11

Sequências e Séries Infinitas

11.8 Séries de Potência

Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n's são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série $\boxed{1}$ é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

Séries de Potências

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge em $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$.

Séries de Potências

Em geral, a série da forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

é ch a **séri** **potências sobre *a***. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x - a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assim a série de potências $\boxed{2}$ sempre converge quando $x = a$.

Exemplo 1

Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

SOLUÇÃO: Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n!x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

Pelo Teste de Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série dada converge apenas quando $x = 0$.

Séries de Potências

Veremos que o principal uso de uma série de potências é que ela fornece uma maneira de representar algumas das mais importantes funções que aparecem na matemática, na física e na química. Em particular, a soma da série de potências, é chamada de **função de Bessel.**

Lembre-se de que a soma de uma série é igual ao limite da sequência das somas parciais. Assim, quando definimos a função de Bessel como a soma de uma série, queremos dizer que, para todo número real *x*,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{onde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

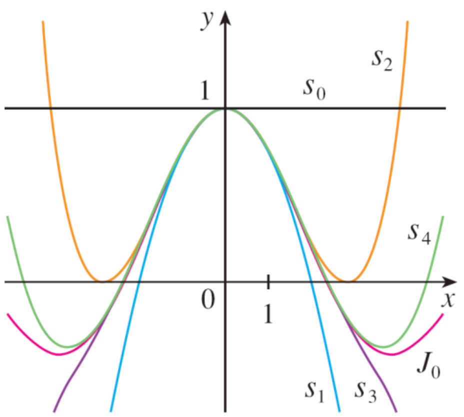
Séries de Potências

As primeiras somas parciais são

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147,456}$$

A Figura 1 mostra os gráficos dessas somas parciais, que são polinômios. Todas são aproximações para a função J_0, mas observe que as aproximações se tornam melhores quando mais termos são incluídos.



Somas parciais da função de Bessel J_0

Figura 1

Séries de Potências

A Figura 2 mostra um gráfico mais completo da função de Bessel.

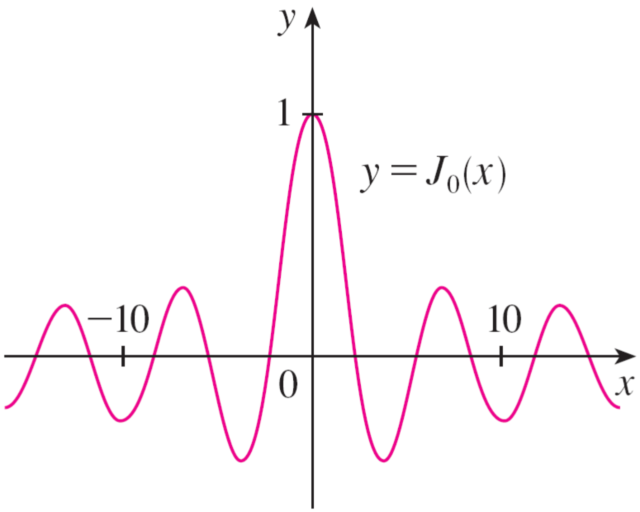


Figura 2

Para as séries de potências que vimos até agora, o conjunto de valores de *x* para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo.

Séries de Potências

O teorema a seguir, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

$\boxed{3}$ **Teorema** Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

O número *R* no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii).

Séries de Potências

O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x - a| < R$ pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma *extremidade* do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer – a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$(a - R, a + R)$ $\quad$ $(a - R, a + R]$ $\quad$ $[a - R, a + R)$ $\quad$ $[a - R, a + R]$

Séries de Potências

A situação é ilustrada na Figura 3.

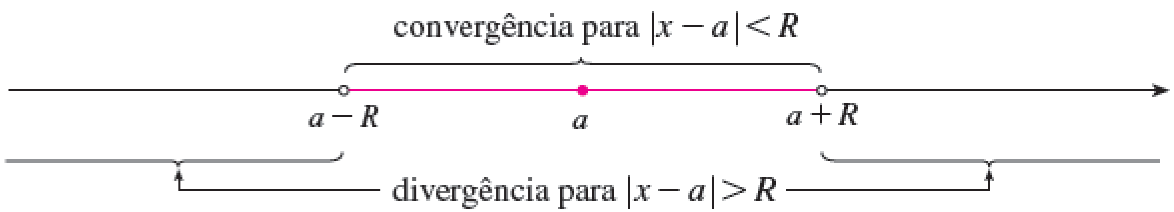


Figura 3

Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$