# Sequências

**Definição:** Uma lista, ou sucessão, de números escritos numa ordem definida.

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ ← Seq. Finita de $n$ termos

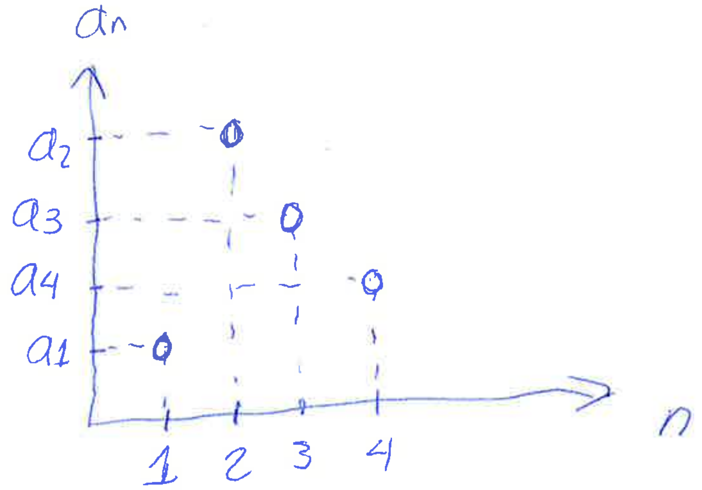
conjunto

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ ← Seq. Infinita $\infty$ termos

## Forma de Tabela para uma Sequência

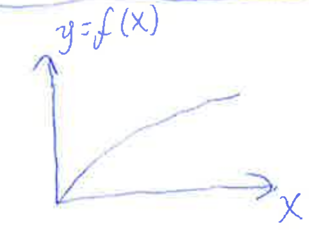
| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $a_1$ |
| 2 | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $a_n$ ← Termo Geral. |

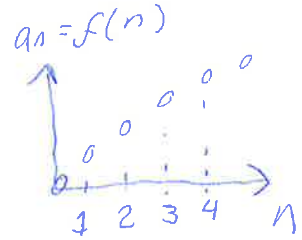
## Representação Gráfica de uma Sequência



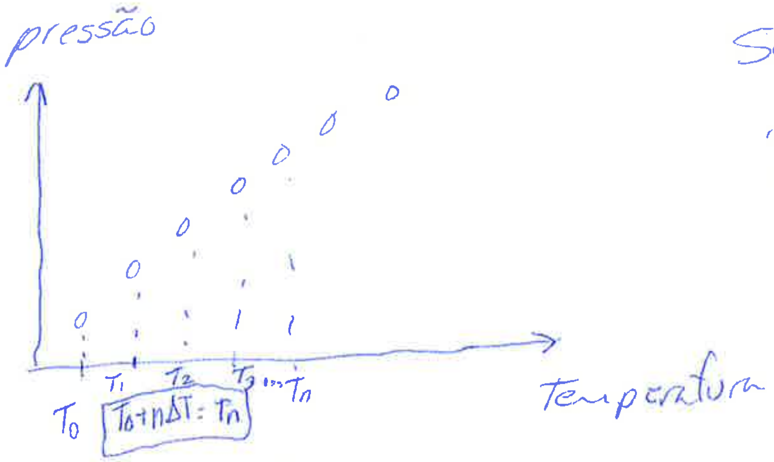
- Sequência como uma função real com domínio nos números naturais: $a_n = f(n)$ onde $n \in \mathbb{N}$

| | Domínio | Imagem |
|---|---|---|
| função | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| sequência | $n \in \mathbb{N}$ | $a_n \in \mathbb{R}$ |



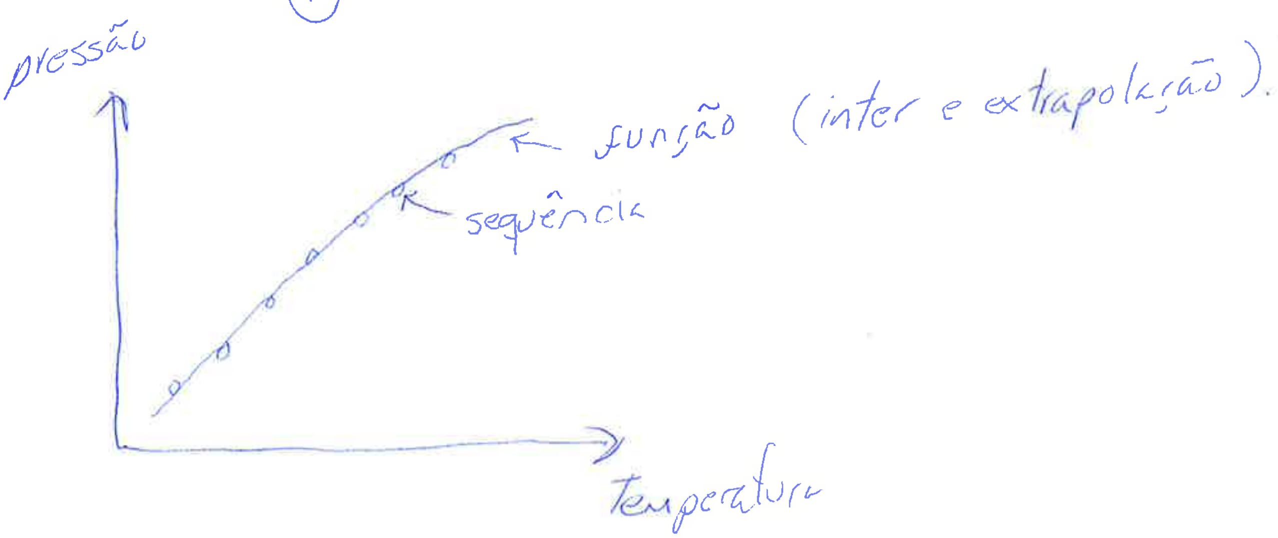




- Experimentalmente é feita uma amostragem de determinada variável em função de outra em primeiro lugar. Posteriormente, se procura interpolar e extrapolar os resultados com uma função.




Sequência é "Medida"

$\Downarrow$

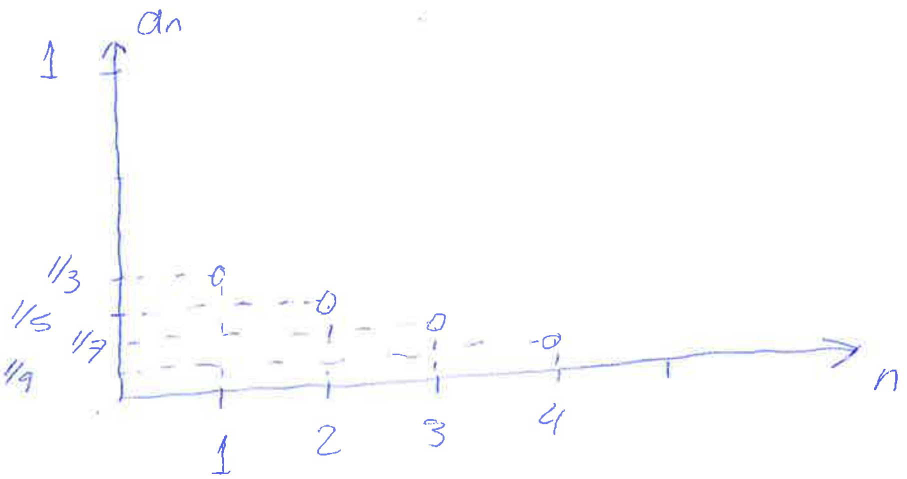


# Exemplos de Sequências

a) $\left\{ \dfrac{1}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ou $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ ou

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $1/3$ |
| 2 | $1/5$ |
| 3 | $1/7$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $\frac{1}{2n+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

ou $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots \right\}$



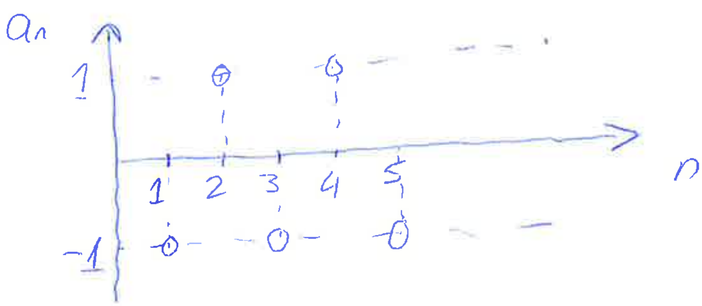

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right) = 0$$

b) Exemplo de sequência Alternada

$\left\{ (-1)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ ou $a_n = (-1)^n$ ou

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $-1$ |
| 2 | 1 |
| 3 | $-1$ |
| 4 | 1 |
| $\vdots$ | |
| impar | $-1$ |
| par | 1 |

$\{a_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$



Parece que existem dois limites quando $n \to \infty$.

Se "parece" que existem dois limites é porquê o limite não existe. O limite, quando existe, é único.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \text{Não Existe}$$

Outras Sequências Alternadas

$$\left\{(-1)^{n+1}\right\}, \quad \left\{(-1)^{n-1}\right\}, \quad \left\{\frac{(-1)^n n}{2^n}\right\}, \ldots$$

c) A sequência pode começar em qualquer número natural

$$\left\{\sqrt[3]{n-2}\right\}_{n=2}^{\infty}$$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $\sqrt[3]{-1} \not\in$ Real para todas as soluções |
| 2 | $\sqrt[3]{0} = 0$ |
| 3 | $\sqrt[3]{1} = 1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $\sqrt[3]{n-2}$ |

ou

$$\left\{\sqrt{n-995}\right\}_{n=995}^{\infty}$$

ou

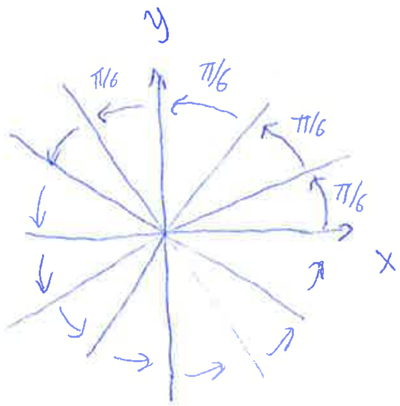
$$\left\{\ln(n-5)\right\}_{n=6}^{\infty}$$

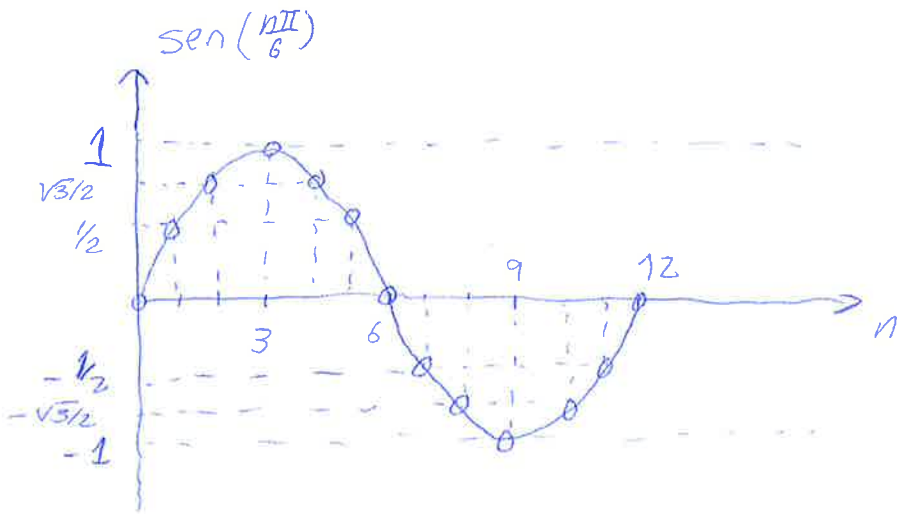
# d) Sequências Periódicas

$$\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

12 valores em sequência diferentes

| $n$ | $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | $1/2$ |
| 2 | $\sqrt{3}/2$ |
| 3 | 1 |
| 4 | $\sqrt{3}/2$ |
| 5 | $1/2$ |
| 6 | 0 |
| 7 | $-1/2$ |
| 8 | $-\sqrt{3}/2$ |
| 9 | $-1$ |
| 10 | $-\sqrt{3}/2$ |
| 11 | $-1/2$ |
| 12 | 0 |




$$\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \underbrace{0, \tfrac{1}{2}, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, -\sqrt{3}/2, -1, -\sqrt{3}/2, -\tfrac{1}{2}}, \ldots \right\}$$

repete

Para que valor de $n$ começa a se repetir a sequência? Procedimento Analítico

$$\frac{n\pi}{6} = 2\pi \leftarrow \text{Periodicidade da função seno}$$

$$\boxed{n = 12}$$

e) O termo geral não é conhecido, mas pode ser inferido. Se assume que certa regularidade dos primeiros termos continua indefinidamente.

Exemplo

$$\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{9}, \frac{4}{27}, -\frac{5}{81}, \frac{6}{243}, \ldots\right\}$$

— Parece ser uma sequência alternada

$\{(-1)^n\}_{n=1} = \{-1, 1, \ldots\}$

$\{(-1)^{n+1}\}_{n=1} = \{1, -1, \ldots\}$

— Os termos são frações: $\frac{N}{D}$

— Numerador parece ser $n$, começando em $n=2$

— Denominador parece ser $3^n$,

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | $3^1$ | $9=3^2$ | $27=3^3$ | $81=3^4$ | $243=3^5$ |

Duas Possibilidades

a) Primeiro Termo para $n=1$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^n}, \quad n \geq 1$$

b) Primeiro Termo para $n=2$

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{3^{n-1}}, \quad n \geq 2$$

f) A maior parte das sequências não podem ser expressas por uma expressão analítica.

- $\{T_n\}$ → Valores Diarios de Temperatura nesta sala às 8:00 am.
- $\{d_n\}$ → Dígito da n-ésima casa decimal de um número irracional. (como o número de Euler).
- $\{a_n\}$ → sequência formada pela escolha aleatória de digitos (ou números) por uma turma.

g) Sequências Recursivas: O termo n-ésimo depende dos anteriores.

1) Sequências Recursivas de $\boxed{1^{\text{a}} \text{ Ordem}}$: O termo n-ésimo depende somente do anterior

- Progressão Aritmética (P.A.): $a_{n+1} = a_n + q$ e $a_0 = a$

$a_0 = a$

$a_1 = a + q \quad (a_1 = a_0 + q)$

$a_2 = a + 2q \quad (a_2 = a_1 + q)$

$a_3 = a + 3q \quad (a_3 = a_2 + q)$

$\vdots$

$\boxed{a_n = a + nq} \quad (a_n = a_{n-1} + q)$

→ Fórmula Fechada (Não precisa calcular todos os anteriores)

- Progressão Geométrica (P.G.) : $a_{n+1} = q\, a_n$ e $a_0 = a$

$a_0 = a$

$a_1 = q\, a_0 = q a$

$a_2 = q\, a_1 = q^2 a$

$a_3 = q\, a_2 = q^3 a$

$\vdots$

$a_n = q\, a_{n-1} = q^n a$

$\boxed{a_n = q^n \cdot a}$ Fórmula Fechada Não Recursiva

2) Sequências Recursivas de $\boxed{\text{2da Ordem}}$ : O termo n-ésimo depende dos dois anteriores.

Ex. Seq. de Fibonacci

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 3$

$f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$

$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$

$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$

$\vdots$

$\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$

Uma variante da seq. de Fibonacci é a seq. de Lucas:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

$$\{L_n\} = \{1, 3, 4, 7, 11, \dots\}$$

Em geral, uma seq. recursiva linear de 2da ordem pode ser escrita como

$$a_n = p\,a_{n-1} + q\,a_{n-2} + f(n)$$

$p$ e $q \in \mathbb{R}$ e $a_1$ e $a_2$ são conhecidos

h) Sequências dadas por somas

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} (a_k) = \underbrace{a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n}_{n-m+1 \text{ termos}}$$

soma parcial n-ésima

$\{S_n\} \rightarrow$ sequência das somas parciais

Ex. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) \leftarrow \boxed{\text{Partimos de } a_k = \frac{1}{k}}$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\{S_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \dots\right\}$$

# Soma Telescópica

$$\cancel{a_0} = a$$
$$\cancel{a_1} = \cancel{a_0} + q$$
$$\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + q$$
$$a_3 = \cancel{a_2} + q$$
$$\vdots$$
$$\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + q$$
$$+ \quad a_n = \cancel{a_{n-1}} + q$$

$$\boxed{a_n = a + nq}$$

Seq. Aritmetica
ou
Progressão (P.A.)

$$a_0 = a$$
$$\cancel{a_1} - \boxed{a_0} = q$$
$$a_2 - \cancel{a_1} = q$$
$$a_3 - \cancel{a_2} = q$$
$$\vdots$$
$$\boxed{a_n} - a_{n-1} = q$$

$$a_n - a_0 = nq$$
$$a_n = a_0 + nq$$
$$\boxed{a_n = a + nq}$$

igual

Exemplo: ~~$a(n+1)$~~

Se $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{2}$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 2$ determine $a_{101}$.

