14.2 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. A função é um polinômio, então o limite é igual a $(2^2)(3^2) - 2(2)(3^5) + 3(3) = -927$.

2. A função é um polinômio, então o limite é igual a $(-3)^3 + 3(-3)^2(4)^2 - 5(4)^3 + 1 = 86$.

3. Uma vez que esta é um função racional definida em (0, 0), o limite é igual a $(0 + 0 - 5)/(2 - 0) = -\frac{5}{2}$.

4. Esta é uma função racional definida em $(-2, 1)$, então o limite é igual a $(4 - 2 + 1)/(4 - 1) = 1$.

5. O produto de duas funções contínuas em (π, π), então o limite é igual a $\pi \operatorname{sen} \frac{\pi + \pi}{4} = \pi$.

6. A composição de duas funções contínuas então o limite é igual a $e^{\sqrt{1+8}} = e^3$.

7. Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$. Primeiro, vamos aproximar (0, 0) ao longo do eixo x. Então $f(x, 0) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0)$ não existe. Portanto, $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe.

8. Seja $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$. Quando $(x, y) \to (0, 0)$, ao longo do eixo x, $f(x, y) \to 0$. Mas, quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da reta $y = x$, $f(x, x) = \dfrac{2x^2}{3x^2}$, então $f(x, y) \to \frac{2}{3}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo desta reta. Logo, o limite não existe.

9. $f(x, y) = \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$. Quando $(x, y) \to (0, 0)$, ao longo do eixo x, $f(x, x) \to 1$. Mas, quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da reta $y = x$, $f(x, x) = \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$ para $x \neq 0$, então $f(x, y) \to 2$. Portanto, o limite não existe.

10. $f(x, y) = \dfrac{8x^2y^2}{x^4 + y^4}$. Aproximando (0, 0) ao longo do eixo x, obtém-se $f(x, y) \to 0$. Aproximando (0, 0) ao longo do reta $y = x$, $f(x, x) = \dfrac{8x^4}{2x^4} = 4$ para $x \neq 0$, então ao longo do reta $f(x, y) \to 4$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Portanto, o limite não existe.

11. $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} x = 0$

12. Uma vez que $\dfrac{xy + 1}{x^2 + y^2 + 1}$ é uma função racional definida em (0, 0), o limite é $\dfrac{0 + 1}{0 + 0 + 1} = 1$.

13. $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2 + y^2}$. Usamos o Teorema do Confronto:

$0 \leq \dfrac{|x^3y^2|}{x^2 + y^2} \leq |x^3|$ uma vez que $y^2 \leq x^2 + y^2$, e $|x^3| \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Assim $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$.

14. $f(x, y) = \dfrac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4} = \dfrac{y(x - 2)}{y^2 + (x - 2)^2}$. Logo, $f(x, 0) = \theta$ para $x \neq 2$, então $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (2, 0)$ ao longo do eixo x. Mas

$f(x, y) = \dfrac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4} = \dfrac{y(x - 2)}{y^2 + (x - 2)^2}$ para $x \neq 2$, então $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (2, 0)$, ao longo da reta $y = x - 2$ $(x \neq 2)$. Portanto, o limite não existe.

15. Temos

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)} \text{ (racionalize)}$$

$$\leq \frac{x^2y^2}{2(x^2 + y^2)} \leq x^2 \text{ [uma vez que } y^2 \leq 2\left(x^2 + y^2\right)\text{]}$$

Mas $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} x^2 = 0$, então pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{\sqrt{x^2y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = 0\,.$$

16. Seja $f(x, y) = \dfrac{xy - x}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$. Logo, $f(0, y) = 0$ para $y \neq 1$, então $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 1)$ ao longo do eixo y. Mas

$f(x, x + 1) = \dfrac{x(x + 1 - 1)}{x^2 + (x + 1 - 1)^2} = \dfrac{1}{2}$ para $x \neq 0$, então $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0, 1)$ ao longo da reta $y = x + 1$. Portanto, o limite não existe.

17. Seja

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y}{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}$$

$$= \frac{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$$

Então, $f(1, y) = \dfrac{(y - 1)^2 - 2}{(y + 1)^2}$. Portanto, quando $(x, y) \to (1, -1)$ ao longo da reta $x = 1$, o limite de $f(x, y)$ não existe e, portanto, o limite não existe.

18. $\lim\limits_{(x, y, z) \to (1, 2, 3)} \dfrac{xz^2 - y^2z}{xyz - 1} = \dfrac{1 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 - 1} = -\dfrac{3}{5}$ uma vez que a função é contínua em (1, 2, 3).

