11

Sequências e Séries Infinitas

11.1 Sequências

Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo,* a_2 é o *segundo termo,* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo.* Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

Sequências

Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

Notação A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Exemplo 1

Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o *n*-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

Exemplo 1

continuação

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos \dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_n = \cos \dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos \dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

Sequências

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a), $a_n = n/(n + 1)$, pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na Figura 1, ou traçando seu gráfico, como na Figura 2.

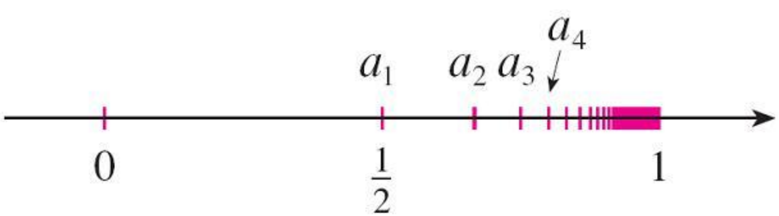

Figura 1

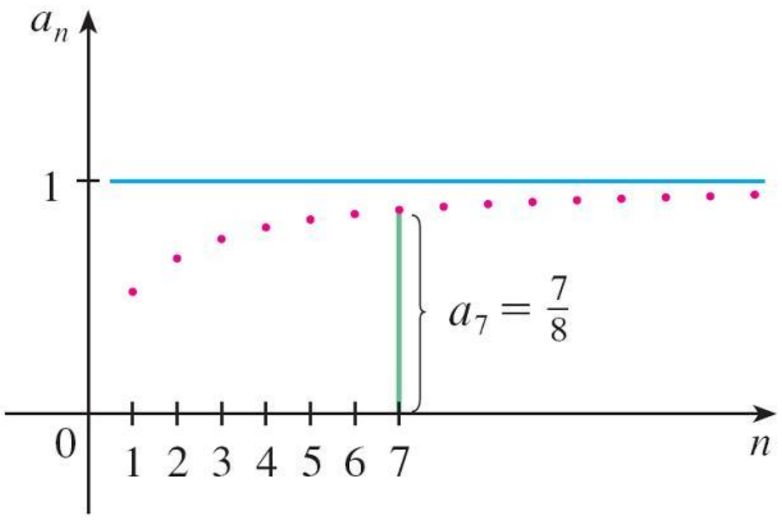

Figura 2

Sequências

Observe que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto de inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1) \quad (2, a_2) \quad (3, a_3) \quad \ldots \quad (n, a_n) \quad \ldots$$

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da sequência $a_n = n/(n + 1)$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar tão pequena quanto se desejar, tornando n suficientemente grande.

Sequências

Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência $\{a_n\}$ aproximam-se de L quando n torna-se grande.

Sequências

Observe que a seguinte definição do limite de uma sequência é muito parecida com a definição do limite de uma função no infinito.

$\boxed{1}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ as } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n a tão próximos de L quanto quisermos ao fazer suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

Sequências

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas sequências que têm limite *L*.

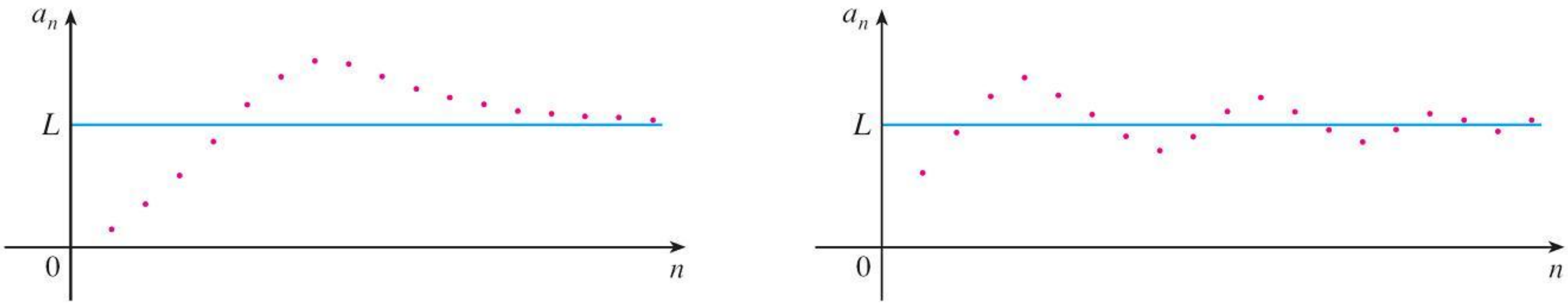

Figura 3

Gráficos de duas sequências com $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

Sequências

Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

$\boxed{2}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ as } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

Sequências

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos a_1, a_2, a_3 , . . . são marcados na reta real.

