,0)$ e na direção do vetor $\vec{v} = (5, 1, -2)$.

Sol.: $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30}$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{30}} (5, 1, -2).$$

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$$

$f_x = e^y + ze^x \qquad f_y = xe^y + e^z \qquad f_z = ye^z + e^x$

$$\vec{\nabla} f = (e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x)$$

$$\vec{\nabla} f(0,0,0) = (1, 1, 1)$$

$$D_{\vec{u}} f(0,0,0) = \vec{\nabla} f(0,0,0) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} (5 + 1 - 2)$$

$$D_{\vec{u}} f(0,0,0) = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

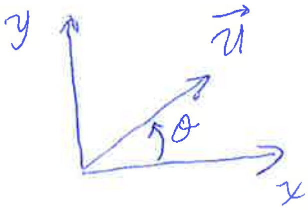
Extremos da Derivada Direcional

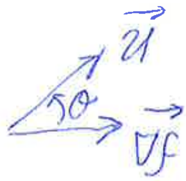
V202

- Em funções de duas variáveis o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e a direção $\vec{u}$ pode ser escrita como

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$$

$$|\vec{u}| = 1$$





- Como $D_{\vec{u}} f(x,y) = \vec{\nabla f} \cdot \vec{u}$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = |\vec{\nabla f}| \cdot \underbrace{|\vec{u}|}_{1} \cos(\theta)$$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = |\vec{\nabla f}| \cos(\theta)$$

- Se $|\vec{\nabla f}| \neq 0$, ou $\vec{\nabla f} \neq \vec{0}$, o valor máximo da derivada direcional acontece quando $\theta = 0$, isto é, quando a direção e sentido de $\vec{u}$ e $\vec{\nabla f}$ coincidem. E o valor máximo é $|\vec{\nabla f}|$.

- Se $|\vec{\nabla f}| \neq 0$, o valor mínimo acontece quando $\theta = \pi$, isto é, a direção de $\vec{u}$ e $\vec{\nabla f}$ coincidem, porém apontam em sentidos contrários. O valor mínimo é $-|\vec{\nabla f}|$.

- Se $|\vec{\nabla f}| \neq 0$ e $\vec{u} \perp \vec{\nabla f} \Rightarrow D_{\vec{u}} f(x,y) = 0$ (Nessa direção f não varia)

- Seja $f(x,y) = xy$, no ponto $(0,0)$ encontre o gradiente

$$\vec{\nabla f} = (f_x, f_y) = (y, x), \quad \vec{\nabla f}(0,0) = \vec{0} \Rightarrow D_{\vec{u}} f(0,0) = 0 \quad \forall \vec{u}$$

Porém, isso não significa que f seja constante perto de $(0,0)$. Somente tem sentido de procurar máximo ou mínimo da derivada direcionar quando $\vec{\nabla f} \neq \vec{0}$.

Ex.: Encontre as direções nas quais $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ no ponto $(1,1)$:

a) Cresce mais rapidamente, qual é o máximo?

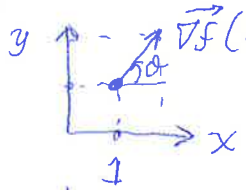
b) Decresce mais rapidamente, qual é o mínimo?

c) Não varia

Sol.: $\vec{\nabla f} = \langle f_x, f_y \rangle = \langle x, y \rangle$

$\vec{\nabla f}(1,1) = \langle 1, 1 \rangle$

$|\vec{\nabla f}(1,1)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$



$\vec{\nabla f}(1,1) = \langle 1, 1 \rangle$

$\theta = \pi/4$

a) A derivada direcional é máxima quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{\nabla f}$ coincidem em direção e sentido. Isto é, formando um ângulo de $45°$ com o eixo x. Ou $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 \rangle$. O valor do máximo é $\sqrt{2}$

b) $\vec{u}$ e $\vec{\nabla f}$ mesma direção, sentidos contrários. Isto é, $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 \rangle$. O valor do mínimo da derivada direcional é $-\sqrt{2}$.

c) $\vec{\nabla f} \cdot \vec{u} = 0 = D_{\vec{u}} f(x,y)$ (f não varia)

