11

Sequências e Séries Infinitas

11.9 Representações de Funções como Séries de Potências

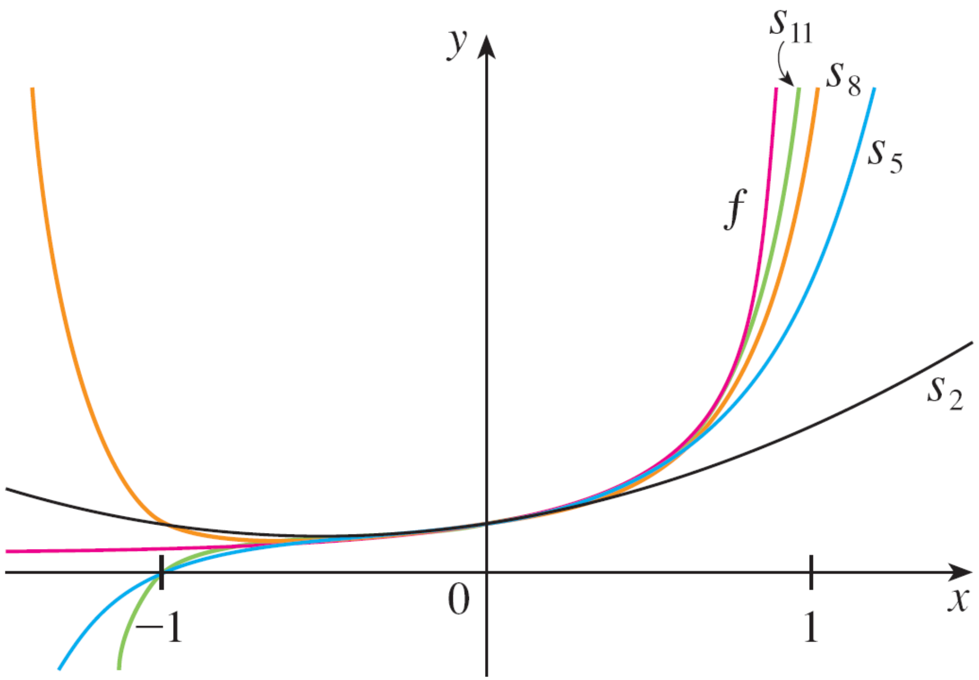
Representações de Funções como Séries de Potências

Começaremos com uma equação que vimos antes:

1
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Encontramos essa equação pela observação de que ela é uma série geométrica com *a* = 1 e *r* = *x*. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1 - x)$ como uma soma de uma série de potências.

Representações de Funções como Séries de Potências



$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais

Figura 1

Exemplo 1

Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO: Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

Derivação e Integração de Séries de Potências

Derivação e Integração de Séries de Potências

A soma da série é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não demonstraremos) diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo**.

Derivação e Integração de Séries de Potências

2 **Teorema** Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a - R, a + R)$ e

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Exemplo 4

Vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é definida por todo *x*. Então, pelo Teorema 2, J_0 é diferenciável para todo *x*, e sua derivada é encontrada pela derivação termo a termo, como a seguir:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$