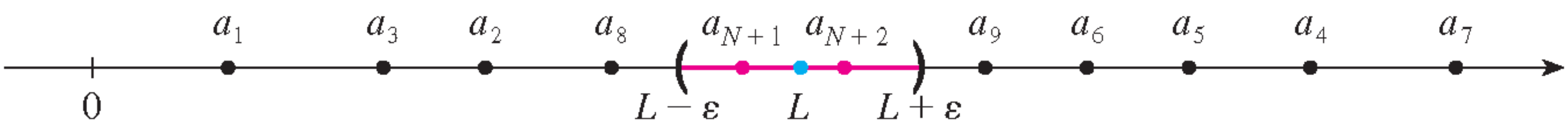

Figura 4

Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo.

Sequências

Outra ilustração da Definição 2 é dada na Figura 5.
Os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as linhas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse quadro deve ser válido independentemente do quão pequeno ε é escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior.

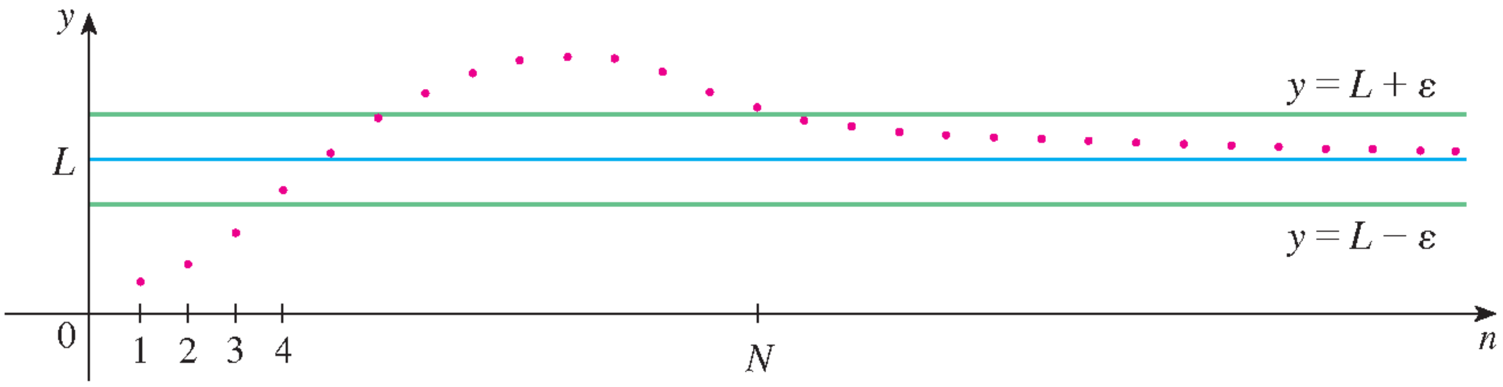

Figura 5

Sequências

A única diferença entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

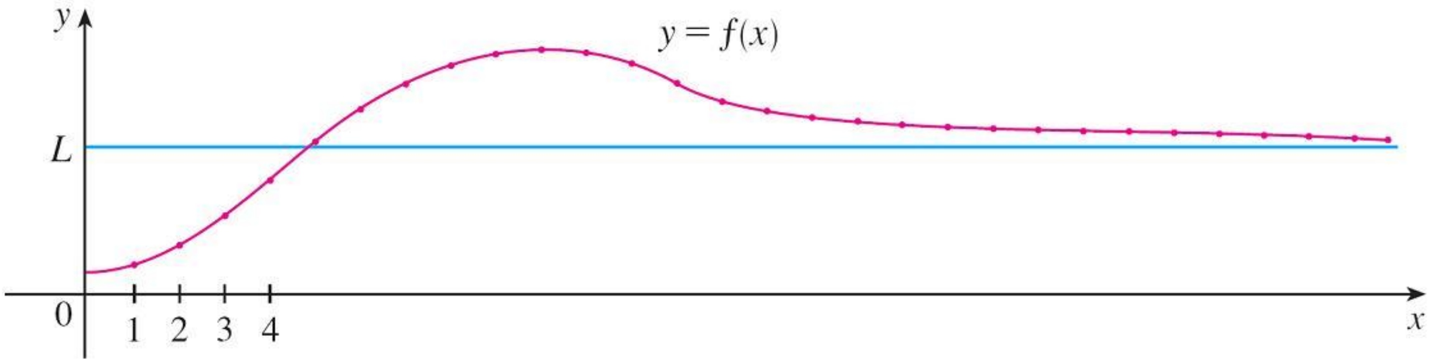

Figura 6

Sequências

Em particular, como sabemos que $\lim_{x \to \infty} (1/x^r) = 0$ quando $r > 0$, temos

4 $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{Se} \quad r > 0$$

Se a_n aumentar quando n aumentar, usaremos a notação $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Considere a definição

5 Definição $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad a_n > M$$

Se $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

Sequências

As Propriedades do Limite, também valem para os limites de sequências, e suas demonstrações são similares.

Propriedades do Limite para Sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Sequências

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para sequências como a seguir (veja a Figura 7).