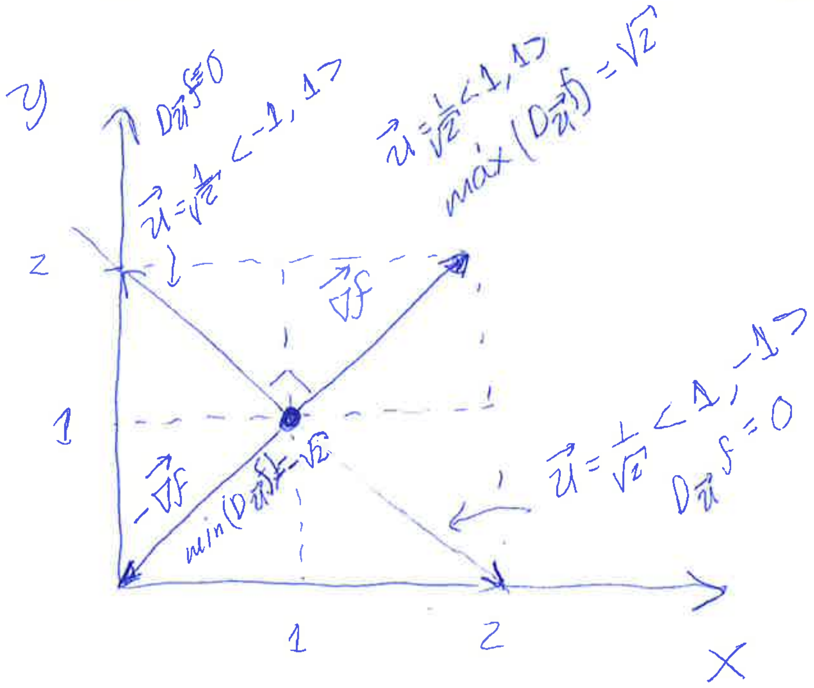
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_1+u_2=0 \Rightarrow u_1 = -u_2$$

Adicionalmente $|\vec{u}| = 1$, logo $\sqrt{u_1^2+u_2^2} = 1$, isto é

$$\sqrt{(-u_2)^2+u_2^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\,|u_2| = 1 \Rightarrow |u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pegando $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \frac{1}{2}\langle -1, 1 \rangle}$

se $u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, -1 >$

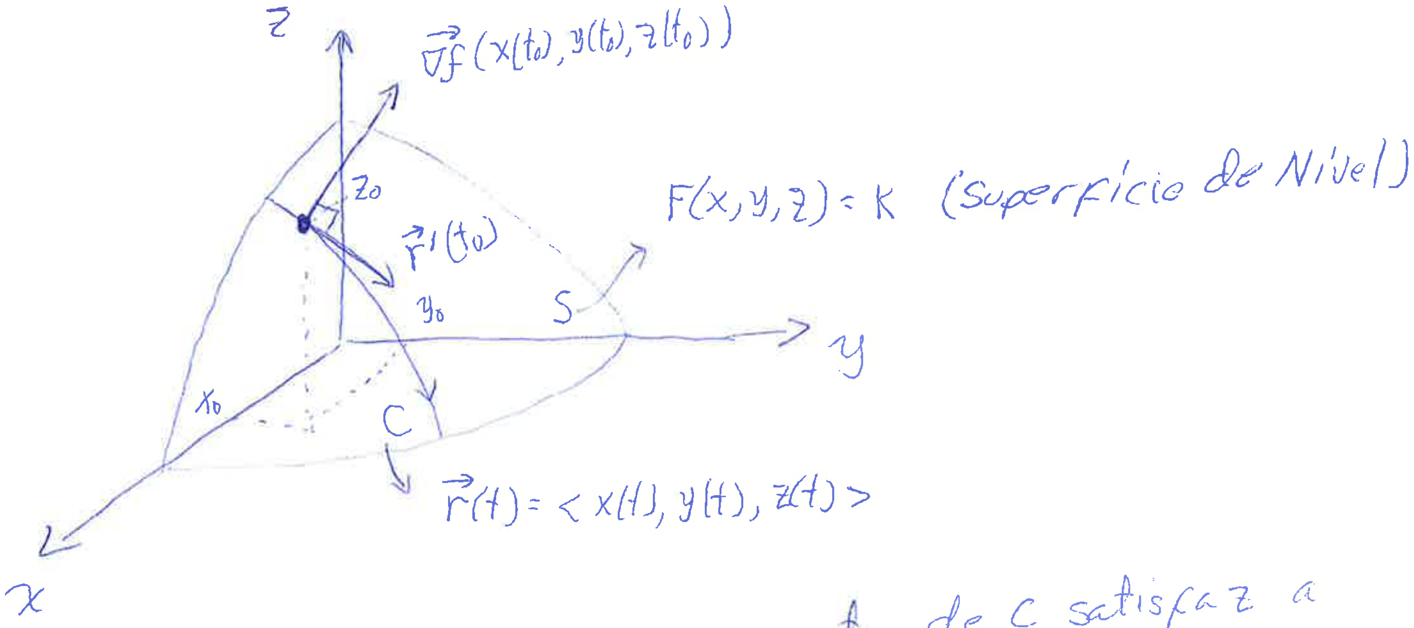


Vetor Gradiente é Perpendicular às Superfícies de Nível

V203 ①

- S é a superfície com equação $F(x,y,z)=k$. Isto é, S é uma superfície de nível da função F.
- $P=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto de S.
- C é uma curva (arbitrária) na superfície S e passa por P.