Solução: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ ou $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}$ (P.A.)

cte

$$a_{n+1} - \cancel{a_n} = 1/2$$
$$\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} = 1/2$$
$$\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} = 1/2$$
$$\vdots$$
$$+ \quad \cancel{a_2} - a_1 = 1/2$$

Soma Telescópica

$$\boxed{a_{n+1} - a_1 = n\,\tfrac{1}{2}} \xrightarrow[n=100]{} a_{101} = 100 \cdot \tfrac{1}{2} + 2$$

$a_1 = 2$

$$\boxed{a_{101} = 52}$$

Ex.: Encontre o valor da soma

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \dots + \frac{1}{999\times 1000}$$

Sol.: Podemos pensar em duas sequências finitas: $\{a_n\}$ e $\{S_n\}$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{1\times 2}, \frac{1}{2\times 3}, \frac{1}{3\times 4}, \dots \frac{1}{999\times 1000} \right\}$$

Qual é a fórmula do termo n-ésimo?

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1}$$

Podemos separar $a_n$ em frações simples

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Igualdade de Polinômios em } n. \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n}$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \right\}$$

- Agora vamos formar a sequência $\{S_n\}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}_{k=3} + \dots + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{k=n}$$

Mas note os cancelamentos (SOMA TELESCÓPICA)

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Queremos calcular $S = \cancel{S_{1000}} = S_{999}$

$$S = S_{999} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{1000}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

$$\boxed{S = \frac{999}{1000}}$$

## Produtos Telescópicos

Para Progressões Geométricas (P.G.)

$a_{n+1} = a_n \cdot q$ e $a_1 = a$ é conhecido
$q$

Podemos escrever várias equações seguidas

$$a_{n+1} = \cancel{a_n} \cdot q$$
$$\cancel{a_n} = \cancel{a_{n-1}} \cdot q$$
$$\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} \cdot q$$
$$\vdots$$
$$\cancel{a_2} = a_1 \cdot q$$

Produto Telescópico de $n+1-2+1 = n$ equações

produto

$$\boxed{a_{n+1} = a_1 \cdot q^n} \xrightarrow{\text{Trocando } n+1 \to n} \text{ ou } \boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Ex.: Considere a sequência recorrente definida por $a_1 = 14$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Prove que o número $\sqrt{3(a_n^2-4)}$ é divisível por 4, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. (POTI). (Nível 2)

Sol.: Vamos começar calculando $\sqrt{3(a_n^2-4)}$ quando

$$n = 1 \implies \sqrt{3(a_1^2-4)} = \sqrt{3(14^2-4)} = \sqrt{3(196-4)} = \sqrt{576} = 24$$

- Como 24 é divisível por 4 o enunciado é válido para $n=1$.

- De $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, restando 2 nos dois lados

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 4$$

Diferença de Quadrados

$$\boxed{a_{n+1} - 2 = (a_n+2)(a_n-2)}$$

- Escrevemos várias eq. consecutivas do tipo anterior

Produto Telescópico

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2 = (a_n+2)\cancel{(a_n-2)} \\ \cancel{a_n - 2} = (a_{n-1}+2)\cancel{(a_{n-1}-2)} \\ \vdots \\ \cancel{a_3 - 2} = (a_2+2)\cancel{(a_2-2)} \\ \cancel{a_2 - 2} = (a_1+2)(a_1-2) \end{cases}$$

$$a_{n+1} - 2 = (a_n+2)(a_{n-1}+2)\cdot\ldots\cdot(a_2+2)(a_1+2)(a_1-2)$$

Usando novamente a eq. de recorrência

$$a_n^2 - 4 = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdot \ldots \cdot 16 \cdot 12$$

Note que se $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ Eq. de Recorrência

$$a_n = a_{n-1}^2 - 2$$

e

$$\boxed{a_n + 2 = a_{n-1}^2}$$

Multiplicando tudo por 3

$$3(a_n^2 - 4) = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdots 16 \cdot 36$$

Achando raiz quadrada nos dois lados

$$\sqrt{3(a_n^2-4)} = \underbrace{a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots \boxed{4} \cdot 6}_{\text{Produto, onde um dos termos é } 4}$$

logo $\sqrt{3(a_n^2-4)}$ é divisível por 4 e isso não depende de $n$. Isto é, é válido $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. ∎

# Progressões Aritméticas (P.A.)

- Uma P.A. é uma sequência em que a diferença dos termos consecutivos é constante:

$$a_{n+1} - a_n = q = cte \text{ (razão)}$$ ← Fórmula Recorrente

- Se $\{a, b, c\}$ formam uma P.A

$$b - a = c - b$$

logo $2b = a + c$

$$\boxed{b = \frac{1}{2}(a+c)}$$

Ou seja, cada termo de uma P.A é a média aritmética dos termos adjacentes.

- Já tínhamos visto que a soma telescópica leva a uma fórmula fechada

Soma Telescópica

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2} - \boxed{a_1} &= q \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= q \\
&\vdots \\
\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} &= q \\
+\ \boxed{a_n} - \cancel{a_{n-1}} &= q
\end{aligned}$$

$n - 2 + 1 = n - 1$ equações

$$a_n - a_1 = (n-1)q$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)q}$$ → Expressa $a_n$ como função de $a_1$ e $n$.

- Se montamos a soma telescópica começando em $\boxed{m<n}$ (2)

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{a_{m+1}} \boxed{-a_m} &= q\\
\cancel{a_{m+2}} - \cancel{a_{m+1}} &= q\\
&\vdots\\
\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} &= q\\
+\ \boxed{a_n} - \cancel{a_{n-1}} &= q
\end{aligned}\right\}$$

$n-(m+1)+1 = n-m$ equações

$$a_n - a_m = (n-m)q$$

$$\boxed{a_n = a_m + (n-m)q} \rightarrow$$ Expressa $a_n$ como função de $a_m$ e $(n-m)$.

- Como

$$\{a_n\} = \{a_1 \xrightarrow{+q} a_2 \xrightarrow{+q} a_3, \ldots, a_{n-1} \xrightarrow{+q} a_n\}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

$-q$ $-q$

$+q$ $+q$

- Logo, em uma P.A

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$+\quad S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$$

$$2S = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)$$

$$2S = n(a_1+a_n)$$

$$\boxed{S = (a_1+a_n)\frac{n}{2}} \rightarrow$$ Soma de n-termos de uma P.A.

Ex. Observe a disposição dos números naturais ímpares: ③

1ra linha → 1
2da ,, → 3 5
3ra ,, → 7 9 11
4ta ,, → 13 15 17 19
5ta ,, → 21 23 25 27 29

Determine o quarto termo da vigésima linha.

Sol.: A sequência dos números naturais ímpares pode ser escrita como $a_n = 2n - 1$ com $n \geq 1$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 3 | 5 | ... | $2n-1$ |

$n \rightarrow$ conta o número do ímpar

$n = 1 \rightarrow$ Primeiro Ímpar é $2 \cdot 1 - 1 = 1 = a_1$

$n = 2 \rightarrow$ Segundo ,, é $2 \cdot 2 - 1 = 3 = a_2$

⋮

- O número de ímpares em cada linha se corresponde com a numeração da linha

$$\underset{\substack{\text{Até a} \\ \text{linha 19} \\ \text{completa}}}{N} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19$$

Para uma P.A $\rightarrow S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$ logo

$$N = \frac{(1+19) \cdot 19}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 10 \cdot 19 = 190$$

$n$ (4to termo da 20º linha) $= 190 + 4 = 194$

$a_{194} = 2 \cdot 194 - 1 = 388 - 1 = 387$

4to termo da 20º linha

$\boxed{a_{194} = 387}$

# Progressão Geométrica (P.G.)

- Uma P.G. é uma sequência em que cada novo termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \underbrace{q}_{\text{desconhecida}}, \quad a_1 = a \to \text{conhecido}$$

- Se $\{a, b, c\}$ formam uma P.G.

$$\underbrace{b = a \cdot q}_{\frac{b}{a} = q} \quad e \quad \underbrace{c = b \cdot q}_{\frac{c}{b} = q}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = ac$$

$$\boxed{b = \sqrt{ac}}$$ b é a média geométrica de a e c.

- Em uma P.G. cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica do antecessor e sucessor.

- Já tínhamos visto que escrevendo várias equações sucessivas e usando o produto telescópico:

$$\left.\begin{aligned} \boxed{a_{n+1}} &= \cancel{a_n} \cdot q \\ \cancel{a_n} &= \cancel{a_{n-1}} \cdot q \\ \cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} \cdot q \\ &\vdots \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot q \\ \cancel{a_2} &= \boxed{a_1} \cdot q \end{aligned}\right\} \quad (n+1)-2+1 = n \text{ equações}$$

Produto.

$$\boxed{a_{n+1} = a_1 \cdot q^n}$$ ou trocando $n+1 \to n$ $$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Agora vamos definir outra sequência $\{S_n\}$ cuja seq. geradora é uma P.G.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_1 q$$
$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$
$$\vdots$$
$$(*) \quad S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{a_n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

Partindo da soma dos n-primeiros termos multiplicamos os dois lados da eq. (*) por $q$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \\ - \quad q S_n &= \phantom{a_1 +{}} a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

$$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n (1-q) = a_1 (1-q^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-q}(1-q^n)}$$ Soma dos n-primeiros termos de uma P.G.

Exemplo: Numa P.G. de $2n$ termos a soma ~~de ordem~~ dos termos de ordem ímpar é $I$ e a soma dos termos de ordem par é $P$. Calcule o $1^{ro}$ termo e a razão.

Sol.: $\{a_n\} = \{\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}}_{2n \text{ termos}}\}$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = I$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = P$$

mas é uma P.G, logo $a_2 = a_1 q$

$a_4 = a_3 q$

$\vdots$

$a_{2n} = a_{2n-1} \cdot q$

$$a_1 q + a_3 \cdot q + a_5 \cdot q + \cdots + a_{2n-1} \cdot q = P$$

$$q\underbrace{(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1})}_{I} = P$$

$$q \cdot I = P$$

$$\boxed{q = \frac{P}{I}}$$ encontramos a razão

Adicionalmente, numa P.G.

$a_2 = q \cdot a_1$ , $a_3 = q \cdot a_2$

$a_3 = q^2 \cdot a_1$

(4)

logo

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= q^2 a_1 \\ a_5 &= q^2 a_3 \\ a_7 &= q^2 a_5 \\ &\vdots \\ a_{2n-1} &= q^2 a_{2n-3} \end{aligned}\right\}$$

A subsequência dos termos ímpares forma uma P.G. de razão $\boxed{q^2}$

$$\underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = I}_{\text{hipótesis (dado inicial)}}$$

$$I = \frac{a_1}{1 - \underbrace{q^2}_{\text{razão}}}\left[1 - (q^2)^n\right]$$

$$\boxed{a_1 = \frac{I(1-q^2)}{1-q^{2n}}}$$

▨

# Limite de uma Sequência

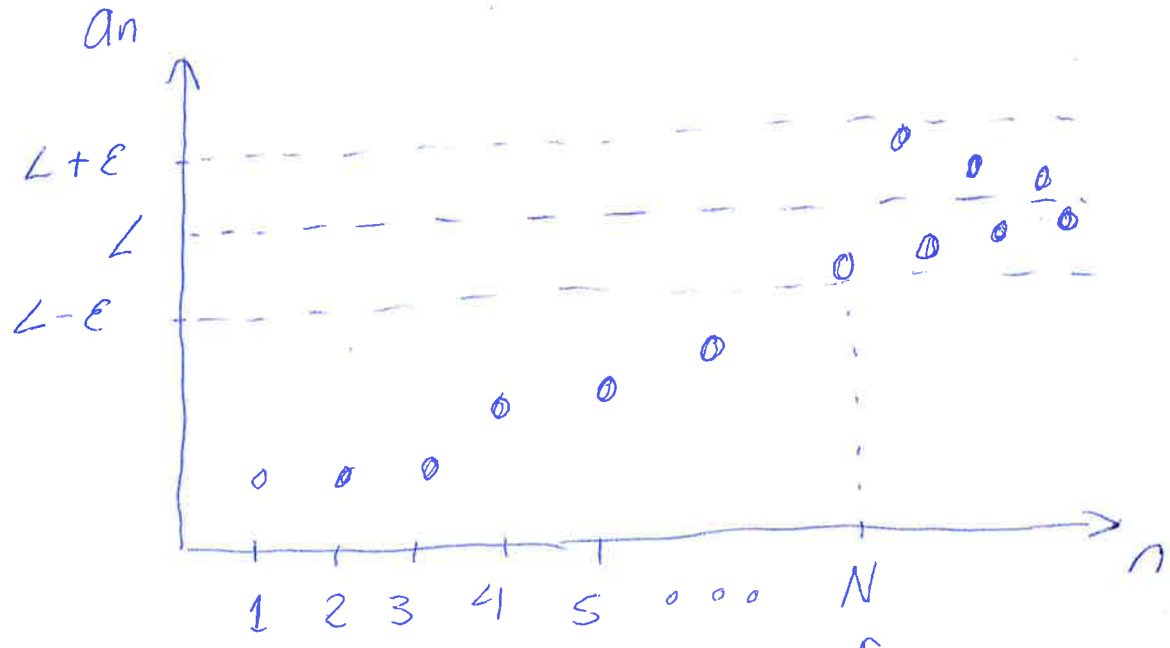


Definição: Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ converge para o limite $L$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número inteiro positivo $N$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ se $n \geq N$.

Nesse caso se escreve

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = L.$$

A sequência será divergente quando não existe o limite como número finito.

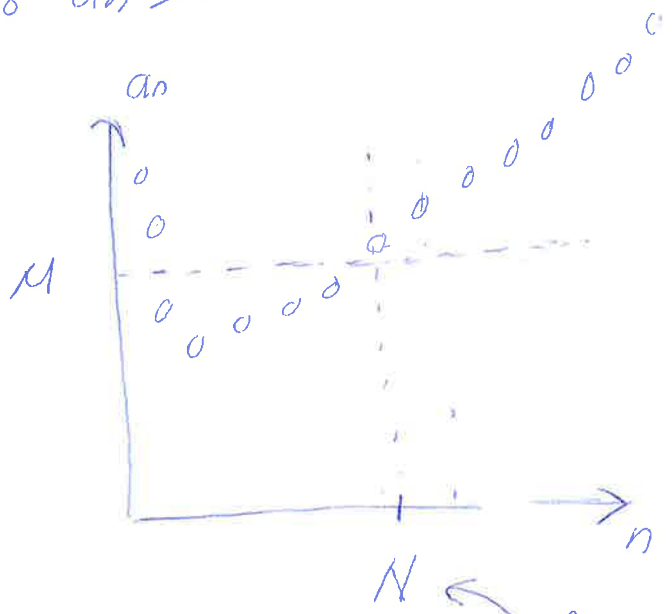



Deste valor de n em diante todos os termos de an estão a uma distância de L inferior a ε.

*

# Definição de Limite ~~[illegible]~~ Infinito

A representação $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n] = +\infty$ significa que para cada número positivo, e arbitrariamente grande, ~~[illegible]~~ $M$ existe um inteiro $N$ tal que se $n > N$ então $a_n > M$.




De aqui em diante $a_n > M$

Neste caso falamos que a sequência é divergente, "diverge para $+\infty$".

# Propriedades dos Limites de Sequências

Suponha que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sejam sequências convergentes e que $c$ seja uma constante. Então,

a) $\lim_{n\to\infty}(c a_n) = c \lim_{n\to\infty}(a_n)$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n)$

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$, se $\lim(b_n) \neq 0$ e se $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

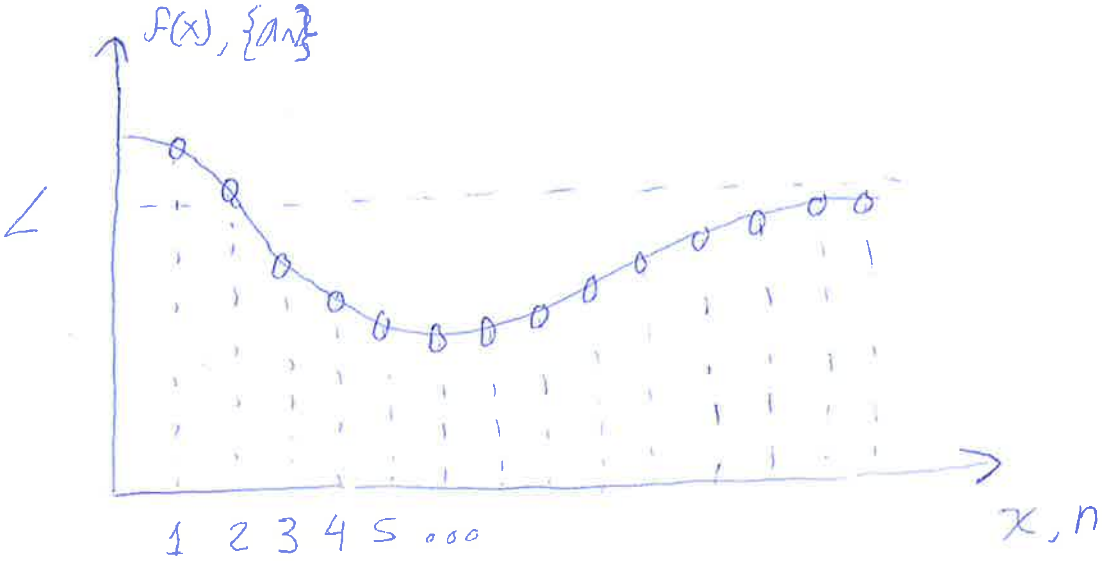
e) $\lim_{n\to\infty}(a_n^m) = \left[\lim_{n\to\infty}(a_n)\right]^m$, se $m$ é um inteiro positivo

- Os resultados anteriores são consequências das propriedades dos limites estudadas no Cálculo I.