Teorema do Confronto para Sequências

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ for $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = L$, então $\lim_{n \to \infty} b_n = L$.

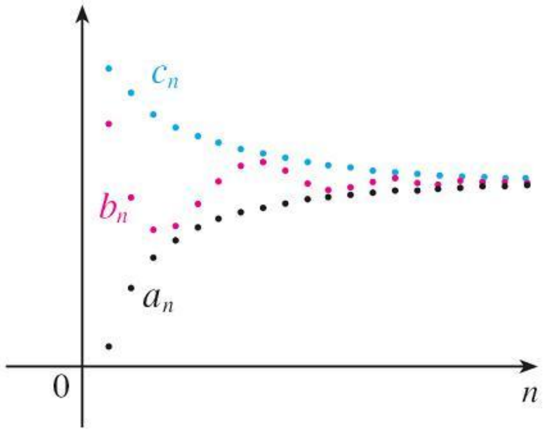

Figura 7

A sequência $\{b_n\}$ fica presa entre as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$

Sequências

Outro fato útil sobre limites de sequências é dado pelo seguinte teorema.

6 Teorema Se $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

O seguinte teorema diz que se aplicarmos uma função contínua aos termos de uma sequência convergente, o resultado também será convergente.

7 Teorema Se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(L)$$

Exemplo 11

Para quais valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

SOLUÇÃO: Sabemos que $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo, colocando $a = r$ e usando o Teorema 3, temos

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

É óbvio que

$$\lim_{n \to \infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} 0^n = 0$$

Exemplo 11 – *Solução*

continuação

Se –1 < r < 0, então 0 < $|r|$ < 1 então

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pelo Teorema 6. Se $r \le -1$, então $\{r^n\}$ diverge.

Exemplo 11 – *Solução*

continuação

A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de *r*. (O caso *r* = –1 é mostrado na Figura 8.)

