11.1 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, então a sequência é $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \dots\right\}$.

2. $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+4}$, então a sequência é $\left\{\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{13}, \dfrac{13}{16}, \dfrac{17}{19}, \dots\right\}$.

3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{2^n}$, então a sequência é

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots\right\}.$$

4. $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, então a sequência é

$$\left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{-8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \dots\right\}.$$

5. $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$, então a sequência é $\{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$.

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, então a sequência é

$$\left\{1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{2}{3}}, \frac{1}{1+\frac{3}{5}}, \dots\right\}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\frac{5}{3}}, \frac{1}{\frac{8}{5}}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots\right\}.$$

7. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$, então a sequência é

$$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{35}{8}, \frac{63}{8}, \dots\right\}.$$

8. $a_n = \dfrac{(-7)^{n+1}}{n!}$, então a sequência é

$$\left\{49, -\frac{343}{2}, \frac{2401}{6}, -\frac{16\,807}{24}, \frac{117\,649}{120}, \dots\right\}.$$

9. $a_n = 3n - 2$

10. $a_n = \dfrac{n+2}{(n+3)^2}$

11. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

12. $a_n = (-1)^n \; n!$

13. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{2n+1}$

14. $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots\}$. 1 está na metade entre 0 e 2, então podemos pensar em alternadamente subtrair e somar 1 (de 1 e em 1) para obter a seguinte sequência $a_n = 1 - (-1)^{n-1}$.

15. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \tfrac{1}{4}\cdot 0 = 0$. Convergente

16. $\{4\sqrt{n}\}$ claramente diverge uma vez que $\sqrt{n} \to \infty$ quando $n \to \infty$.

17. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-1/n^2}{1+1/n^2} = 1$. Convergente

18. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{3n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-3/n}{3+4/n} = \frac{4}{3}$. Convergente

19. $\{a_n\}$ diverge uma vez que

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{1+1/n} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

20. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}+n^{1/4}}{n^{1/2}+n^{1/5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^{1/6}+1/n^{1/4}}{1+1/n^{3/10}} = \frac{0}{1} = 0$, então a sequência converge.

21. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{(1/n^3)+1} = 0$, então pelo Teorema 6, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2}{1+n^3}\right) = 0$.

22. $a_n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$, então $\{a_n\}$ diverge pela Equação 9 com $r = \frac{\pi}{3} > 1$.

23. $\{a_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$. Esta sequência oscila entre 1, 0 e -1, então a sequência diverge.

24. $a_n = 2 + \cos n\pi$, então

$$\{a_n\} = \{2+\cos\pi, 2+\cos 2\pi, 2+\cos 3\pi, 2+\cos 4\pi, \dots\}$$
$$= \{2-1, 2+1, 2-1, 2+1, \dots\}$$
$$= \{1, 3, 1, 3, \dots\}$$

A sequência oscila entre 1 e 3, então diverge.

25. $0 < \dfrac{3+(-1)^n}{n^2} \le \dfrac{4}{n^2}$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2} = 0$, então $\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}\right\}$ converge para 0 pelo Teorema do Confronto.

26. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\,(n+1)(n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)} = 0$$

Convergente

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{1} = 0$, então pelo Teorema 3, $\left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$ converge para 0.

28. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$ uma vez que $\dfrac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$, então pelo Teorema 6, $\left\{(-1)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ converge para 0.

29. $$b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Então pelo Teorema do Confronto com $a_n = 0$ e $c_n = 1/\sqrt{n}$, para $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\}$ converge para 0.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2+e^x)}{3x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x/(2+e^x)}{3}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{6e^{-x}+3} = \dfrac{1}{3}$

então pelo Teorema 3, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2+e^n)}{3n} = \dfrac{1}{3}$. Convergente

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(\ln 2)2^x} = 0$, então pelo Teorema 3, $\{n2^{-n}\}$ converge para 0.

32. $y = (1+3x)^{1/x} \Rightarrow \ln(y) = \dfrac{1}{x}\ln(1+3x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3/(1+3x)}{1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 = 1$, então pelo Teorema 3, $\left\{(1+3n)^{1/n}\right\}$ converge para 1.

33. Seja $y = x^{-1/x}$. Então $\ln y = -\dfrac{\ln x}{x}$ e

$\lim\limits_{x\to\infty} (\ln y) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\dfrac{1/x}{1}\right) = 0$, então $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 = 1$, e assim $\{a_n\}$ converge para 1.

34. $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

$= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{n+1/2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{1+1/(2n)}}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \dfrac{1}{2}$ quando $n \to \infty$. Convergente

35. $|a_n| = \dfrac{n}{1/n^3 + 1/n + 1} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então $\{a_n\}$ diverge.

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{2+1/n} = 1$, então

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Convergente.

37. $0 < \dfrac{|\operatorname{sen} n|}{\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ quando $n \to \infty$, então pelo Teorema do Confronto e o Teorema 6, $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\right\}$ converge para 0.

38. As série convergem, uma vez que

$a_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$= \dfrac{n(n+1)/2}{n^2}$ [soma do primeiro inteiro positivo n]

$= \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1+1/n}{2} \to \dfrac{1}{2}$ quando $n \to \infty$.

39. $0 \le |a_n| = \dfrac{n|\cos n|}{n^2+1} \le \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n+1/n} \to 0$ quando $n \to \infty$, então pelo Teorema do Confronto e o Teorema 6, $\{a_n\}$converge para 0.

40. $3(n+1)+5 > 3n+5$, logo $\dfrac{1}{3(n+1)+5} < \dfrac{1}{3n+5} \Leftrightarrow$ $a_{n+1} < a_n$, logo $\{a_n\}$ é decrescente. A sequência é limitada porque $a_n = \dfrac{1}{3n+5} > 0$ para $n \ge 1$.

41. $\left\{\dfrac{n-2}{n+2}\right\}$ é crescente uma vez que

$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{n-2}{n+2} < \dfrac{(n+1)-2}{(n+1)+2}$

$\Leftrightarrow (n-2)(n+3) < (n+2)(n-1) \Leftrightarrow$

$n^2+n-6 < n^2+n-2 \Leftrightarrow -6 < -2$, o que é verdadeiro. A sequência é limitada porque

$\dfrac{n-2}{n+2} < \dfrac{n+2}{n+2} = 1$ para $n \ge 1$.

42. $\left\{\dfrac{3n+4}{2n+5}\right\}$ é crescente uma vez que $a_{n+1} \ge a_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(n+1)+4}{2(n+1)+5} \ge \dfrac{3n+4}{2n+5} \Leftrightarrow$

$(3n+7)(2n+5) \ge (3n+4)(2n+7) \Leftrightarrow$

$6n^2+29n+35 \ge 6n^2+29n+28 \Leftrightarrow 35 \ge 28$. A sequência é limitada porque $a_n = \dfrac{3n+4}{2n+5} < \dfrac{4n+10}{2n+5} = 2$ para $n \ge 1$.

43. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ define uma sequência que não é crescente nem decrescente uma vez que $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$. ($a_1 = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$, e $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}346$.) Mas a sequência $\{a_n \mid n \ge 2\}$ obtida omitindo o primeiro termo a_1 *é* decrescente. Para poder ver isso, observe que se

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ para $x \ge 0$, então

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)-2x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$$

$$= \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} \le 0 \text{ para } x \ge 2.$$

A sequência é limitada uma vez que $a_n > 0$ para todo $n \ge 1$ e $a_n \le a_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ para todo $n \ge 1$.