## Limite de uma função no infinito e limite de uma sequência

Teorema: Se $\lim_{x\to\infty}[f(x)] = L$ e $a_n = f(n)$ quando $n$ é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim[f(x)] = L \\ \text{e } a_n = f(n)\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}[a_n] = L$$




- Porém, a recíproca do Teorema anterior não é verdadeira.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)] = L$$

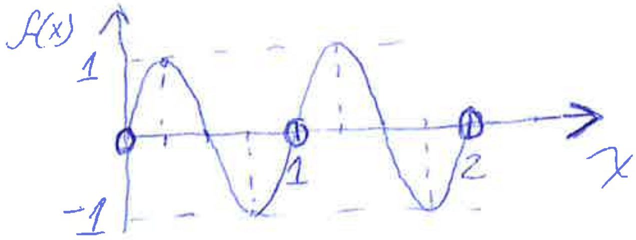
$$\text{e} \quad a_n = f(n) \quad \Leftarrow$$

Exemplo: Seja $a_n = sen(2\pi n) \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$sen(2\pi n) = 0$

Logo $\lim_{n\to\infty}[sen(2\pi n)] = 0$.

Seja $f(x) = sen(2\pi x)$ a função correspondente




$\lim_{x\to\infty}[sen(2\pi x)]$ = Não Existe

Exemplo: Calcule o limite $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n)}{n}\right]$.

O limite está indeterminado:

$\lim_{n\to\infty}[\ln(n)] = \infty$ e $\lim_{n\to\infty}[n] = \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n)}{n}\right] = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Com sequências não existe um equivalente do Teorema de L'Hôspital.

- Primeiro temos que passar de sequências para funções

$$\{a_n\} = \left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\} \longrightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

- Segundo procuramos calcular $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]$.

T. L'Hôspital

Se $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \text{"}\infty/\infty\text{"}$ ou "$0/0$" e existem e são contínuas em $x_0$ as derivadas de $f(x)$ e $g(x)$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1/x}{1}\right] = 0$$

Usando L'Hôspital

- Terceiro, como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n)}{n}\right] = 0.$$

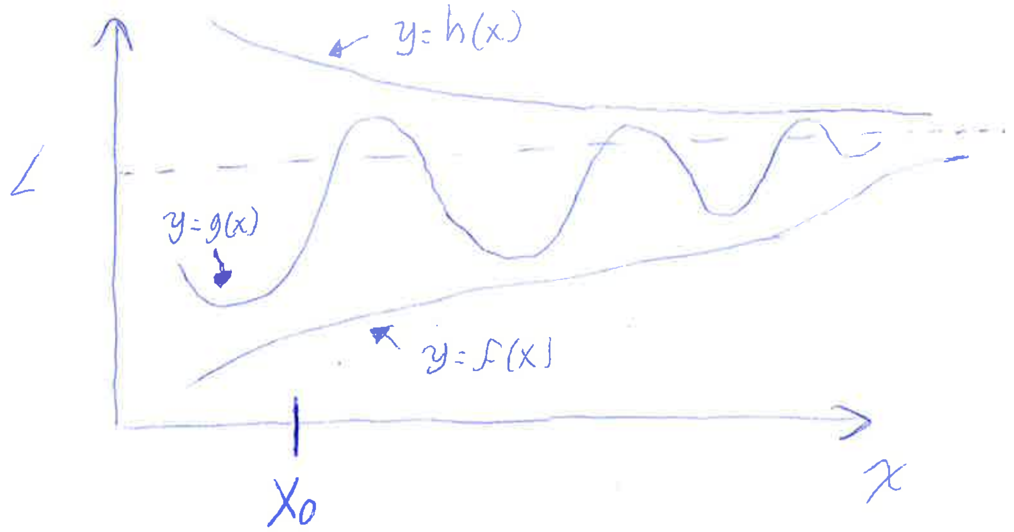
# Teorema do Confronto para Sequências $\boxed{V94}$ ①

Em funções: Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \ge x_0$

e $\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[h(x)] = L$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = L$$

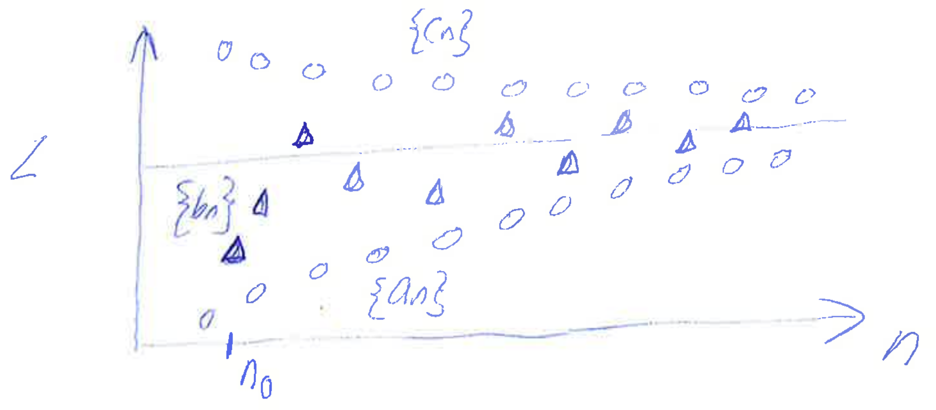



Em sequências: Se $a_n \le b_n \le c_n$ para todo $n \ge n_0$ e

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = L$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n) = L$$



Ex. Discuta a convergência de $b_n = \frac{n!}{n^n}$.                                                                 ②

| $n$ | $\frac{n!}{n^n}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | $\frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ |
| 3 | $\frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} \approx 0,222$ |
| 4 | $\frac{4!}{4^4} = \frac{24}{256} = 0,09375$ |

- $\boxed{\text{Parece}}$ que é decrescente e $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{n^n}\right] = 0$

- Como provar que de fato isso é verdade?

- Transformar a função neste caso não é prático:

$$b_n = \frac{n!}{n^n} \longrightarrow \frac{\Gamma(x-1)}{x^x} = f(x) \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

mas a função $\Gamma(x)$ é relativamente complicada (Depende de Integrais).

- Tentaremos usar o T. do Confronto. Temos que achar outras duas sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$.

- Como todos os termos são positivos e maiores que zero para todo n.

$a_n = 0$ Seq. Constante e zero

$\{a_n\} = \{0, 0, 0, \ldots\} \longrightarrow \{a_n\} \leq \{b_n\}$

- Veja que podemos escrever $b_n$ como $b_n = \frac{n!}{n^n}$ (3)

$b_1 = 1$

$b_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{1} = \frac{1}{2}$

$b_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{3}{3}}_{1} < \frac{1}{3}$

$b_4 = \frac{4!}{4^4} = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{2}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{4}{4}}_{1} < \frac{1}{4}$

$\vdots$

$b_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots}_{<1} \underbrace{\frac{n}{n}}_{1} \leq \boxed{\frac{1}{n} = C_n}$ ← Encontramos uma sequência que é maior ou igual a $b_n$ para todo $n$.

- Temos que $\boxed{a_n = 0} \leq b_n \leq \boxed{\frac{1}{n} = C_n}$

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$

$\lim_{n\to\infty}(C_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$

Pelo Teorema do Confronto.

# Teorema do Módulo

$\boxed{V95}$ 

Se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \boxed{0}$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$

ZERO

## Demonstração

- Dependendo do Sinal
  - $\nearrow$ $a_n = |a_n|$ ($a_n$ é positivo)
  - $\searrow$ $a_n = -|a_n|$ ($a_n$ é negativo)

- Nos dois caso

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

- Como $\lim\limits_{n\to\infty}[-|a_n|] = \lim[|a_n|] = 0$ por hipótese do teorema, usando o teorema do confronto concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

Exemplo: Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$.

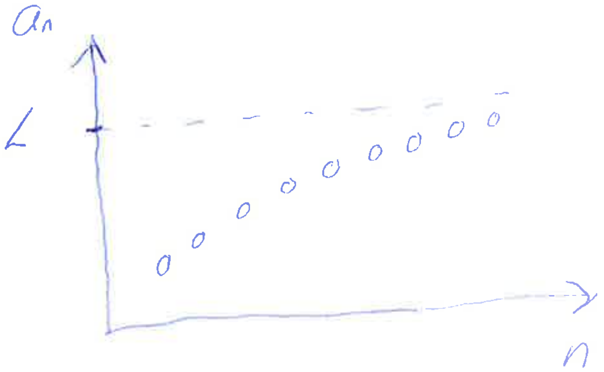
Sol.: Usando o módulo $\left|\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n}\right| = \underbrace{\frac{1}{n}}_{|a_n|}$

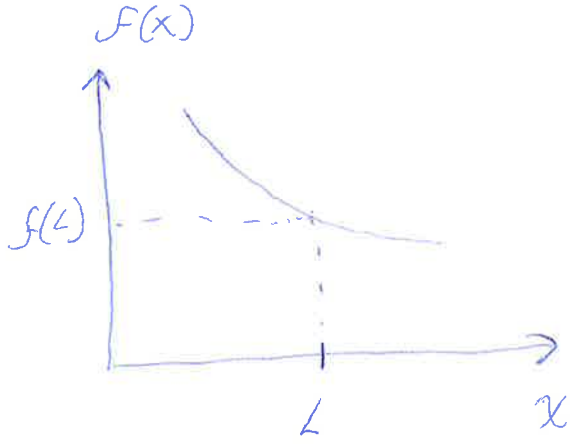
Mas $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, logo pelo T. do Módulo

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = 0.$$

## Proposição

Se $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ e se a função $f$ for contínua em $L$, então $\lim_{n\to\infty}[f(a_n)] = f(L)$.




- Como $f$ é contínua em $x = L$

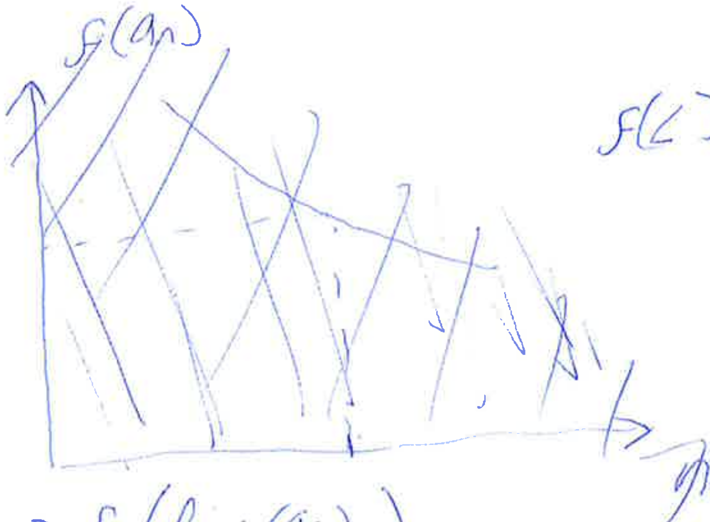
$$\lim_{x\to L}[f(x)] = f(L)$$

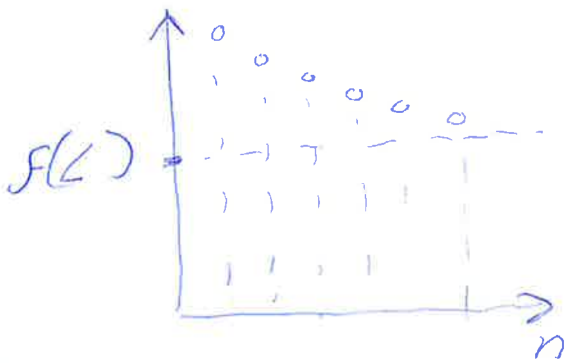
- Por hipótese da Proposição $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$

- Fazendo uma composição (troco $x$ por $a_n$)

$$\lim_{n\to\infty}[\underbrace{f(a_n)}_{b_n}] = f(L)$$

$f(a_n) = b_n$




$$\lim_{n\to\infty}[f(a_n)] = f\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)$$

Troca-se a ordem de $f$ e de limite

Exemplo: Calcule $\lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\right]$.

Sol.: $a_n = 1 + \frac{7}{n^2}$

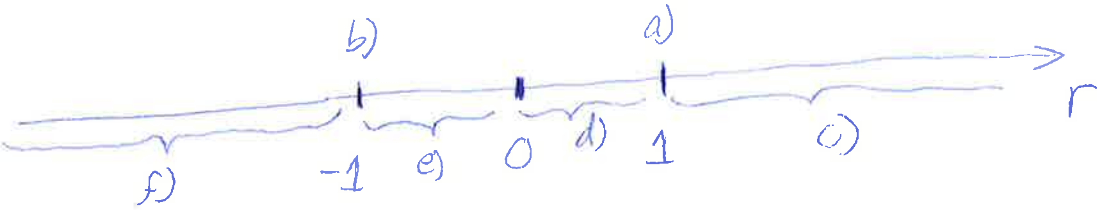
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n^2}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(1)}_{1} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}\right)}_{0} = 1$$

$f(x) = \ln(x)$ é contínua em $x=1$, logo pela proposição anterior

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\right] = \ln(1) = 0$$

Sequência $a_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$ $\boxed{V96}$ (1)

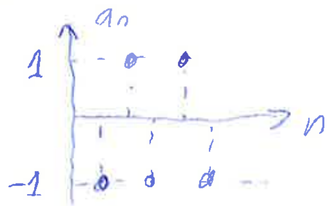
Para que valores de $r$ a sequência $\{r^n\}$ é convergente?




a) $r = 1 \rightarrow \{r^n\} = \{1^n\} = \{1^1, 1^2, 1^3, \ldots, 1^n, \ldots\}$


$\lim\limits_{n\to\infty} (1^n) = 1 \leftarrow$ Convergente

b) $r = -1 \rightarrow \{r^n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ Alternada

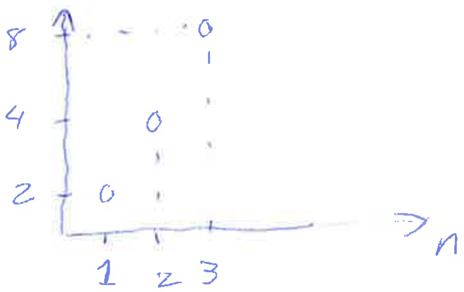



$\lim\limits_{n\to\infty} [(-1)^n] =$ Não Existe

Divergente

c) $r > 1 \rightarrow \{r^n\} = \{2^n\} = \{2, 2^2, 2^3, \ldots\}$

Ex. $r = 2$ $\qquad$ $4 \quad 8, 16, \ldots$



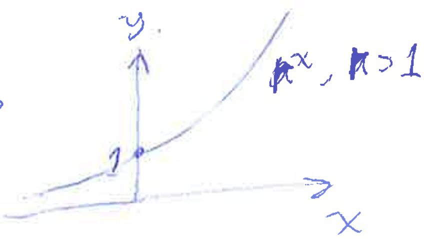

$\lim\limits_{n\to\infty} (2^n) = \infty$ (Não Existe)

Divergente

Trocando da Sequência $\{r^n\}$ para a função $\underbrace{a^x}_{\text{Exponencial}} = f(x)$.

Sabemos que as funções exponenciais quando $a > 1$ tendem a infinito se $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (a^x) = +\infty$



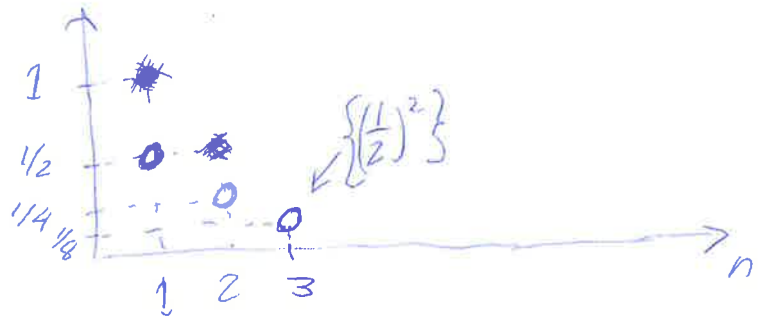
d) Se $r=0 \to \{r^n\} = \{0^n\} = \{0^1, 0^2, 0^3, \ldots\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$

$\lim_{n\to\infty} (0^n) = 0$

Se $0<r<1 \to \{r^n\} = \{(\frac{1}{2})^n\} = \{(\frac{1}{2})^1, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$

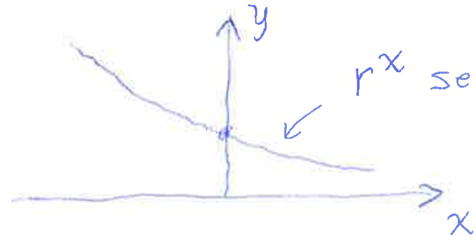
Ex. $r=\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(2^n)} = 0$ Convergente




Trocando de Seq. para Função

$\{r^n\} \to f(x) = r^x$ ← Exponencial

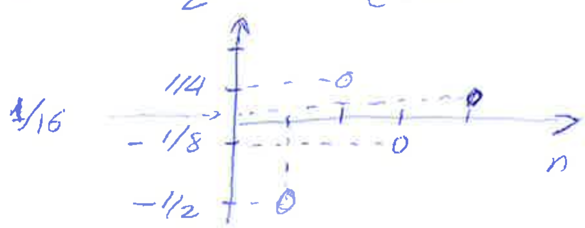



e) Se $-1<r<0 \Rightarrow 0<|r|<1$

Como $\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(r^n) = 0$ Convergente

T. do Módulo

Ex. $r = -\frac{1}{2} \to \{(-\frac{1}{2})^n\} = \{(-1)^n (\frac{1}{2})^2\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

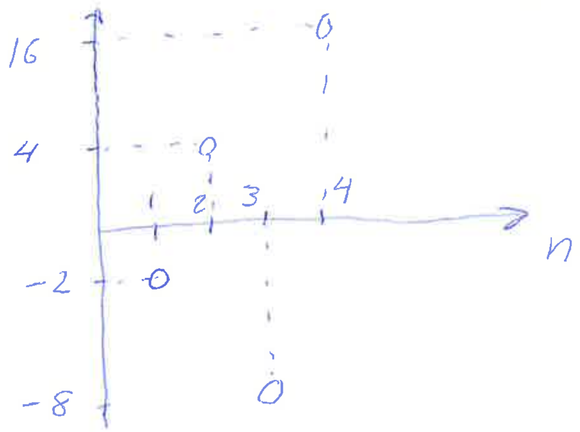



$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n (\frac{1}{2})^n] = 0$

pois $\lim_{n\to\infty} [(\frac{1}{2})^n] = 0$

f) Se $r < -1$

Ex. $r = -2 \longrightarrow \{r^n\} = \{(-2)^n\} = \{(-1)^n 2^n\} = \{-2, 4, -8, 16, \ldots\}$




$\lim\limits_{n\to\infty} [(-2)^n] =$ Não Existe

Divergente

Resumindo

$$\lim_{n\to\infty} (r^n) = \begin{cases} r \leq -1 \longrightarrow \text{Não Existe} \\ -1 < r < 1 \longrightarrow 0 \\ \text{ou } |r| < 1 \\ r = 1 \longrightarrow 1 \\ r > 1 \longrightarrow \text{Não Existe} \end{cases}$$

$\{r^n\}$ é convergente se $|r| < 1$ ou $r = 1$.