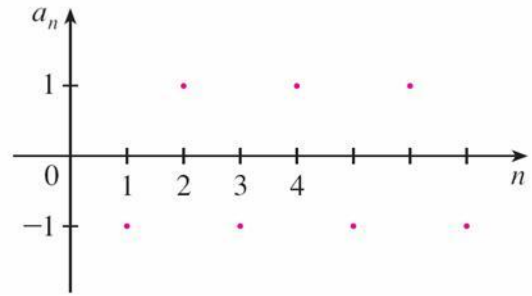

Figura 8

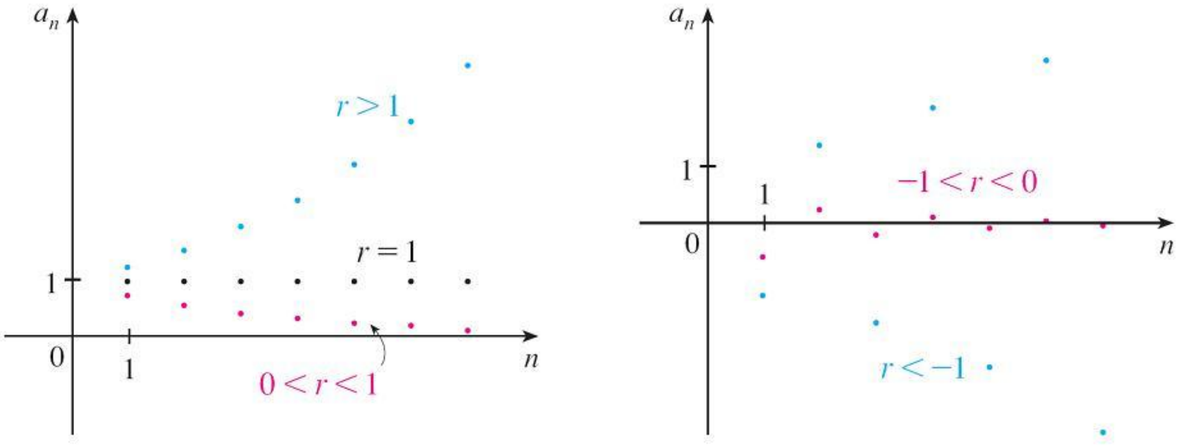

Figura 11

A sequência $a_n = r^n$

Sequências

Os resultados do Exemplo 11 estão resumidos a seguir para uso futuro.

$\boxed{9}$ A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

$\boxed{10}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Sequências

$\boxed{11}$ **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada.**

Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente ($a_n > 0$) mas não superiormente. A sequência $a_n = n/(n + 1)$ é limitada porque $0 < a_n < 1$ para todo n.

Sequências

Sabemos que nem toda sequência limitada é convergente [por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ satisfaz $-1 \leq a_n \leq 1$, mas é divergente], e que nem toda sequência monótona é convergente ($a_n = n \to \infty$). Mas se uma sequência for limitada *e* monótona, então ela deve ser convergente.

Sequências

Este fato é provado no Teorema 12, mas intuitivamente você pode entender porque é verdade, olhando para Figura 12. Se $\{a_n\}$ está aumentando e $a_n \leq M$ para todo n, então os termos são forçados se aglomerar e se aproximar de um número L.

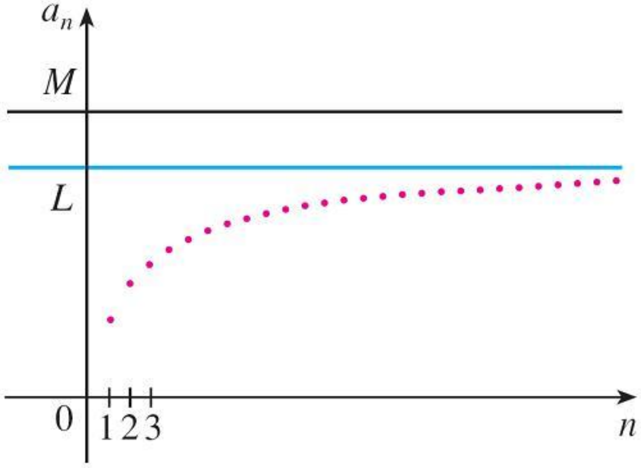

Figura 12

Sequências

A demonstração do Teorema 12 é baseada no **Axioma de Completude** para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que diz que, se *S* é um conjunto não vazio de números reais que tem um limitante superior *M* ($x \leq M$ para todo *x* em *S*), então *S* tem um **limitante superior mínimo** *b*. (Isto significa que *b* é um limite superior para *S*, mas se *M* é qualquer outro limitante superior, então $b \leq M$.) O Axioma de Completude é uma expressão do fato de que não há salto ou furo na reta do número real.

$\boxed{12}$ **Teorema da Sequência Monótona** Toda sequência monótona limitada é convergente