$$C: \vec{r}(t) = < x(t), y(t), z(t) >$$
$$\vec{r}(t_0) = < x(t_0), y(t_0), z(t_0) > = < x_0, y_0, z_0 > = P$$



Como C pertence a S, qualquer ponto de C satisfaz a equação de S:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Vamos usar a regra da cadeia para derivar em relação a t.
Supondo $F(x,y,z)$ e $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ diferenciáveis.

$$\frac{d}{dt}\left[F(x(t), y(t), z(t))\right] = \underbrace{\frac{d}{dt}(k) = 0}$$

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ x & y & z \\ & t & \end{array}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

$$F_x\, x'(t) + F_y\, y'(t) + F_z\, z'(t) = 0$$

$$< F_x, F_y, F_z > \cdot < x'(t), y'(t), z'(t) > = 0$$

$$\vec{\nabla F} \cdot \vec{r}'(t) = 0 \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se $t = t_0$

$$\vec{\nabla F}(t_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

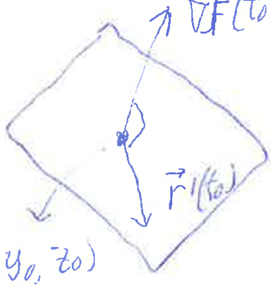
se $\vec{\nabla F}(t_0) \neq \vec{0}$ $\Downarrow$

$$\vec{\nabla F}(t_0) \perp \vec{r}'(t_0)$$

O vetor gradiente é perpendicular ao vetor tangente de qualquer curva C na superfície de S e que passe por P.

– Equação do Plano Tangente a Superfície de Nível $F(x,y,z) = k$ em (x_0, y_0, z_0).

$\vec{\nabla F}(t_0) = \vec{n} \neq \vec{0}$



(x_0, y_0, z_0)

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla F}(x_0,y_0,z_0) \cdot \left[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\right] = 0}$$

– Note que quando a superfície S é o gráfico da função $f(x,y)$ e podemos escrever $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ e

$\vec{\nabla F} < f_x, f_y, -1 >$. Logo a eq. da plano tangente se escreve como tinhamos encontrado anteriormente.

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - 1(z-z_0) = 0$$

ou

$$\boxed{z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

– Também podemos escrever as equações paramétricas da reta normal ao plano tangente como

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \vec{\nabla F}(x(t_0), y(t_0), z(t_0))\,\lambda \, , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

reta normal

$\vec{\nabla F}$ é paralelo a esta reta

Isto é

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\,\lambda \\ y(\lambda) = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\,\lambda \\ z(\lambda) = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\,\lambda \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Ex.: Encontre uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x + y + z = e^{xyz}$ no ponto $(0,0,1)$.

Sol.: $F(x,y,z) = x + y + z - e^{xyz} = 0$ ← Superfície de Nível $K=0$

$F_x = 1 - yz\,e^{xyz} \longrightarrow F_x(0,0,1) = 1 - 0e^0 = 1$

$F_y = 1 - xz\,e^{xyz} \longrightarrow F_y(0,0,1) = 1 - 0e^0 = 1$

$F_z = 1 - xy\,e^{xyz} \longrightarrow F_z(0,0,1) = 1 - 0e^0 = 1$

- Logo, $\nabla F(0,0,1) = \langle 1, 1, 1 \rangle$ e a eq. do plano tangente é

$$1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$\boxed{x + y + z = 1} \quad \text{eq. do plano tangente}$$

- A eq. da reta normal: $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \vec{\nabla} F(t_0)\,\lambda$

$$\begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda$$

$$\begin{cases} x(\lambda) = \lambda \\ y(\lambda) = \lambda \\ z(\lambda) = 1 + \lambda \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{x = y = z - 1}$$

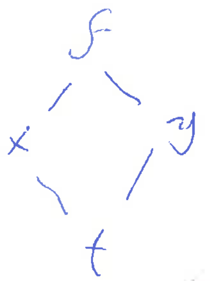
Vetor Gradiente é Perpendicular às Curvas de Nível ①

v2024

- Suponha que a eq. $f(x,y)=k$ define uma curva de nível da função f que passa pelo ponto (x_0,y_0). Imagine que a mesma curva pode ser parametrizada pela função vetorial $\vec{r}(t)=<x(t),y(t)>$, onde $\vec{r}(t_0)=<x(t_0),y(t_0)>=<x_0,y_0>$. Logo

$$f(x(t),y(t))=k$$

Se $f(x,y)$ e $x(t)$ e $y(t)$ forem diferenciáveis podemos usar a regra da cadeia