19. $\lim\limits_{(x, y, z) \to (2, 3, 0)} [xe^z + \ln(2x - y)]$

$$= (2)\left(e^0\right) + \ln(4 - 3) = 2$$

uma vez que a função é contínua em (2, 3, 0).

20. Seja $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$. Logo $f(x, 0, 0) = 1$ para $x \neq 0$ e $f(0, y, 0) = -1$ para $y \neq 0$, então quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo do eixo x, $f(x, y, z) \to 1$, mas quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo do eixo y, $f(x, y, z) \to -1$. Logo, o limite não existe.

21. Seja $f(x, y, z) = \dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$. Logo $f(x, 0, 0) = 0$ para $x \neq 0$, então quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo do eixo x, $f(x, y, z) \to 0$. Mas $f(x, x, 0) = x^2/(2x^2) = \frac{1}{2}$ para $x \to 0$ então quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo da reta $y = x$, $z = 0$, $f(x, y, z) \to \frac{1}{2}$. Logo, o limite não existe.

22. Podemos demonstrar que o limite em qualquer reta na origem é 0 e, portanto, suspeitar que este limite exista e seja igual a 0. Seja $\varepsilon > 0$. Precisamos determinar $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 0\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta$ ou, de forma equivalente, $\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta$.
Mas $x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ e, analogamente para y^2 e z^2, então $\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \dfrac{(x^2 + y^2 + z^2)^3}{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ para $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Então, escolha $\delta = \varepsilon^{1/4}$ e considere $0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta$. Então,

$$\left|\frac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 0\right| \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^4 < \delta^4 = \left(\varepsilon^{1/4}\right)^4 = \varepsilon.$$

Logo, por definição, $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$

Ou: Use o Teorema do Confronto: $0 \leq \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq x^2y^2$ uma vez que $z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$, e $x^2y^2 \to 0$ quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

23. $h(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
$= e^-(x^4 + x^2y^2 + y^4) \cos(x^4 + x^2y^2 + y^4)$
Uma vez que f é um polinômio, é contínua em $\mathbb{R}^2$ e g é o produto de duas funções, ambas contínuas em $\mathbb{R}$, h é contínua em $\mathbb{R}$.

24. $h(x, y) = g(f(x, y)) = \text{sen}(y \ln x)$.
Uma vez que $f(x, y) = y \ln x$, é contínua em seu domínio $\{(x, y) \mid x > 0\}$ e g é contínua ao longo de $\mathbb{R}$. Portanto, h é contínua em seu domínio $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$, o semiplano direito, excluindo o eixo y.

25. $F(x, y)$ é uma função racional e, portanto, é contínua em seu domínio $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$, ou seja, F é contínua, exceto no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

26. $F(x, y)$ é uma função racional e, portanto, é contínua em seu domínio $D = \{(x, y) \mid x^3 + y^3 \neq 0\} = \{(x, y) \mid y \neq -x\}$, $\mathbb{R}^2$ exceto na reta $y = -x$.

27. $F(x, y) = g(f(x, y))$, onde $f(x, y) = x^4 - y^4$ é um polinômio e, portanto contínuo em $\mathbb{R}^2$ e $g(t) = \text{tg}\, t$, contínua em seu domínio $\{t \mid t \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \text{ um inteiro}\}$. Logo, F é contínua em seu domínio $\{D = \{(x, y) \mid x^4 - y^4 \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \text{ um inteiro}\}$.

28. $G(x, y) = g(x, y) f(x, y)$ onde $g(x, y) = e^{xy}$ e $f(x, y) = \text{sen}(x + y)$, ambas contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo, G é contínua em $\mathbb{R}^2$.

29. $F(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ é uma função racional e, portanto, é contínua em seu domínio $\{(x, y) \mid x^2 - y \neq 0\} = \{(x, y) \mid y \neq x^2\}$, então F é contínua em $\mathbb{R}^2$, exceto a parábola $y = x^2$.

30. $F(x, y) = \ln(2x + 3y) = g(f(x, y))$, onde $f(x, y) = 2x + 3y$, contínua em $\mathbb{R}^2$ e $g(t) = \ln t$, contínua em seu domínio $\{t \mid t > 0\}$. Logo, F é contínua em seu domínio $D = \{(x, y) \mid 2x + 3y > 0\}$.