# Exemplos de Limite de Sequências de Cálculo

① Calcule $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(3+4e^n)}{5n}\right]$.

Sol.:

Note que $\lim_{n\to\infty}[\ln(3+4e^n)] = +\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty}[5n] = +\infty$$

Logo ~~XXXX~~ vamos transformar a sequência em uma função para usar o T. L'Hôspital.

$$a_n = \frac{\ln(3+4e^n)}{5n} \longrightarrow f(x) = \frac{\ln(3+4e^x)}{5x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(3+4e^x)}{5x}\right] \underset{\text{T. L'Hôspital}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3+4e^x}\cdot 4e^x}{5}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{e^x}{3+4e^x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{e^x}+4}\right] = \frac{1}{5}$$

$\frac{3}{e^x} \to 0$

Consequentemente, $\boxed{\text{Se } \lim_{x\to\infty}[f(x)] = L \text{ e } a_n = f(n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = L}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(3+4e^n)}{5n}\right] = \frac{1}{5}$$

(2) Calcule $\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{1/2} - n^{1/2}\right]$.

Sol.: Note que $\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{1/2}\right] = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}) = +\infty$

e $\lim_{n\to\infty}\left[n^{1/2}\right] = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$

Aqui temos uma indeterminação do tipo "$\infty - \infty$". A ideia é usar a identidade $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ para eliminar a indeterminação.

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\underbrace{\left[\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right]}_{1} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{1/2} - n^{1/2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right] = 0$$

(3) Calcule $\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)\right]$.

Sol.: Neste caso basta calcular os primeiros termos.

Note que $(2n+1)$ indica um número ímpar. Logo um número ímpar de $\pi/2$ significa que a função seno é 1 ou $-1$.

Se $n$ ímpar $\longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Se $n$ par $\longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$

Logo, $(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

| $n$ | $(-1)^n$ | $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$ | $(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ | 1 |
| 1 | $-1$ | $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$ | 1 |
| 2 | 1 | $\operatorname{sen}(5\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ | 1 |
| 3 | $-1$ | $\operatorname{sen}(7\pi/2) = \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$ | 1 |

$\vdots$

$$\left\{(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)\right\} = \{1\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2\pi+1)\right)\right] = 1.$$

4) Considere a sequência

$$a_1 = \sqrt{3} \simeq 1,73$$

$$a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} \simeq 2,27$$

$$a_3 = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}} \simeq 2,29$$

$$a_4 = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}} \simeq 2,30$$

$\vdots$

a) Encontre uma fórmula recursiva

b) Supondo que seja convergente calcule o limite.

Sol.:

$$a_2 = \sqrt{3+a_1}$$

$$a_3 = \sqrt{3+a_2}$$

$$a_4 = \sqrt{3+a_3}$$

$$\boxed{a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}}$$

Fórmula Recursiva

(4)

Supondo que a sequência seja convergente:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L \quad \text{. Mas se } n\to\infty \Rightarrow n+1\to\infty \text{ e}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = L.$$

Logo, partindo da fórmula de recorrência calculamos limite nos dois lados da igualdade

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+a_n}\right)$$

$$L = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(3+a_n)} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(3) + \lim_{n\to\infty}(a_n)}$$

$$\boxed{L = \sqrt{3+L}} \leftarrow \text{Equação para } L.$$

$$L^2 = 3+L$$

$$L^2 - L - 3 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

L é positivo

$$\cancel{L_1 = -1,30}$$

$$L_2 = 2,30278$$

Consequentemente $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2,30278$

$$= \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

# Sequências Monótonas



**Definição**: Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é denominada

a) Estritamente Crescente se

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$$

b) Crescente se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

c) Estritamente Decrescente se

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$$

d) Decrescente se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Monótona → Crescente ou Decrescente

Estritamente Monótona → Estritamente Crescente ou Estritamente Decrescente.

A monoticidade não precisa começar em $n=0$ ou $n=1$. Basta que aconteça para todo $n \geq n_0$. $n_0 \in \mathbb{N}$

maior que determinado valor inicial

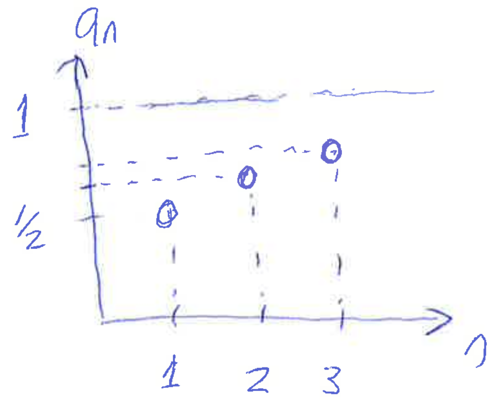

importa "perto do infinito"

# Exemplos

a) Estritamente Crescente

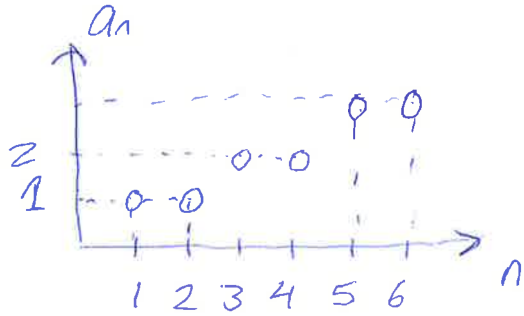
$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $1/2$ |
| 2 | $2/3$ |
| 3 | $3/4$ |
| $\vdots$ | |




b) Crescente

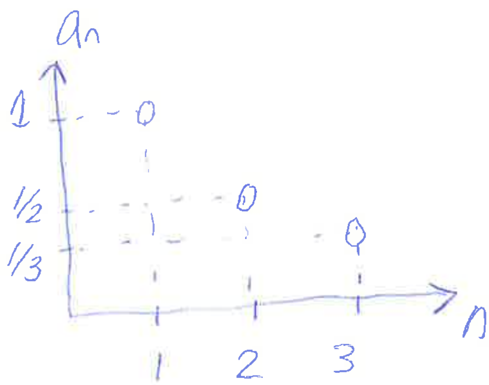
$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$$




c) Estritamente Decrescente

$$a_n = \frac{1}{n}$$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | $1/2$ |
| 3 | $1/3$ |
| $\vdots$ | |

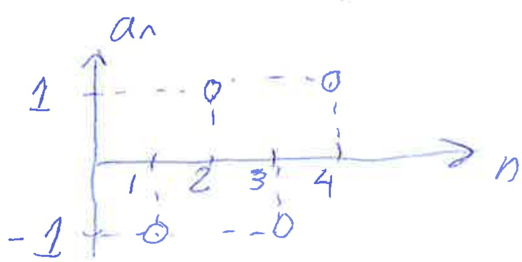



d) Decrescente

$$\left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$


e) Não Monótona

$$a_n = (-1)^n$$



# Testes de Monotonicidade

| | Diferença | Razão |
|---|---|---|
| Estritamente Crescente | $a_{n+1} - a_n > 0$<br>$a_{n+1} > a_n$ | $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$<br>$a_{n+1} > a_n$ |
| Crescente | $a_{n+1} - a_n \geq 0$<br>$a_{n+1} \geq a_n$ | $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$<br>$a_{n+1} \geq a_n$ |

Com Estritamente Decrescente e Decrescente é somente trocal o sinal da desigualdade.

Ex. Mostre que a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é estritamente crescente.

Sol.: Temos ~~dois~~ três caminhos

a) Usando a diferença

$a_{n+1} - a_n > 0, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ Estritamente Crescente

$$\frac{n+1}{n+1+1} - \frac{n}{n+1} > 0$$

Troca $n \to n+1$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$ ← Verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$

$n_0 = 0$

(4)

b) Usando a razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad , \forall n \geq n_0 \Rightarrow \text{Estritamente Crescente}$$

$$\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} > 1$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} > 1$$

$n(n+2) > 0 \quad \forall n.$ Logo

$$n^2+2n+1 > n(n+2) = n^2+2n$$

$$\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n} > 0$$

$1 > 0$ Verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$

$n_0 = 0$

c) Transformar a Sequência em Função

$$a_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow f(x) = \frac{x}{x+1} \quad , \quad x \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Mas

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0$$

Logo, ~~se~~ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente crescente

$$\Downarrow$$

$a_n$ é estritamente crescente

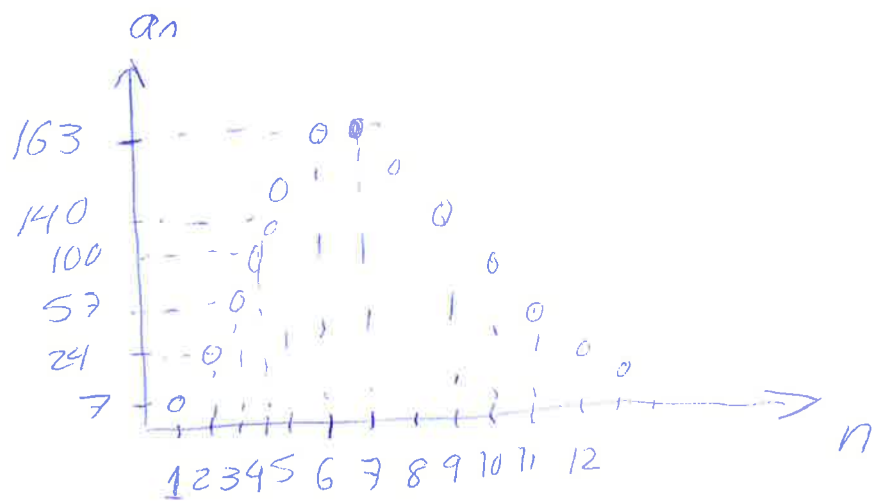
Ex. Mostre que a sequência $a_n = \frac{7^n}{n!}$ é ~~[illegible]~~ decrescente.

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $7^1/1! = 7$ |
| 2 | $7^2/2! = \frac{49}{2} = 24{,}5$ |
| 3 | $7^3/3! = \frac{343}{6} \simeq 57$ |
| 4 | $7^4/4! = \frac{2401}{24} \simeq 100$ |
| 5 | $7^5/5! = \frac{16807}{120} \simeq 140$ |

Parece que cresce?

$\vdots$

Cuidado! Usando o computador se encontra




Teste da Razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \text{Decrescente}$$

$$\frac{\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{7^n}{n!}} \overset{?}{<} 1$$

$$\frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{7^n} \overset{?}{<} 1$$

$$\frac{\cancel{7^n} \cdot 7 \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\,\cancel{n!}\,\cancel{7^n}} \overset{?}{<} 1$$

$$\frac{7}{n+1} \overset{?}{<} 1$$

$$n+1 > 0$$

$$7 \overset{?}{<} n+1$$

$$6 \overset{?}{<} n$$

Se $n \geq n_0 = 6 \Longrightarrow$ $a_n$ é decrescente

- Note ainda que

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 6 | $7^6/6!$ |
| 7 | $7^7/7!$ |

$$\frac{7^6}{6!} \overset{?}{=} \frac{7^7}{7!}$$

$$\frac{7!}{6!} \overset{?}{=} \frac{7^7}{7^6}$$

$$\frac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{7^6} \cdot 7}{\cancel{7^6}}$$

$$7 = 7.$$

- Logo, $a_n$ é decrescente, mas não estritamente decrescente para $n \geq 6$.

- Para $n \geq 7$ é estritamente decrescente.

# Teorema da Sequência Monótona



Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ é <u>limitada superiormente</u> se existir um número $M$ tal que

$$a_n \leq M \quad , \forall n > n_0$$

e será <u>limitada inferiormente</u> se existir um número $m$ tal que

$$a_n \geq m \quad , \forall n > n_0$$

Se uma sequência é limitada superior e inferiormente então $\{a_n\}$ é uma seq. limitada.

Exemplos: a) $a_n = n \rightarrow$ Limitada Inferiormente $(a_n > 0)$
<u>Não</u> é Limitada Superiormente

b) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \longrightarrow 0 < \dfrac{n}{n+1} < 1 \quad , \forall n \geq 0$

Limitada Inferiormente e Superiormente

- Seq. Limitada $\not\Longrightarrow$ Seq. Convergente

Exemplo: $a_n = (-1)^n$ é limitada

$-2 < a_n < 2 \; , \forall n.$

mas $\lim_{n \to \infty} [(-1)^n] =$ Não Existe

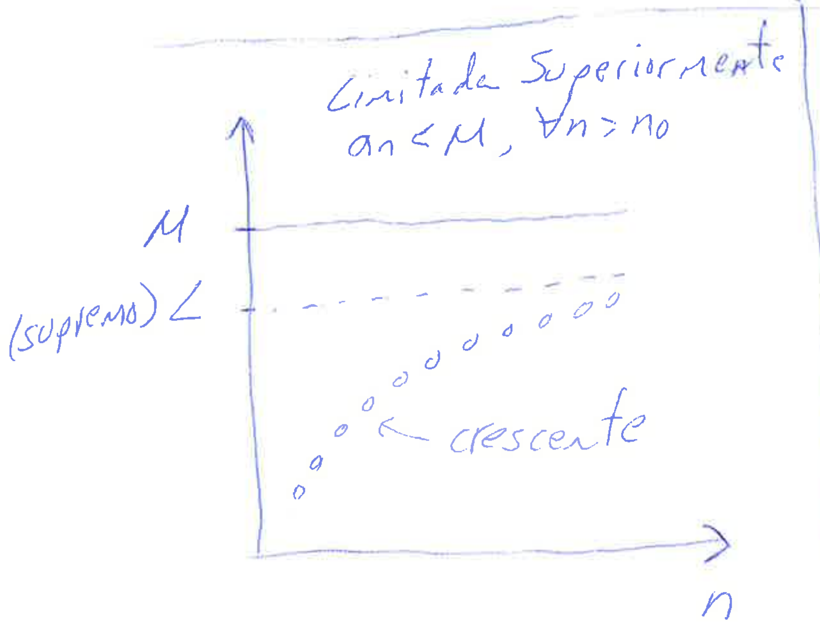
– Seq. Monótona $\not\Rightarrow$ Seq. Convergente.

