11

# Sequências e Séries Infinitas

11.3

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série $\Sigma\ 1/[n(n + 1)]$ porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a $n$-ésima soma parcial $s_n$ . Mas geralmente não é fácil descobrir tal fórmula.

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma $s_n$ dos primeiros $n$ termos, mas a tabela de valores aproximados gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

| $n$ | $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ |
|---|---|
| 5 | 1,4636 |
| 10 | 1,5498 |
| 50 | 1,6251 |
| 100 | 1,6350 |
| 500 | 1,6429 |
| 1000 | 1,6439 |
| 5000 | 1,6447 |

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos colocados abaixo dela.

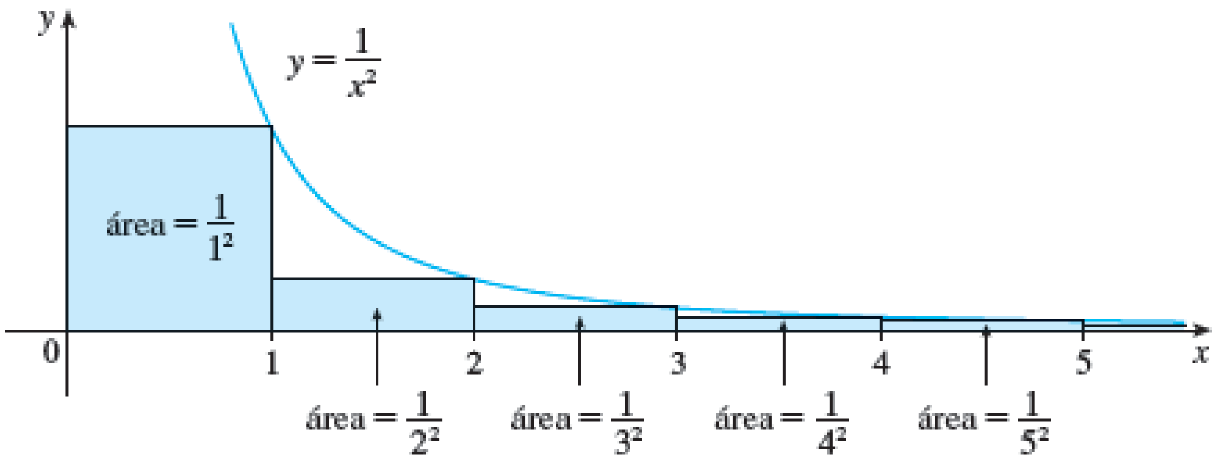


**Figura 1**

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo.

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geq 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Então, as somas parciais são limitadas.Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

A tabela de valores de $s_n$ sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente.

| $n$ | $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ |
|---|---|
| 5 | 3,2317 |
| 10 | 5,0210 |
| 50 | 12,7524 |
| 100 | 18,5896 |
| 500 | 43,2834 |
| 1000 | 61,8010 |
| 5000 | 139,9681 |

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva $y = 1/\sqrt{x}$, porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima*da curva.

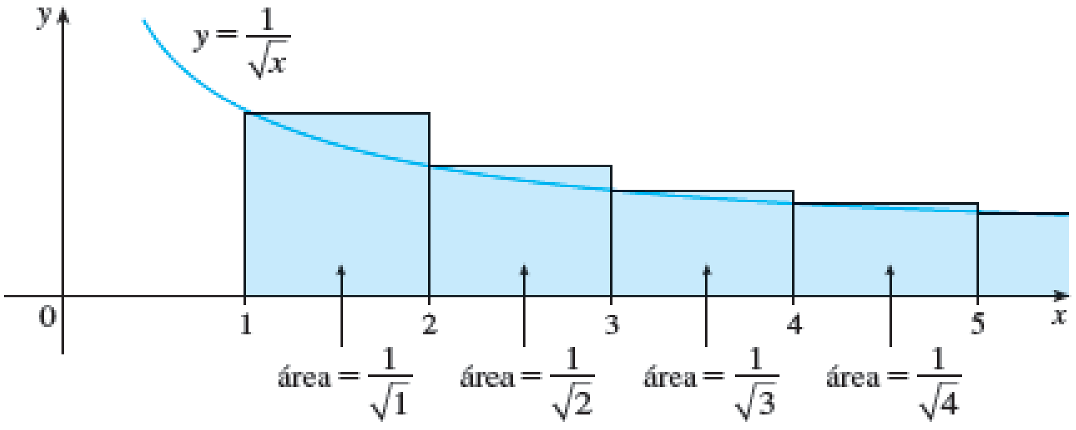


**Figura 2**

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função $y = 1/\sqrt{x}$ na extremidade *esquerda* do intervalo.