31. $G(x, y) = g_1(f_1(x, y)) - g_2(f_2(x, y))$, onde $f_1(x, y) = x + y$ e $f_2(x, y) = x - y$ são ambas polinômios e, portanto, contínuas em $\mathbb{R}^2$, e $g_1(t) = \sqrt{t}$, $g_2(s) = \sqrt{s}$ são ambas contínuas em seus respectivos domínios $\{t \mid t \geq 0\}$ e $\{s \mid s \geq 0\}$. Logo, $g_1 \circ f_1$ é contínua em seu domínio $D_1 = \{(x, y) \mid x + y \geq 0\} = \{(x, y) \mid y \geq -x\}$ e $g_2 \circ f_2$ é contínua em seu domínio $D_2 = \{(x, y) \mid x - y \geq 0\} = \{(x, y) \mid y \leq x\}$. Então, G, sendo a diferença dessas duas funções compostas, é contínua em seu domínio

$$D = D_1 \cap D_2 = \{(x, y) \mid -x \leq y \leq x\}$$
$$= \{(x, y) \mid |y| \leq x\}$$

32. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 - z}$ é uma função racional e, portanto, é contínua em seu domínio $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z \neq 0\} = \{(x, y, z) \mid z \neq x^2 + y^2\}$ então f é contínua em $\mathbb{R}^3$ exceto no paraboloide circular $z = x^2 + y^2$.

33. $G(x, y) = g(f(x, y))$, onde $f(x, y) = x\, \text{tg}\, y$, que é contínua em seu domínio $\{(x, y) \mid y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \text{ um inteiro}\}$ e $g(t) = 2^t$, que é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, $G(x, y)$ é contínua em seu domínio $\{D = \{(x, y) \mid y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \text{ um inteiro}\}$.

34. $f(x, y, z) = xg(f(y, z))$ onde $f(y, z) = yz$, contínua em $\mathbb{R}^2$ e $g(t) = \ln t$, contínua em seu domínio $\{t \mid t > 0\}$. Uma vez que $h(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ é contínua em seu domínio $D = \{(x, y, z) \mid yz > 0\}$.

35. $f(x, y, z) = h(x) + k(y)\, g(f(x, z))$, onde $h(x) = x$ e $k(y) = y$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$ e $f(x, z) = x + z$, contínua em $\mathbb{R}^2$, $g(t) = \sqrt{t}$ contínua em seu domínio $D = \{t \mid t \geq 0\}$. Logo, f é contínua em seu domínio $D = \{(x, y, z) \mid x + z \geq 0\}$.

Nos Problemas 36-38, cada f é uma função definida por partes cuja primeira parte é uma função racional definida por toda parte, exceto na origem. Logo, cada f é contínua em $\mathbb{R}^2$, exceto, possivelmente, na origem. Então, para cada uma, precisamos verificar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

36. Seja $z = \sqrt{2}x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{z^2 - y^2}{z^2 + y^2},$$

que não existe pelo Exemplo 1. Logo, f não é contínua em (0, 0) e o maior conjunto no qual f é contínua é $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

37. Uma vez que $x^2 \geq 2x^2 + y^2$, temos $\left|\dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2}\right| \leq |y^3|$.

Sabemos que $|y^3| \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} = 0.$$

Além disso, $f(0, 0) = 0$, então f é contínua em (0, 0). Para $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y)$ é igual a uma função racional e é, portanto, contínua. Logo, f é contínua através de $\mathbb{R}^2$.

38. Seja $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$.

Logo, $g(x, 0) = 0/x^2 = 0$ para $x \neq 0$, então $g(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo do eixo x.

Mas $g(x, x) = \dfrac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$ para $x \neq 0$, então $g(x, y) \to \frac{1}{3}$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da reta $y = x$.

Assim, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$ não existe, então f não é contínua em (0, 0) e o maior conjunto no qual f é contínua é $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

39. (a) Considere $\varepsilon > 0$. Precisamos determinar $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \varepsilon$ sempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$. Mas $|x - a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Assim, determinando $\delta = \varepsilon$ e sendo $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ temos $|x - a| \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$. Logo, pela Definição 1, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$.

(b) O argumento é o mesmo de (a) com os papéis de x e y trocados.

(c) Considere $\varepsilon > 0$ e determine $\delta > 0$. Assim, $|f(x, y) - L| = |c - c| = 0$

$$\leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$$

sempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$. Logo, pela Definição 1, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$.

40. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2},$$

que é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{2r\cos(r^2)}{2r} = \lim_{r\to 0^+} \cos(r^2) = 1$$

Ou: Use o fato de que $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.