Exemplo: $a_n = n$ é uma seq. Estritamente Crescente

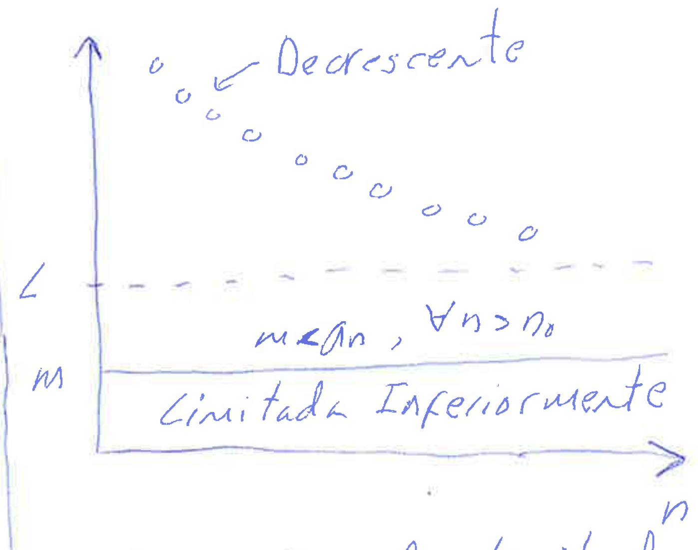
mas $\lim\limits_{n\to\infty}(n) = \infty$ (Não Existe)

## Teorema da Sequência Monótona

| | |
|---|---|
| Se $\{a_n\}$ for limitada superiormente e crescente | Se $\{a_n\}$ for limitada inferiormente e decrescente |
| $\Downarrow$ então | $\Downarrow$ então |
| $\{a_n\}$ é convergente | $\{a_n\}$ é convergente. |




$L$ é o menor dos limitantes superiores (supremo)




$L$ é o maior dos limitantes inferiores (Ínfimo)

Áxioma da Completude para o conjunto dos números Reais. ③

- Se um conjunto não vazio de números reais (S) tiver um limitante superior (M) então S terá um limitante superior mínimo (L) que será chamado de SUPREMO

$$S = \{a_n\} \text{ e } a_n < M, \forall n > n_0, M \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow \text{ então existe}$$

$$L \text{ (SUPREMO)} = \min\{M\}$$

$$a_n \leq L, \forall n > n_0.$$

- Se um conjunto não vazio de números reais (S) tiver um limitante inferior (m) então S terá um limitante inferior máximo (L) que será chamado de ÍNFIMO.

$$S = \{a_n\} \text{ e } m < a_n, \forall n > n_0, m \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow \text{ então existe}$$

$$L \text{ (ÍNFIMO)} = \max\{m\}$$

- O Axioma da Completude significa que não há salto ou furo na reta dos números Reais.

Demostração do Teorema da Sequência Monótona

Suponha que $\{a_n\}$ seja crescente e limitada superiormente é tal que $a_n < M$ para todo $n > n_0$. Pelo Axioma da Completude existe o conjunto $S = \{a_n \mid n > n_0\}$ o menor limitante superior L (supremo). Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limitante superior mínimo). Portanto, existe

$$a_N > L-\varepsilon \quad \text{para algum inteiro } N$$

Mas a seq. é crescente, logo $a_n > a_N$ para $n > N$.

$$a_n > a_N > L-\varepsilon \quad , \forall n > N$$

e $a_n < L$ logo

$$L-\varepsilon < a_n < L \quad , \forall n > N$$

Isto diz que do termo N-ésimo em diante todos os termos da sequência $\{a_n\}$ estão a menos de $\varepsilon$ unidades de $L$. É essa é a definição de limite

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = L.$$

Consequentemente $\{a_n\}$ é convergente. A demostração quando $\{a_n\}$ é decrescente e limitada inferiormente é análoga. ■

Exercício: Considere a Sequência $\{a_n\}$:

$\{0{,}1;\ 0{,}12;\ 0{,}123;\ \ldots;\ 0{,}123456789;\ 0{,}12345678910;$ ~~0,123456789~~

$0{,}1234567891011;\ 0{,}123456789101112, \ldots\}$

Será convergente?

Sol.: Sim, é crescente e está limitada superiormente ($a_n < 1$) (PELO TEOREMA DA SEQUÊNCIA MONÓTONA)

O limite dessa sequência é chamado de constante de Champernowne

# Exemplo do Uso do T. da Seq. Monótona



Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$.

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | $a_2 = 3 - \frac{1}{a_1} = 3 - \frac{1}{1} = 2$ |
| 3 | $a_3 = 3 - \frac{1}{a_2} = 3 - \frac{1}{2} = 2{,}5 = \frac{5}{2}$ |
| 4 | $a_4 = 3 - \frac{1}{a_3} = 3 - \frac{1}{5/2} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6$ |
| 5 | $a_5 = 3 - \frac{1}{a_4} = 3 - \frac{1}{13/5} = 3 - \frac{5}{13} = \frac{34}{13} \approx 2{,}61538$ |
| 6 | $a_6 = 3 - \frac{1}{a_5} = 3 - \frac{1}{34/13} = 3 - \frac{13}{34} = \frac{89}{34} \approx 2{,}61765$ |

⋮

$\{a_n\} = \{1; 2; 2{,}5; 2{,}6; 2{,}61538; 2{,}61765; \dots\}$

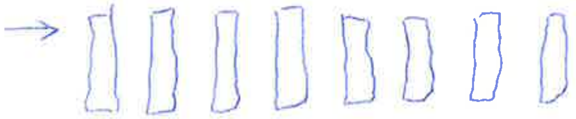
Parece que a sequência é crescente e limitada superiormente por 3. Para provar isso devemos usar o Método da Indução Finita ou Indução Matemática

## Indução Finita (Números Naturais)

1) A base: Mostrar que o enunciado vale para $n = 1$.

2) Passo Indutivo: Mostrar que se o enunciado vale quando $n = k$ então também vale para $n = k+1$. $k \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Analogia do Dominó (Fila)



Base: O primeiro dominó cai com um peteleco.

Passo Indutivo: Os dominós foram arrumados de tal forma que se um deles cai $(n=k)$ o seu vizinho também cai $(n=k+1)$.

Logo, todos os dominós cairão.

- Voltando no exercício proposto vamos provar que $\{a_n\}$ é crescente. Isto é, $a_{n+1} \geq a_n, \forall n > n_0$

1) Base: Se $n=1 \rightarrow a_2 = 2 \geq 1 = a_1 \rightarrow$ Verdadeiro.

2) Passo Indutivo: Se $n=k \longrightarrow a_{k+1} \geq a_k \rightarrow$ Verdadeiro
$k \in \mathbb{N}$, arbitrário

Aqui precisamos usar a relação de recorrência $\boxed{a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}}$ para provar que $a_{k+2} \geq a_{k+1}$

$$a_{k+1} \geq a_k \leftarrow \text{Hipótese de Indução}$$

Invertir

$$\frac{1}{a_{k+1}} \leq \frac{1}{a_k} \quad \left(3 < 5 \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{5}\right)$$

multiplica por $(-1)$

$$-\frac{1}{a_{k+1}} \geq -\frac{1}{a_k} \quad (3 < 5 \rightarrow -3 > -5)$$

Soma 3

$$3 - \frac{1}{a_{k+1}} \geq 3 - \frac{1}{a_k}$$

Usando a relação de recorrência

$$\boxed{a_{k+2} \geq a_{k+1}} \longrightarrow \text{Verdadeiro, } k \text{ arbitrário}$$

Logo, provamos que a seq. é crescente.

- Agora provaremos usando Indução Finita que a seq. está limitada superiormente por 3: $a_n \leq 3$, $\forall n \geq n_0 = 1$

1) Base: Se $n=1 \rightarrow a_1 = 1 < 3 \rightarrow$ Verdadeiro

2) Passo Indutivo: Se $n=k \rightarrow a_k \leq 3 \rightarrow$ Verdadeiro
(Hipótesis de Indução)

Temos que usar que $\boxed{a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}}$ para chegar a $\boxed{a_{k+1} \leq 3}$

$a_k \leq 3 \rightarrow$ Hipótesis de Indução

Invertir

$\frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{3}$ $\left(3 < 5 \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{5}\right)$

$\times(-1)$

$-\frac{1}{a_k} \leq -\frac{1}{3}$ $(3 < 5 \rightarrow -3 > -5)$

$+3$

$3 - \frac{1}{a_k} \leq 3 - \frac{1}{3} < 3$

Relação de Recorrência

$a_{k+1} < 3 \rightarrow$ Verdadeiro, $k$ é arbitrário

- Logo, provamos que para todo $n$ a seq. $a_n$ está limitada superiormente.

- Como a seq. é crescente e limitada superiormente, pelo Teorema da Seq. Monótona, a seq. é Convergente.

Como calcula o limite?

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$ e $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}) = L$

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

Propriedades dos Limites em seq. convergentes.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}(a_{n+1})}_{} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}(3) - \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}$$

$$L = 3 - \frac{1}{L}$$

$$L + \frac{1}{L} = 3$$

$$L^2 + 1 = 3L$$

$$L^2 - 3L + 1 = 0$$

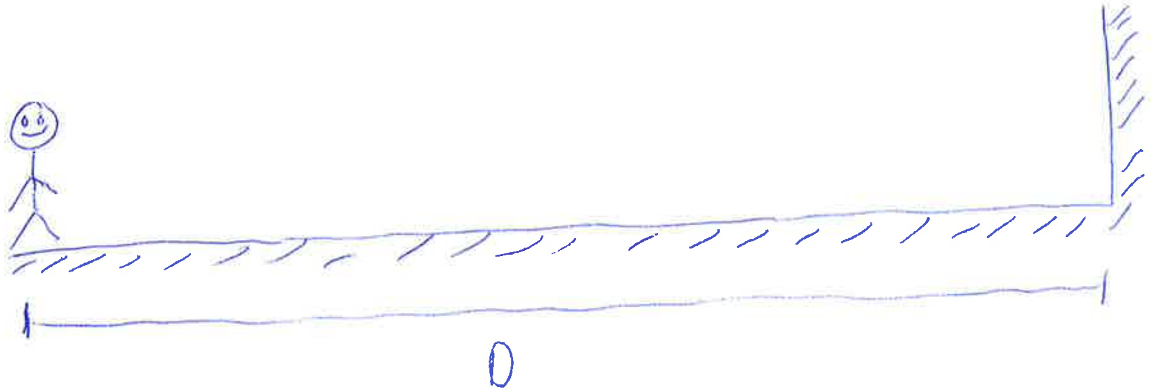
$$L_{\frac{1}{2}} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

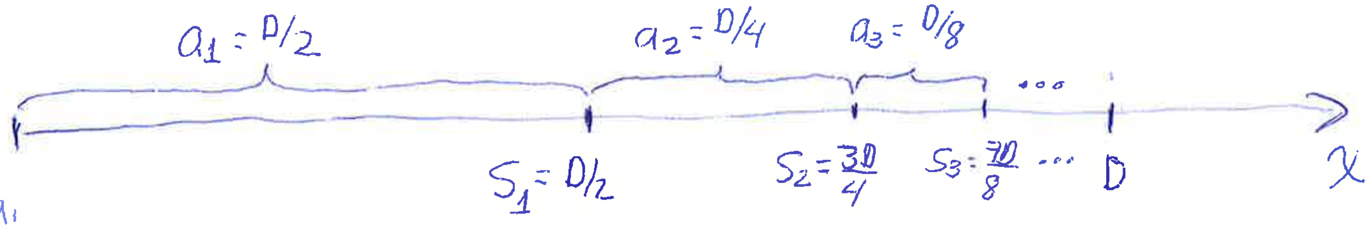
(sinal −) $L_1 \approx 0{,}381966$ e (sinal +) $L_2 \approx 2{,}61803$

Analisando os primeiros termos da seq. concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}61803$

# Série: Um problema filosófico

Um homem está inicialmente a uma distância D de uma parede.
Todo dia ele caminha a metade do que está faltando partindo da posição em que terminou o dia anterior.
Será que ele chega na parede?




$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$ $\qquad \frac{D}{2} + \frac{D}{4} \qquad \frac{3D}{4} + \frac{D}{8}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

## Sequência Geradora $\{a_n\}$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{D}{2}, \frac{D}{4}, \frac{D}{8}, \ldots, \frac{D}{2^n}, \ldots \right\}$$

$$= D \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \right\}$$

$4 = 2^2 \quad 8 = 2^3$

## Sequência das Somas Parciais $\{S_n\}$

$$\{S_n\} = \left\{ \frac{D}{2}, \frac{3D}{4}, \frac{7D}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n} D, \ldots \right\}$$

$$= D \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots \right\}$$

Para saber se ele chega na parede devemos calcular ②
o limite de $S_n$ quando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} (S_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n-1}{2^n} D\right) = D$$

- Logo, após um número infinito de ~~passos~~ dias, o homem chega na parede.

- Desde outro ponto de vista. Vejam que a sequência geradora é uma Progressão Geométrica (P.G.) com valor inicial $a = D/2$ e razão $q = 1/2$.

- Logo a sequência das somas parciais de uma P.G. é $S_n = \frac{a}{1-q}(1-q^n)$ (se $q \neq 1$)

$$S_n = \frac{D/2}{1-1/2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_n = D\left(\left(\frac{2}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = D\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right).$$

Chegamos na mesma expressão para $S_n$. Essa é uma fórmula fechada. Também podemos escrever $S_n$ como

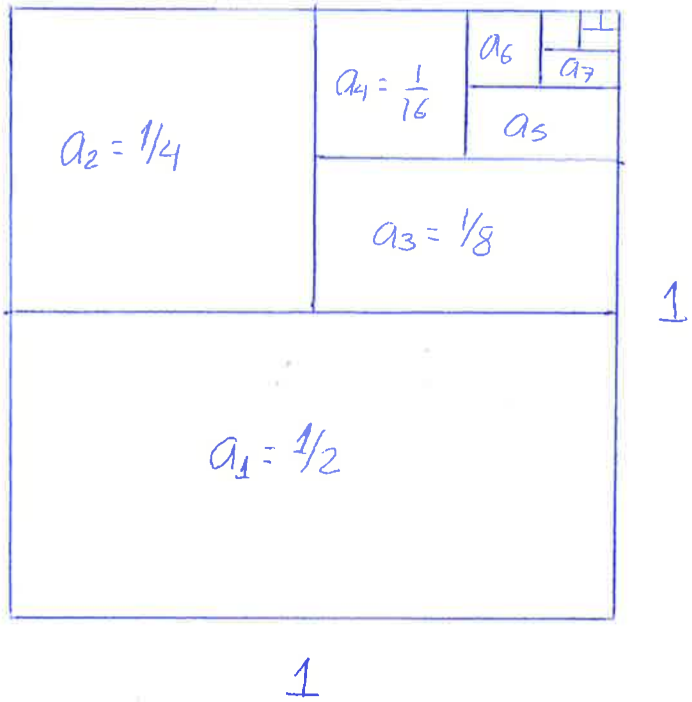
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad a_k = \frac{D}{2^k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D}{2^k}\right) \qquad e$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = D = D\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1}$$

# Outra Interpretação Geométrica

- Considere a figura: um quadrado de lado um.




- Os termos da sequência geradora $\{a_n\}$ podem ser interpretados como áreas de retângulos

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n}, \dots \right\}.$$

P.G. $a = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

- O limite do termo n-ésimo da sequência das somas parciais tende a área de todo o quadrado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1}$$

# Séries : Duas Sequências

1) Sequência Geradora

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

2) Sequência das Somas Parciais

$$\{S_n\} = \{a_1, \underbrace{a_1+a_2}_{S_2}, \underbrace{a_1+a_2+a_3}_{S_3}, \ldots, \underbrace{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}_{S_n}, \ldots\}$$

$$= \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\}$$

Note que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

- Se $\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$ (número finito) diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e sua soma é $S$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = S$$

- Se $\lim_{n\to\infty}(S_n)$ não existe ou não é um número finito então diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é divergente.

Exemplo: Seja $a_n = n$ $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ a sequência geradora de uma série aritmética de razão 1.

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \leftarrow \text{Seq. Geradora}$$

$$\{S_n\} = \{\underbrace{1}_{S_1}, \underbrace{1+2}_{S_2}, \underbrace{1+2+3}_{S_3}, \ldots, \underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{S_n}, \ldots\} \leftarrow \text{Seq. das Somas Parciais}$$

Para uma progressão aritmética a soma é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

Neste caso

$$S_n = \frac{(1+n)n}{2}$$ ← Fórmula Fechada que permite calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = +\infty$$ (Não existe)

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(n)$ é divergente.

Exemplo: Seja $a_n = aq^{n-1}$ para $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ a sequência geradora de uma série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(aq^{n-1})$.

- Se $q = 1$

$\{a_n\} = \{a, a, a, \dots, a, \dots\}$ ← Seq. Geradora

$\{S_n\} = \{a, 2a, 3a, \dots, na, \dots\}$ ← Seq. das Somas Parciais

$$\lim_{n\to\infty}(\overbrace{na}^{S_n}) = \infty$$ (Não Existe)

Logo, se $q = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(aq^{n-1})$ é Divergente

- Se $q \neq 1$

$$\{a_n\} = \{a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots\} \leftarrow \text{Seq. Geradora}$$

$$\{S_n\} = \{\underbrace{a}_{S_1}, \underbrace{a+aq}_{S_2}, \underbrace{a+aq+aq^2}_{S_3}, \ldots, \underbrace{a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}}_{S_n}, \ldots\} \leftarrow \text{Seq. das Somas Parciais}$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$$

$$S_n = \frac{a}{1-q} \cdot (1-q^n) \leftarrow \text{Fórmula Fechada da Soma de uma P.G.}$$

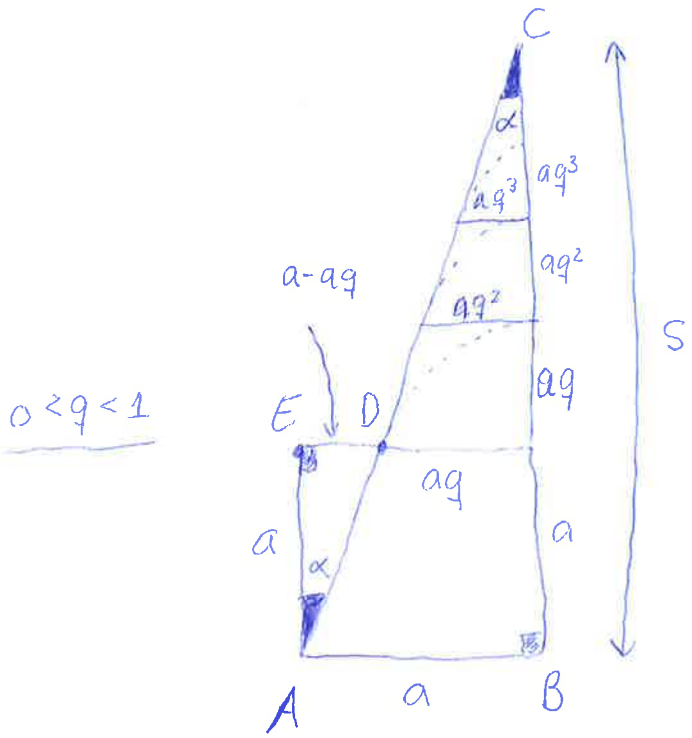
$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \frac{a}{1-q} \begin{cases} \text{Se } |q|<1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}(q^n) = 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = 1 \\ \text{Se } |q|>1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}(q^n) = \text{Não Existe} \rightarrow \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \text{Não Existe} \end{cases}$$

Conclusão: Se $|q|<1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(aq^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$ Série Convergente

Se $|q| \geq 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(aq^{n-1}) \rightarrow$ Divergente

- Interpretação Geométrica para a Soma de uma série Geométrica Convergente ($|q|<1$).