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Dessa forma, a soma de todas as áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$, para $x \geq 1$, que é igual à integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx.$ Mas sabemos, que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita, isto é, a série é divergente.

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para demonstrar o seguinte teste.

**O Teste da Integral** Suponha que $f$ seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

# Exemplo 1

Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO: A função $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então, $\int_1^{\infty} 1/(x^2 + 1)dx$ é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série $\Sigma\ 1/(n^2 + 1)$ é convergente.

# O Teste da Integral e Estimativas de Somas

A série é chamada **série *p***.

$\boxed{1}$ A série $p$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

# Exemplo 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série *p* com *p* = 3 > 1.

(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma série *p* com $p = \frac{1}{3} < 1$.

# Exemplo 4

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO: A função $f(x) = (\ln x)/x$ é positiva e contínua para $x > 1$ porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se $f$ é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

# Exemplo 4

Então $f'(x) < 0$ quando $\ln x > 1$, isto é, $x > e$. Segue que $f$ é decrescente quando $x > e$ e podemos aplicar o Teste da Integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série $\Sigma\,(\ln n)/n$ também é divergente pelo Teste da Integral.

# Estimando a Soma de uma Série

# Estimando a Soma de uma Série

Suponha que possamos usar o Teste da Integral para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ seja convergente e que queremos encontrar uma aproximação para a soma $s$ da série. Claro, qualquer soma parcial $s_n$ é uma aproximação para $s$ porque $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Mas quão precisa é tal aproximação? Para descobrir, precisamos estimar o tamanho do **resto**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

O resto $R_n$ é o erro resultante de quando $s_n$, a soma dos $n$ primeiros termos, é utilizada como uma aproximação para a soma total.

# Estimando a Soma de uma Série

Usamos a mesma notação e ideias que no Teste da Integral, supondo que *f* seja decrescente em $[n, \infty)$. Comparando as áreas dos retângulos com a área sob $y = f(x)$ para $x > n$ na Figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

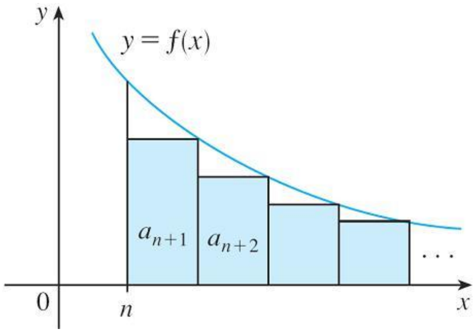


**Figura 3**

De maneira semelhante, vemos, a partir da Figura 4, que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

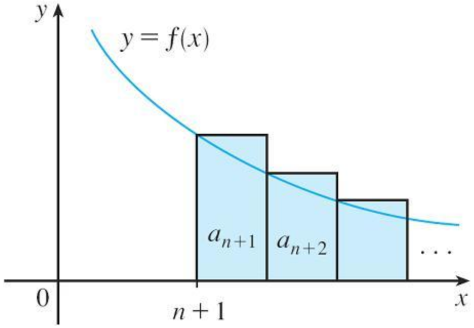


**Figura 4**

# Estimando a Soma de uma Série

Assim, demonstramos a seguinte estimativa para o erro:

$\boxed{2}$ **Estimativa do Resto Para o Teste da Integral** Suponha que $f(k) = a_k$, onde $f$ é uma função contínua, positiva, decrescente para $x \geqslant n$ e $\sum a_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

# Exemplo 5

(a) Aproxime a soma da série $\Sigma\ 1/n^3$ usando a soma dos 10 primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

(b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

SOLUÇÃO: Em ambas as partes (a) e (b) precisamos conhecer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Com $f(x) = 1/x^3$, que satisfaz as condições do Teste da Integral, temos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

# Exemplo 5 – *Solução*

continuação

(a) Aproximando da soma da série pela 10ª soma parcial, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

De acordo com a estimativa do resto em $\boxed{2}$, temos

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por conseguinte, o tamanho do erro é no máximo 0,005.

# Exemplo 5 – *Solução*

continuação

(b) A precisão de 0,0005 significa que temos de encontrar um valor de *n* tal que $R_n \leq 0{,}0005$. Uma vez que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos

$$\frac{1}{2n^2} < 0{,}0005$$

Resolvendo esta desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{1}{0{,}001} = 1.000 \qquad \text{ou} \qquad n > \sqrt{1.000} \approx 31{,}6$$

Precisamos de 32 termos para garantir a precisão em 0,0005.

# Estimando a Soma de uma Série

Se acrescentarmos $s_n$ a cada lado das desigualdades em $\boxed{2}$ temos

**3**

$$\boxed{s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx}$$

porque $s_n + R_n = s$. As desigualdades em $\boxed{3}$ dão um limite inferior e um limite superior para $s$. Eles fornecem uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial $s_n$.