11

Sequências e Séries Infinitas

11.5 Séries Alternadas

Séries Alternadas

Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão alguns exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

Séries Alternadas

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

Séries Alternadas

Teste de Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Exemplo 1

A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada.

Estimando Somas

Estimando Somas

Uma soma parcial s_n de qualquer série convergente pode ser usada como uma aproximação para a soma total s, porém isso não é de muita utilidade, a menos que possamos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido usando $s \approx s_n$ é o resto $R_n = s - s_n$. O próximo teorema diz que, para séries que satisfazem as condições do Teste da Série Alternada, o tamanho do erro é menor que b_{n+1}, que é o valor absoluto do primeiro termo negligenciado.

Teorema da Estimativa de Séries Alternadas Se $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

$$\text{(i)} \quad 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então, $|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

Exemplo 4

Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ com precisão de três casas decimais.

SOLUÇÃO: Primeiro observamos que a série é convergente pelo Teste da Série Alternada, porque

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{so} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \ \text{as} \ n \to \infty$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Para termos uma ideia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série:

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5.040} + \cdots$$

Observe que $b_7 = \tfrac{1}{5.040} < \tfrac{1}{5.000} = 0{,}0002$

e $s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \leq b_7 < 0{,}0002$$

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal, assim, temos $s \approx 0{,}368$ com precisão de três casas decimais.

Estimando Somas

OBSERVAÇÃO A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.