(4)




- Os triângulos ABC e DEA são semelhantes (caso ângulo ângulo):
Os ângulos $A\hat{B}C = D\hat{E}A = \pi/2$
e os ângulos $B\hat{C}A = E\hat{A}D = \alpha$
(alternos internos entre as os segmentos paralelos BC e EA).

- Logo, $\dfrac{S}{a} = \dfrac{a}{a-aq} = \dfrac{1}{1-q}$

e $\boxed{S = \dfrac{a}{1-q}}$

Agradecimentos

Estudantes do Curso de E. de Alimentos que participaram regularmente

Beatriz Gonçalves Franco

Caroline Cavichia

Rafaella Ferreira

Rafaella Monteiro

Também participaram de algumas filmagens

Marcela Oshima (Estudante do Curso de E. de Alimentos)

MSc. Aldo Ivan Cespedes Arce (Especialista de Laboratório do ZAB)

# Exemplos de Séries Geométricas



**Ex. 1:** Será que $0,\bar{9} = 1$?

**Sol.:** O problema aqui não é se são aproximadamente iguais e sim se são exatamente iguais. Veja que

$$0,\bar{9} = 0,99999\ldots$$

$$0,\bar{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots$$

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots$$

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}} + \ldots\right)$$

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}_{a=1 \quad q=\frac{1}{10}<1} = \frac{9}{10}\underbrace{\left(\frac{a}{1-q}\right)}_{\text{Soma de uma Série Geométrica Convergente}} = \frac{9}{10} \frac{1}{\frac{10}{10}-\frac{1}{10}} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{10}} \frac{1}{\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}} = 1$$

Logo, $0,\bar{9} = 1$ é exatamente verdadeira $\blacksquare$

**Ex. 2:** Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma:

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \ldots$$

**Sol.:** Vamos tentar entender qual é a série.

- Qual é a sequência Geradora?
- " " " " dos Somas Parciais?

(2)

$\{a_n\} = \left\{1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots, a_n, \ldots\right\}$

$= \left\{1 = \frac{1}{1} = \frac{3^0}{2^0}, -\frac{3^1}{2^1}, \frac{3^2}{2^2}, -\frac{3^3}{2^3}, \ldots, \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right\}$

- É Alternada : $(-1)^{n-1}$, $\forall n \geq 1$
- No Numerador são potências de 3 : $3^{n-1}$, $\forall n \geq 1$
- No Denominador " " " 2 ; $2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Logo $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

Note que $a_n$ é uma Progressão Geométrica com $q = -\frac{3}{2}$

Logo $|q| = \frac{3}{2} > 1$. A série geométrica correspondente será divergente.

Ex. 3: Expresse o número $1,2\overline{01}$ como a razão de inteiros.

Sol.: $1,2\overline{01} = 1,2010101\ldots$

$1,2\overline{01} = 1,2 + 0,001 + 0,00001 + \ldots$

$= 1,2 + \underbrace{10^{-3}}_{a_1} \xrightarrow{-2} + \underbrace{10^{-5}}_{a_2} \xrightarrow{-2} + \underbrace{10^{-7}}_{a_3} + \ldots + a_n + \ldots$

$a_n \downarrow 10^{-(2n+1)} \downarrow \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $10^{-3}$ |
| 2 | $10^{-5}$ |
| 3 | $10^{-7}$ |
| $\vdots$ | |
| $n$ | $10^{-2(n-1)-3} = 10^{-2n+2-3} = 10^{-2n-1} = 10^{-(2n+1)} = 10^{-2n} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{10} \cdot (10^{-2})^n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{100}\right)^n$ |

$$1,2\overline{01} = 1,2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{12}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{12}{10} + \frac{1}{1000} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}}_{\text{Série Geométrica Convergente}}$$

$a = 1 \quad q = \frac{1}{100} < 1$

$$1,2\overline{01} = \frac{12}{10} + \frac{1}{1000}\left(\frac{a}{1-q}\right) = \frac{12}{10} + \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{\underbrace{\frac{100}{100} - \frac{1}{100}}_{99/100}}\right)$$

$$1,2\overline{01} = \frac{12}{10} + \frac{1}{10\cancel{00}} \cdot \frac{1\cancel{00}}{99}$$

$$1,2\overline{01} = \frac{12}{10} + \frac{1}{990} = \frac{12 \cdot 99 + 1}{990} = \frac{1189}{999}$$

$$\text{Logo } 1,2\overline{01} = \frac{1189}{999}$$

Um artifício algébrico permite chegar mais rápido na solução:

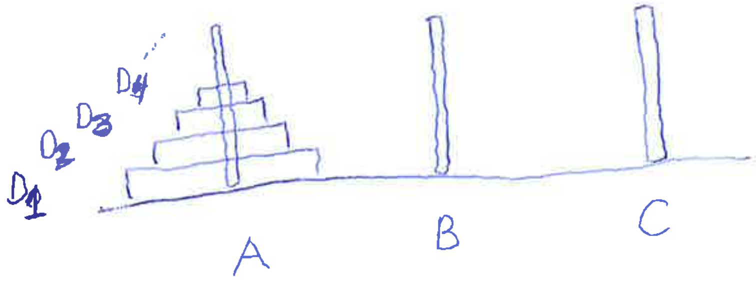
Seja $x = 1,2\overline{01}$ então

$$\begin{aligned} 1000\,x &= 1201,0101\ldots \\ -\quad 10\,x &= 12,0101\ldots \\ \hline 990\,x &= 1201 - 12 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1189}{990} \longrightarrow \boxed{1,2\overline{01} = \frac{1189}{990}}$$

# Torre de Hanói






1) Somente um disco pode ser movido de cada vez.

2) Um disco maior não pode ficar encima de um menor.

- Conta a lenda que 64 discos de ouro deveriam ser movidos, um por dia, seguindo as regras acima citadas. Quando todos os discos forem colocados de forma ordenada na posição C o mundo terminaria.

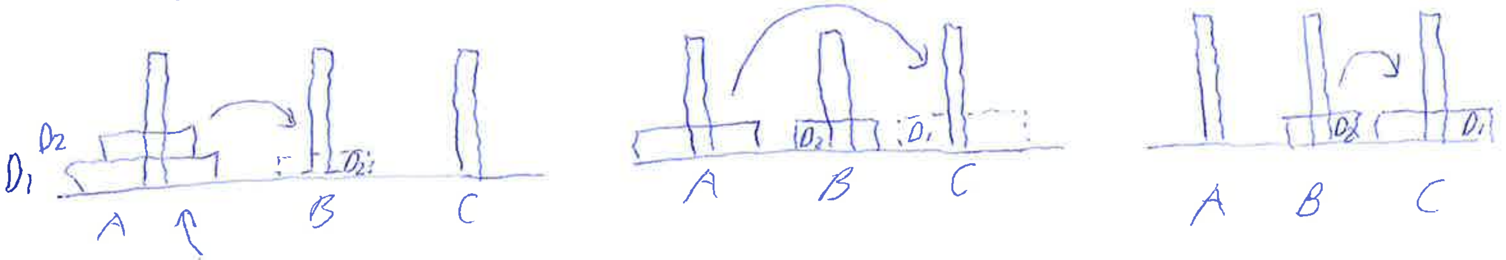
- Vamos analisar o problema partindo de um único disco.


$D_1(A \to C) \to 1$ movimento

$a_1 = 1$

$S_1 = a_1 = 1$

- Agora com 2 discos



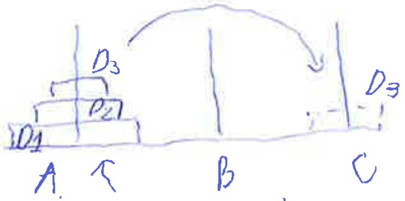

#par
$D_2$ passa pelo intermediário

$D_2(A \to B)$
$D_1(A \to C) \to a_1 = 1$
$D_2(B \to C)$
$\to a_2 = 2$

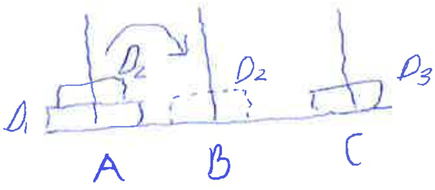
$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2$

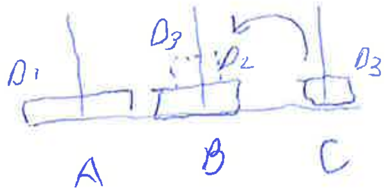
$S_2 = 3$

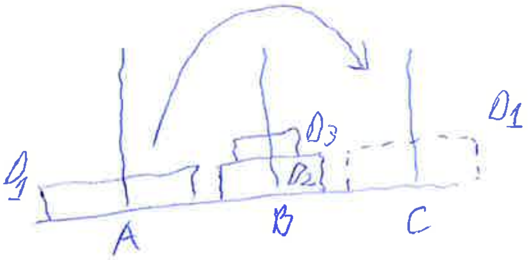
- Com 3 discos

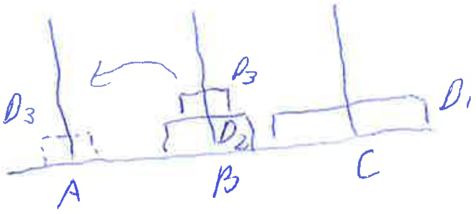


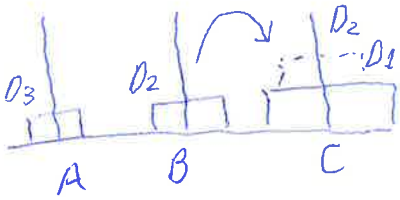

ímpar
(direito ao destino)

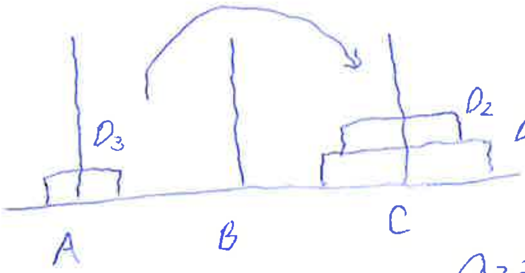



$D_3 (A \to C)$
$D_2 (A \to B)$
$D_3 (C \to B)$
$D_1 (A \to C) \to a_1 = 1$ $\quad a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$D_3 (B \to A)$
$D_2 (B \to C)$
$D_3 (A \to C)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$

- Com 4 discos


par (passa pelo intermediário)

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8$

$S_4 = 15$

$D_4 (A \to B)$ ✓
$D_3 (A \to C)$
$D_4 (B \to C)$ ✓
$D_2 (A \to B)$
$D_4 (C \to A)$ ✓
$D_3 (C \to B)$
$D_4 (A \to B)$ ✓
$D_1 (A \to C) \to a_1 = 1$
$D_4 (B \to C)$ ✓
$D_3 (B \to A)$
$D_4 (C \to A)$ ✓

$a_2 = 2$
$D_2 (B \to C)$
$D_4 (A \to B)$ ✓
$D_3 (A \to C)$
$D_4 (B \to C)$ ✓

$a_3 = 4$

$a_4 = 8$

E o termo n-ésimo?

$\{a_n\} = \{1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots\}$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $1 = 2^0$ |
| 2 | $2 = 2^1$ |
| 3 | $4 = 2^2$ |
| 4 | $8 = 2^3$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $2^{n-1}$ |

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$

- A razão (r) é constante $\Rightarrow$ É a sequência geradora de uma série geométrica

- Como $r = 2 > 1$ a série geométrica é DIVERGENTE.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}(1-r^n)$ ← Fórmula válida para a soma parcial n-ésima

$\boxed{S_n = 2^n - 1}$

para 64 discos → $S_{64} = \frac{1}{1-2}(1-2^{64})$

$S_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ dias

$S_{64} \rightarrow 5{,}0539 \times 10^{16}$ anos

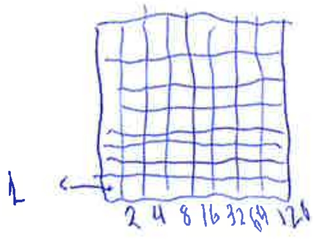
- Idade da Terra → $4{,}54 \cdot 10^9$ anos
- Idade do Universo desde o Big Bang → $13{,}82 \cdot 10^9$ anos

O fim do mundo ainda demora!!!

$S_n = 2^n - 1$

$S_6 = 2^6 - 1 = 63$

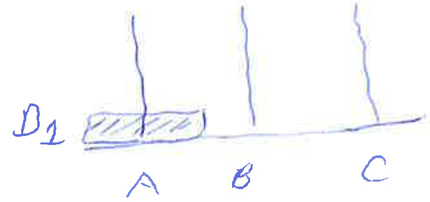
Lenda do Jogo de Xadrez

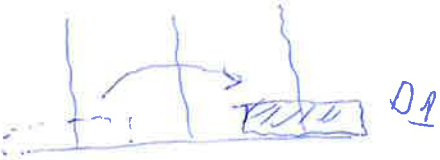


# Prova de Existência de Solução por Indução para o Problema da Torre de Hanoi.

④

Base: Considere que existe um único disco $D_1$.