$$\frac{d}{dt}\left[f(x(t),y(t))\right]=\frac{d}{dt}(k)=0$$

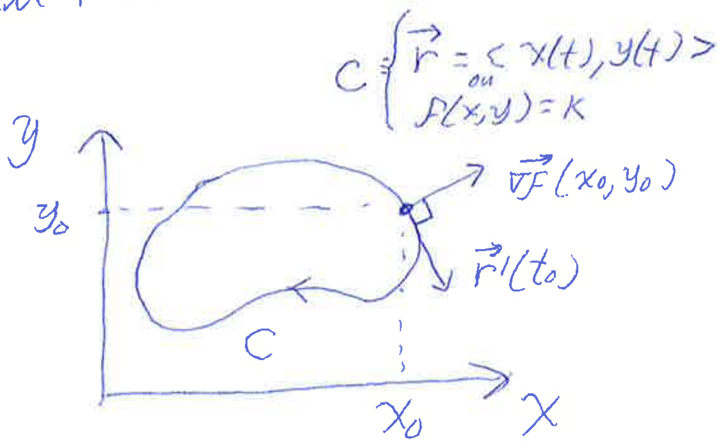
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

$$<\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}>\cdot<\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}>=0$$

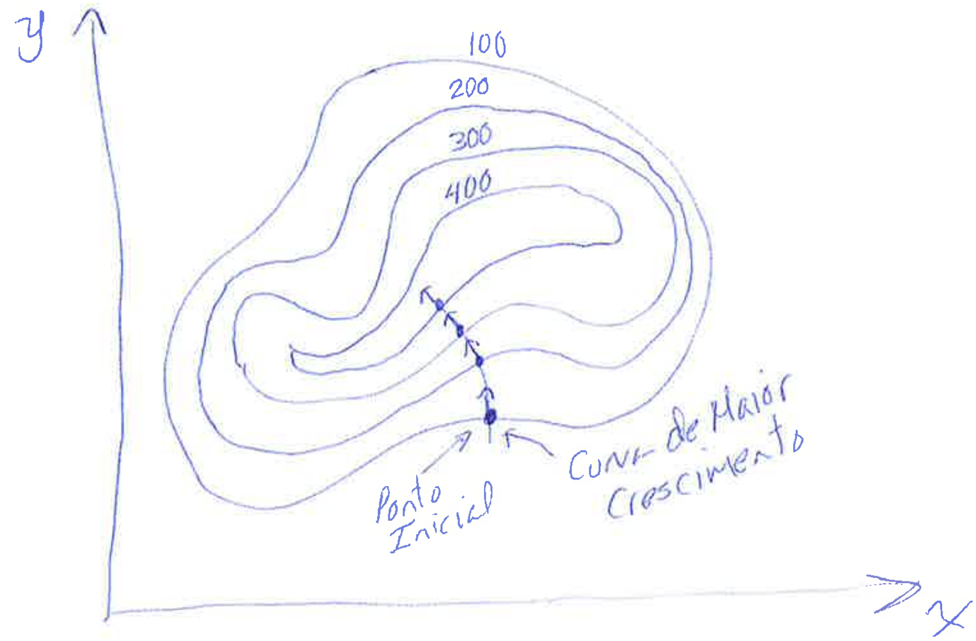
$$\vec{\nabla f}\cdot\vec{r}\,'(t)=0$$

Se $\vec{\nabla f}\neq 0$ e $\vec{r}\,'(t)\neq 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{\nabla f}\perp\vec{r}\,'(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Isto é, o vetor gradiente é perpendicular ~~perp~~ a uma curva de nível lisa em todos os pontos desta. Em particular em (x_0,y_0).



Com um conjunto de curvas de nível, podemos seguir ao vetor gradiente para esboçar a curva de maior crescimento. ~~[illegible]~~ (No domínio de $f(x,y)$).



- Em um mapa de contorno real usualmente os rios seguem as curvas de maior crescimento.

- Resumo da Importância do Vetor Gradiente

• Por um lado ele indica a direção de máxima variação da derivada direcional e por outro lado ele é perpendicular as superfícies de nível (se $f(x,y,z)$) ou as curvas de nível (se $f(x,y)$).

• Esses resultados são de esperar, pois se nos movimentamos seguindo uma superfície (ou uma curva) de nível a função f não muda. A máxima variação acontece justamente andando perpendicularmente a estas.

Vetor Gradiente no Computador

Y205

$f(x,y) = xy$

$\vec{\nabla f}(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle y, x \rangle$

- O vetor gradiento é perpendicular as curvas de nível
- Quanto maior o vetor gradiente mais próximas encontramos as curvas de níveis. Maior é o crescimento de f.