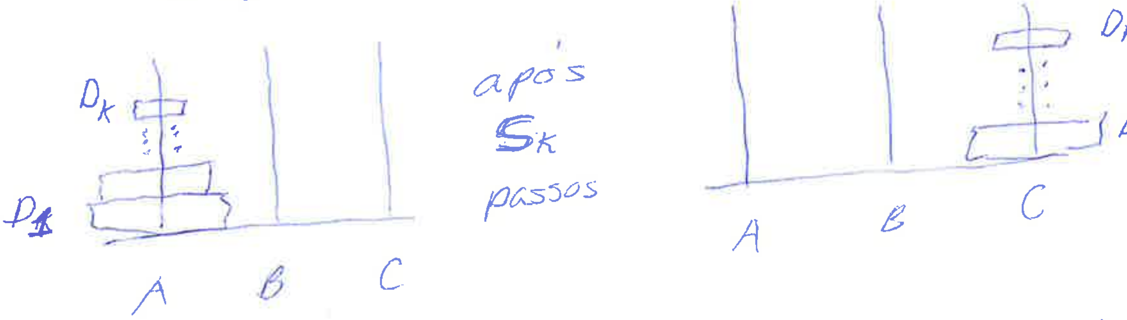


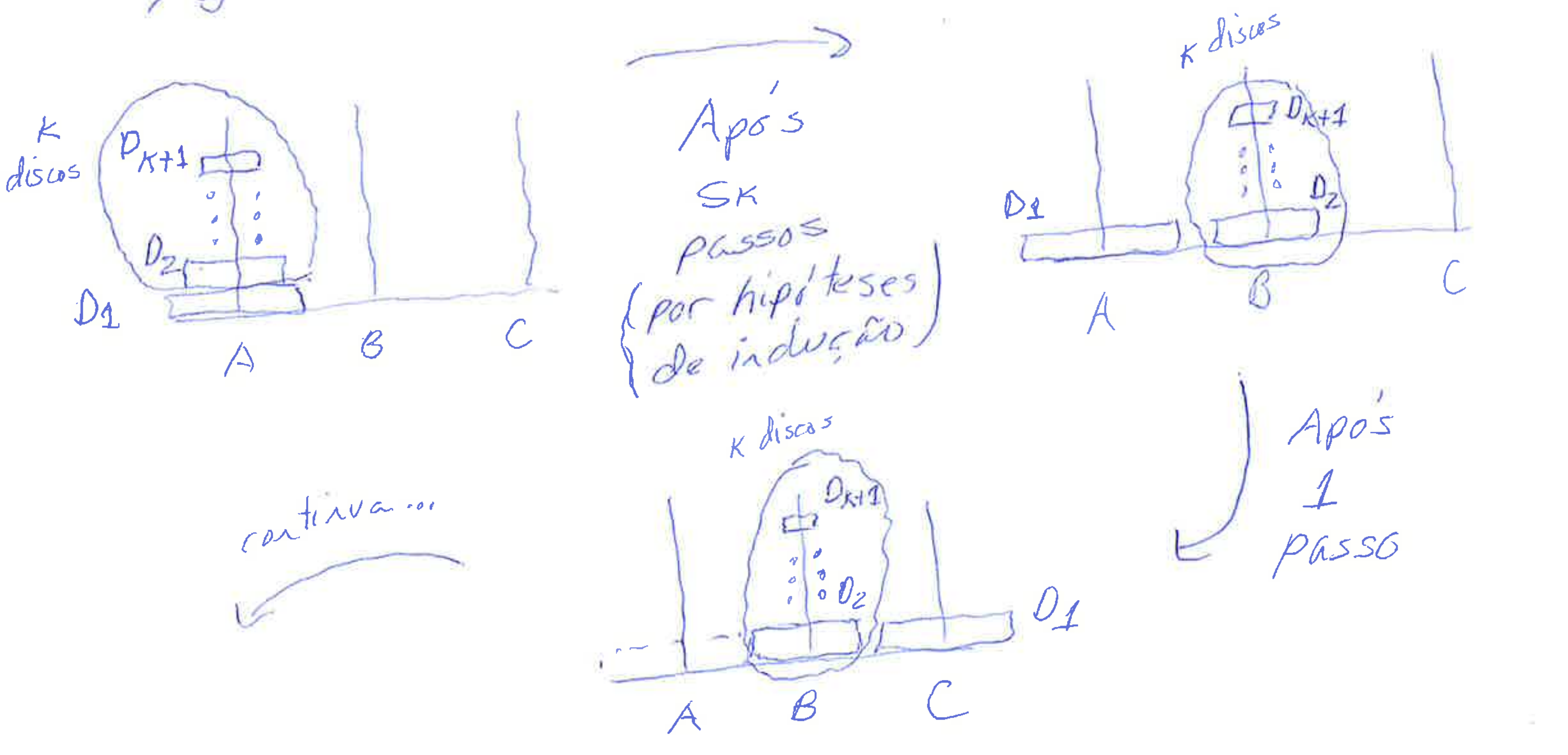

Basta deslocar de A para C em um único passo: $S_1 = 1$

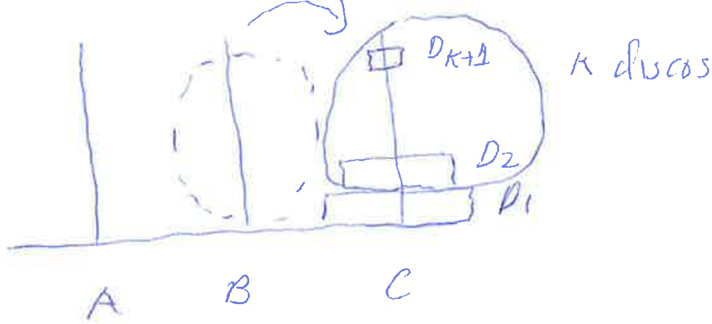
Passo Indutivo: Vamos considerar que são necessarios $S_K$ passos para deslocar $K$ discos (onde $K$ é um número natural arbitrário). Logo existe solução com $K$ discos.

(Hipóteses de Indução)




Agora vamos adicionar mais um disco: Total $K+1$ discos.






... $\longrightarrow$

Após $S_K$ passos
(por hipóteses de indução)

Logo, para $K+1$ discos existe solução e são necessários $S_{K+1}$ passos onde

$$S_{K+1} = S_K + 1 + S_K$$

$$\boxed{S_{K+1} = 2S_K + 1} \leftarrow \text{Fórmula Recorrente}$$

Sabemos que $S_1 = 1$

Logo: $S_2 = 2S_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow S_2 = 3$

$S_3 = 2S_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \Rightarrow S_3 = 7$

$S_4 = 2S_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \Rightarrow S_4 = 15$

# Matemática Financeira I

## Problema do Depósito Único

- Suponha que no dia do seu nascimento seu pai ficou tão feliz que depositou 1000 Reais no seu nome num banco. Hoje, 25 anos depois, ele decide revelar o segredo. Assuma que a taxa de juros mensal foi constante e igual a 1%. Não teve retiradas de dinheiro até agora. Quanto dinheiro você teria com juros simples e com juros compostos.

- Sol.: $a_0 = D \leftarrow$ Depósito Inicial

$a_1 = D + D\alpha \leftarrow$ 1 mês depois
$= D(1+\alpha)$

$\alpha$ é a taxa de juros
no nosso problema $\alpha = 1\% = 0{,}01$

Juros Simples

$a_2 = D + D\alpha + D\alpha = D(1+2\alpha)$

$a_3 = D(1+2\alpha) + D\alpha = D(1+3\alpha)$

$\vdots$

$$\boxed{a_n = D(1+n\alpha)}$$

Juros Simples
Seq. Aritmética
razão $= D\alpha$

Juros Compostos

$a_2 = D(1+\alpha) + D(1+\alpha)\alpha = D(1+\alpha)^2$

$a_3 = D(1+\alpha)^2 + D(1+\alpha)^2\alpha = D(1+\alpha)^3$

$\vdots$

$$\boxed{a_n = D(1+\alpha)^n}$$

Juros Compostos
Seq. Geométrica
razão $= 1+\alpha$

- No nosso problema $D = 1000$ Reais, $\Delta t = 25$ anos $= 25 \times 12$ meses

$\Delta t = \boxed{n = 300 \text{ meses}}$

Juros Simples

$$a_{300} = 1000\,(1 + 300 \cdot 0{,}01)$$

$$\boxed{a_{300} = 4000 \text{ Reais}}$$

Juros Compostos

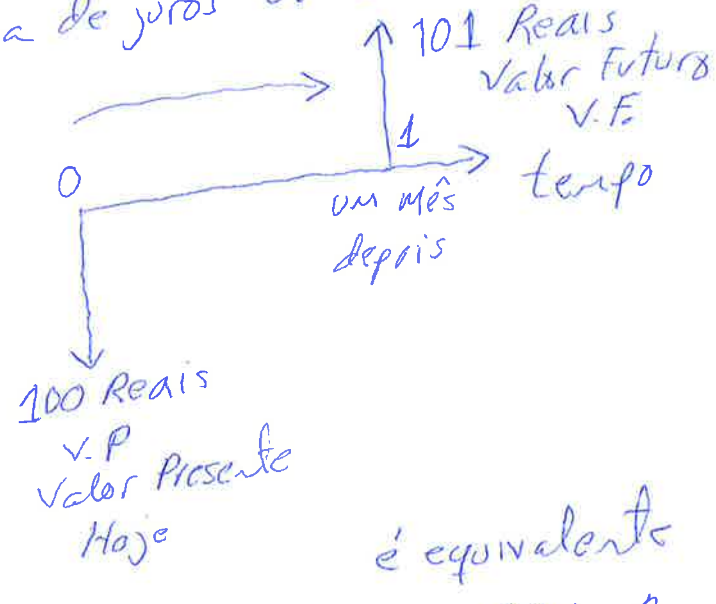
$$a_{300} = 1000\,(1 + 0{,}01)^{300}$$

$$\boxed{a_{300} = 19788{,}46 \text{ Reais}}$$

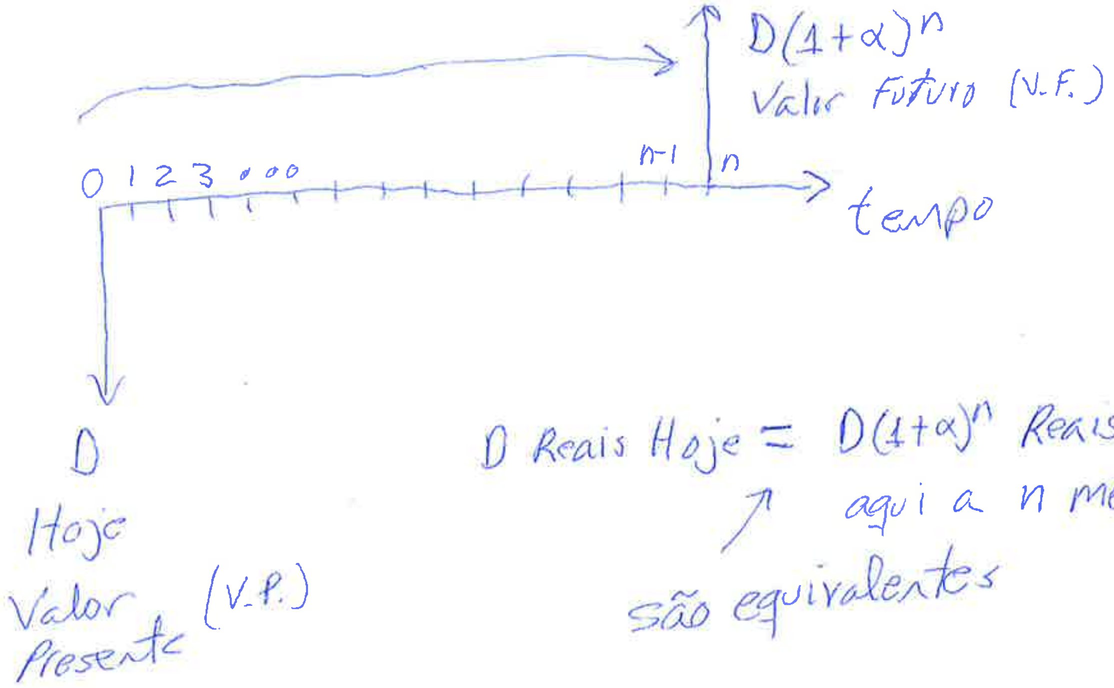
- A partir deste momento usaremos somente juros compostos que são os utilizados pelos bancos.

- Diagramas de Fluxo de Caixa

taxa de juros $\alpha = 1\%$

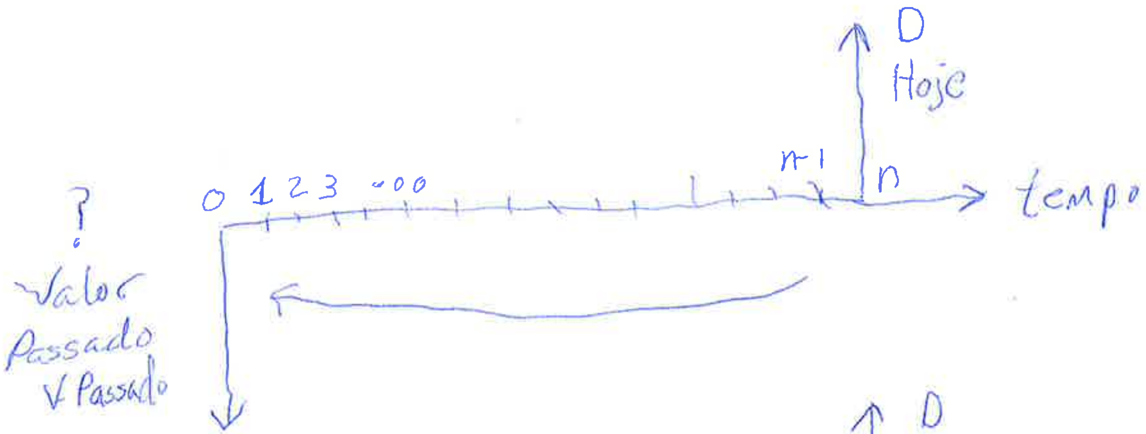


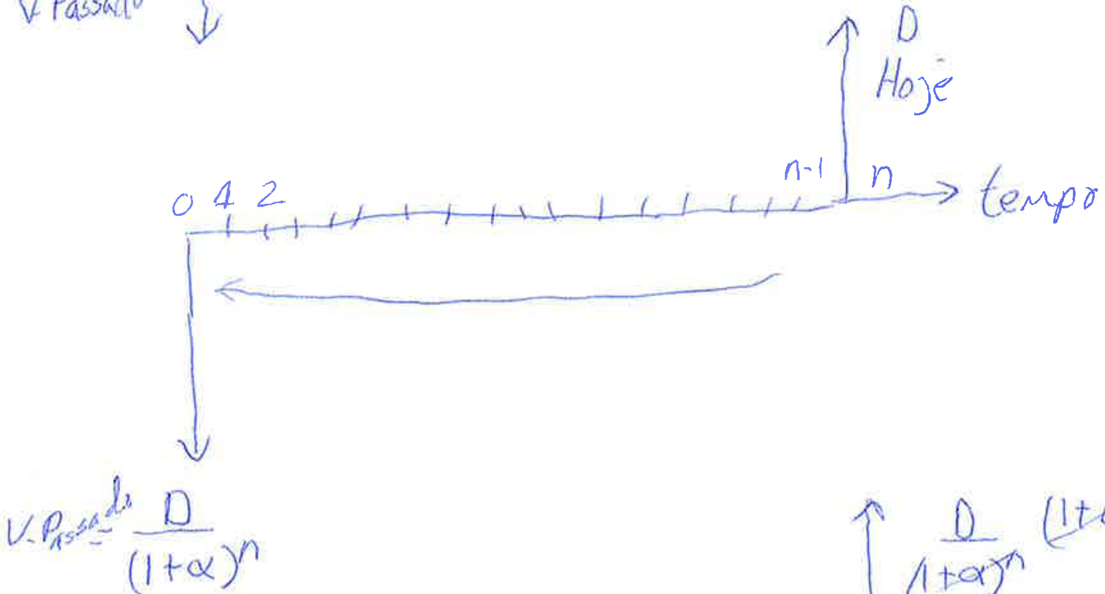

100 Reais Hoje $\overset{\text{é equivalente}}{=}$ 101 Reais de aqui a um mês

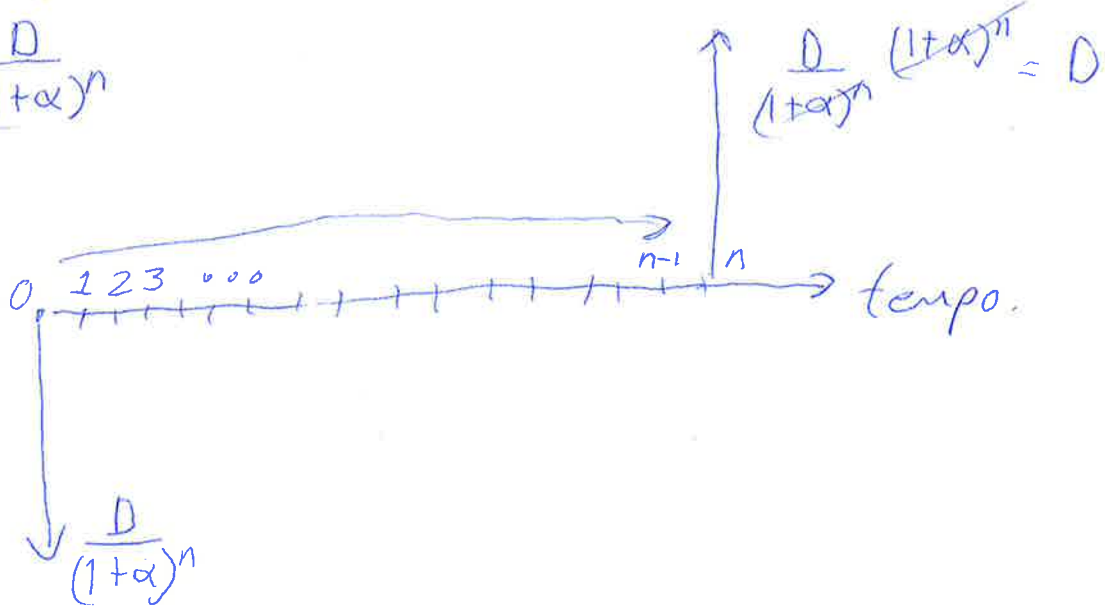



D Reais Hoje = $D(1+\alpha)^n$ Reais de aqui a n meses

são equivalentes



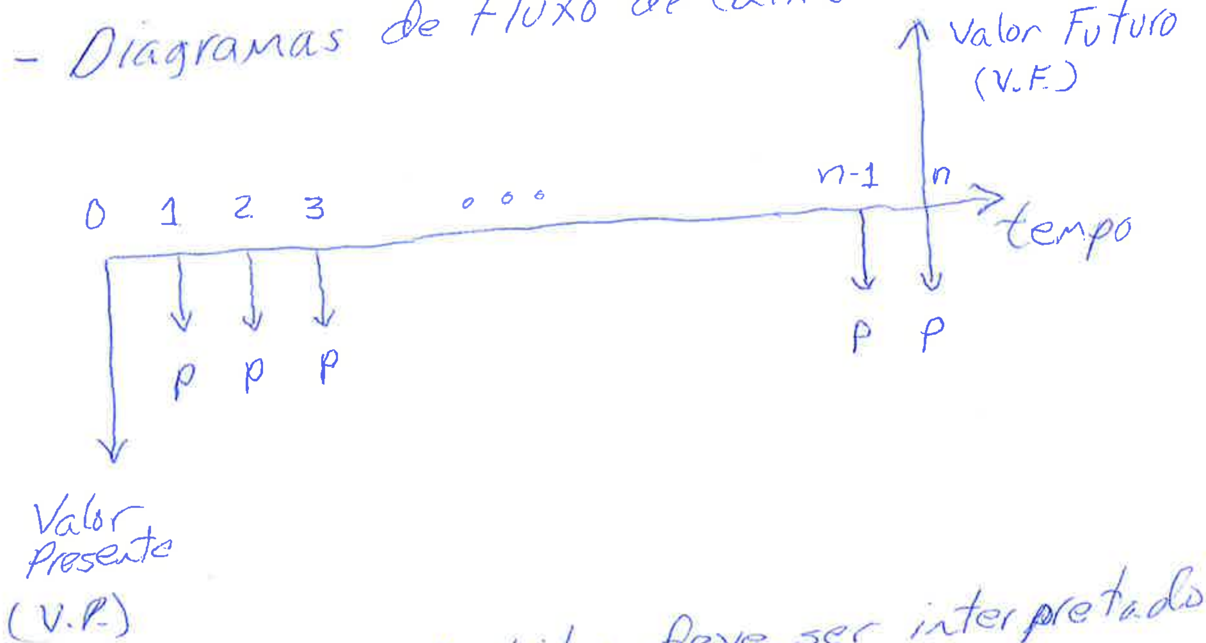



# Matemática Financeira II

## Problema dos Depósitos Mensais (Poupança Programada)

- Você deposita todo mês 100 Reais durante 5 anos. Suponha que a taxa de juros compostos foi constante e igual a 1% mensal. Quanto dinheiro você poderia retirar após esse período.

- Diagramas de Fluxo de Caixa




- Cada um dos depósitos deve ser interpretado como um depósito único (considerando a taxa de juros constante) e deslocado no tempo (para um mesmo instante de tempo).

- Vamos deslocar todos os depósitos para o instante de tempo n.

$$V.F. = V.P.(1+\alpha)^n + \underbrace{P(1+\alpha)^{n-1} + \dots + P(1+\alpha)^1 + P}_{\text{trocando a ordem}}$$

$$V.F. = V.P.(1+\alpha)^n + \overset{(1+\alpha)^0}{P} + P(1+\alpha)^1 + \dots + P(1+\alpha)^{n-1}$$

$$V.F. = V.P.(1+\alpha)^n + \sum_{i=1}^{n} P(1+\alpha)^{i-1}$$

Comparando com a soma parcial n-ésima de uma série geométrica

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a r^{i-1} = \frac{a}{1-r}(1-r^n)$$

Identificamos $\boxed{a = P}$ e $\boxed{r = 1+\alpha} > 1$ pois $\alpha > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} P(1+\alpha)^{i-1} = \frac{P}{1-(1+\alpha)}\left[1-(1+\alpha)^n\right]$$

$$= \frac{P}{\alpha}\left[(1+\alpha)^n - 1\right]$$

Logo

$$\boxed{V.F. = V.P.\,(1+\alpha)^n + \frac{P}{\alpha}\left[(1+\alpha)^n - 1\right]}$$

Em Excel encontram a função predefinida

V.F. = (Juros, Número de Períodos, Parcela, V.P., 0 )

$$\text{Juros} \downarrow \alpha \qquad \text{Número de Períodos} \downarrow n \qquad \text{Parcela} \downarrow P \qquad 0 \downarrow \text{zero}$$

Juros Pagos após um mês

- No nosso exercício

$V.P. = 0$

$P = 100$ Reais

$\Delta t = 5$ anos $= 5 \cdot 12$ meses $= 60$ meses

$\Downarrow$

$n = 60$

$\alpha = 1\% = 0{,}01 = cte$

$V.F. = ?$

③

$$V.F. = \frac{P}{\alpha}\left[(1+\alpha)^n - 1\right]$$

$$V.F. = \frac{100}{0,01}\left[(1+0,01)^{60} - 1\right]$$

$$V.F. = 8166,97 \text{ Reais}$$

Lucro = V.F. − Total de Depósitos

Lucro = 8166,97 − 60·100 = 2166,97

$$\% \text{ Lucro} = \frac{\text{Lucro}}{\text{Total de Depósitos}} = \frac{2166,97}{6000} \approx 36\%$$

# Matemática Financeira III

Melhor a vista com desconto ou parcelado em n vezes iguais?

- Seu IPTU é de 500 Reais. Se pagar a vista terá um desconto de 10%. Também pode pagar em 10 parcelas iguais e "sem juros" de 50 Reais cada uma. Seu dinheiro depositado no banco rende a uma taxa mensal de juros de 1%. O dia do pagamento "a vista" coincide com o dia do primeiro pagamento parcelado. Qual é a melhor alternativa?

Sol.: Vamos modelar as duas alternativas

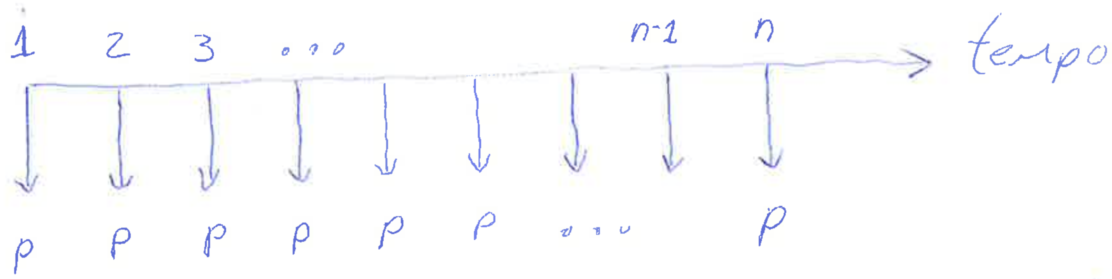
Representaremos com a letra T o valor do imposto. No nosso caso T = 500 Reais. A letra D representa o desconto, caso o pagamento seja a vista, ou seja $D = 10\%$ $D = 0{,}01$

A letra **n** **representa** o número de parcelas, $n = 10$ e a letra $\alpha$ ($\alpha = 1\%$) os juros obtidos se o dinheiro ficasse em uma aplicação no banco. $p = T/n$ é o valor de cada parcela, $p = 50$ Reais.

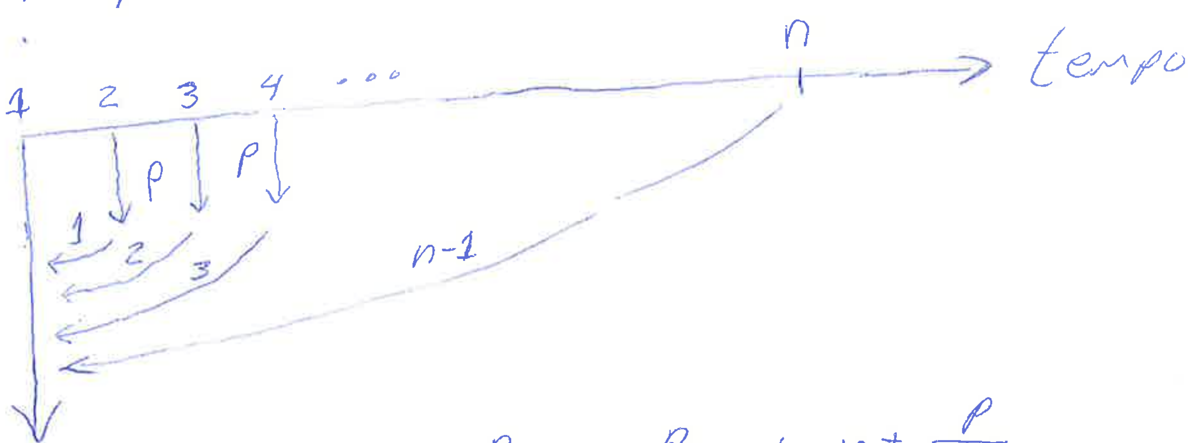
Alternativa 1: Pagamento "A vista"


$$\boxed{V.P.1 = T(1-D)}$$

Alternativa 2: Pagamento Parcelado




Para poder comparar devemos deslocar todos os pagamentos da segunda alternativa para o instante de tempo inicial.




$$V.P.2 = p + \frac{p}{1+\alpha} + \frac{p}{(1+\alpha)^2} + \frac{p}{(1+\alpha)^3} + \dots + \frac{p}{(1+\alpha)^{n-1}}$$

$$V.P.2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p}{(1+\alpha)^{i-1}} = p \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{i-1}$$

Notem que a sequência geradora dessa soma é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{1+\alpha}$.
(P.G)

Comparando com a soma dos primeiros n-termos de uma P.G.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a r^{i-1} = \frac{a}{1-r}\left[1-r^n\right]$$

Temos que $a=1$ e

$$V.P.2 = P \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n\right]$$

$$\boxed{V.P.2 = P\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n\right]}$$

No Excel $\rightarrow$ VP($\alpha$, n, p, 0, 1)

V.F. (valor futuro) — 0

pagamento no início do período — 1

Voltando as números do nosso problema

$$V.P.1 = T(1-D) = 500\,(\underbrace{1-0{,}10}_{0{,}9}) = 450 \text{ Reais}$$

$$V.P.2 = P\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n\right]$$

$$= 50\left(\frac{1+0{,}01}{0{,}01}\right)\left[1-\left(\frac{1}{1+0{,}01}\right)^{10}\right]$$

$$= 478{,}30$$

Logo, o desconto por pagar "A vista" é maior que os juros obtidos por aplicar o dinheiro que ainda não foi pago de forma parcelada.

(4)

No mesmo problema numérico

- Se o desconto "A vista" fosse 40% (ou menos) seria melhor parcelar.
- Se o desconto "A vista" continuasse em 10%, mas pudesse parcelar em 23 vezes também seria melhor parcelar.

# Série Telescópica

**Ex.:** Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$ é convergente e calcule sua soma.

**Sol.:** Note que a seq. geradora da série é

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

e que não é uma progressão geométrica:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{e} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \cdot \frac{n\cancel{(n+1)}}{1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \neq \text{cte}$$

- Na vídeo-aula sobre somas telescópicas vimos que

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

→ decomposição em frações simples

logo

seq. geradora

$$\{a_n\} = \Big\{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{n=1}, \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{n=2}, \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{n=3}, \ldots, \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \ldots\Big\}$$

seq. das somas parciais

$$\{S_n\} = \Big\{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{S_1}, \underbrace{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}}_{S_2 = 1-\frac{1}{3}}, \underbrace{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}}_{S_4 = 1-\frac{1}{4}}, \ldots, \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{S_n}, \ldots\Big\}$$

Temos uma fórmula fechada para $S_n$, logo podemos calcular o limite quando $n \to \infty$.

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{0}$$

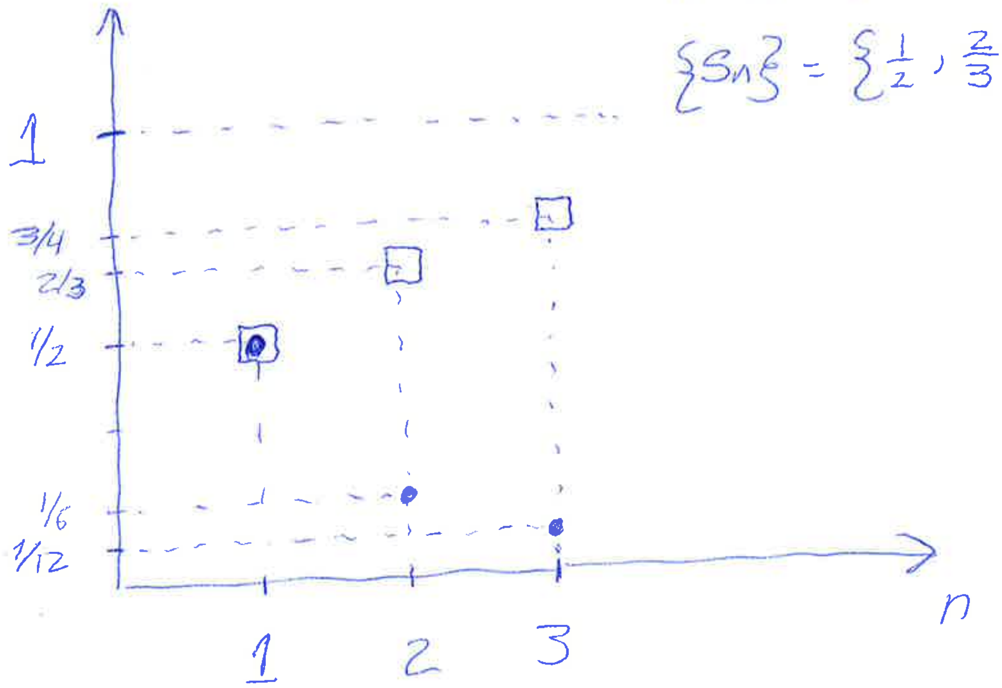
$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = 1 \leftarrow$$ A série é convergente e sua soma é 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right] = 1$$

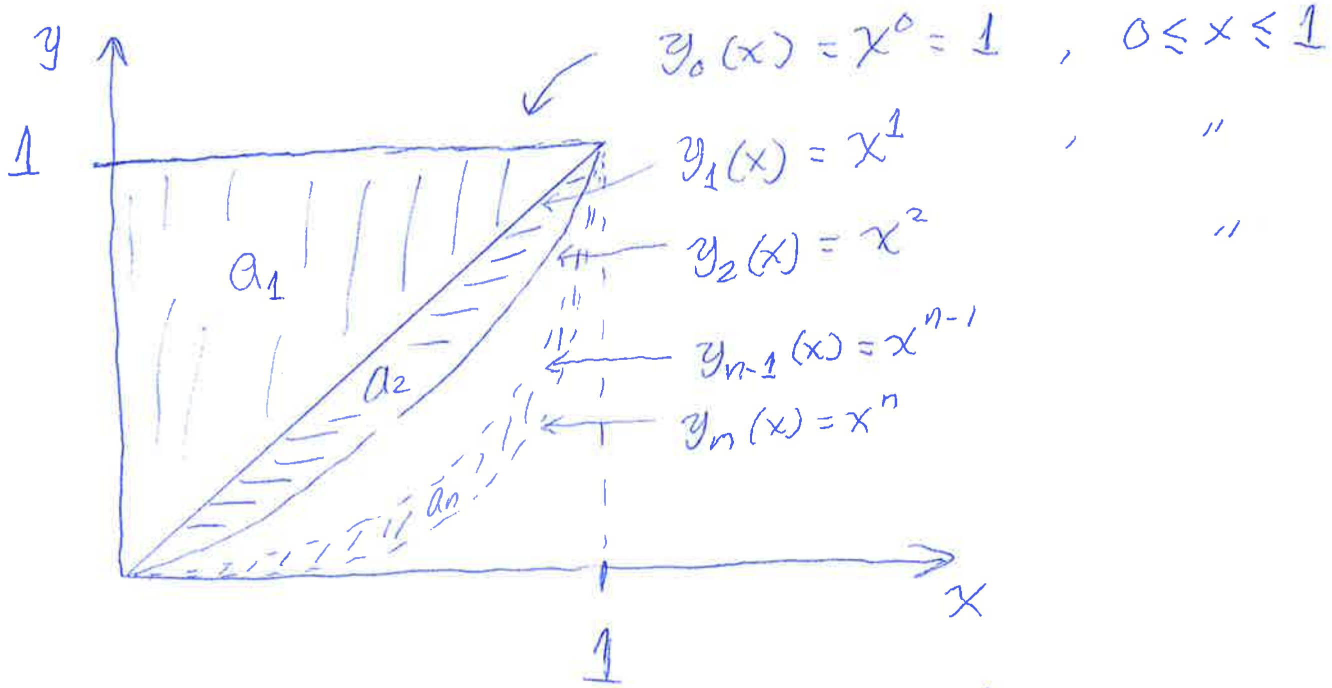
Interpretação Gráfica

$\{a_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\} \to \bullet$

$\{S_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\} \to \square$



Outro Modelo Geométrico é usando funções




$$a_1 = \int_0^1 x^0\,dx - \int_0^1 x^1\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \int_0^1 x^1\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

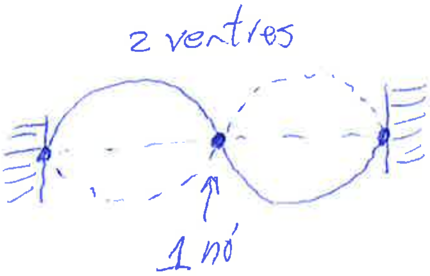
$$a_n = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - \int_0^1 x^n = \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

# Série Harmônica

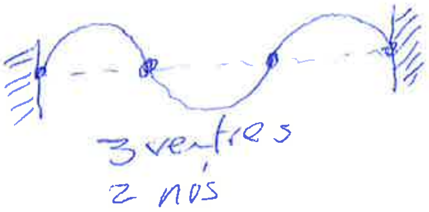
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

O nome "harmônica" é devido aos comprimentos de vibração ressonante de uma corda fixa entre dois extremos.


$$L = \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2L\left(\frac{1}{1}\right)$$

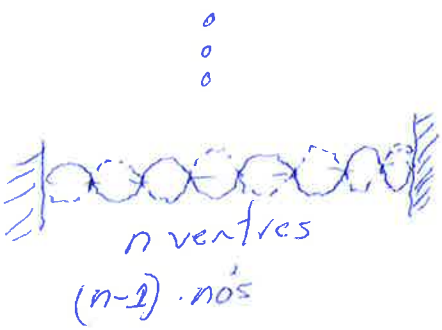



$$L = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 2L\left(\frac{1}{2}\right)$$




$$L = \frac{3}{2}\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 2L\left(\frac{1}{3}\right)$$

$\vdots$




$$L = \frac{n}{2}\lambda_n \Rightarrow \lambda_n = 2L\left(\frac{1}{n}\right)$$

| $n$ | $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | $1/2$ | $1+\frac{1}{2}=1{,}5$ |
| 3 | $1/3$ | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\approx 1{,}83$ |
| ⋮ | | |
| 10 | $1/10$ | $\approx 2{,}93$ |
| ⋮ | | |
| 100 | $10^{-2}$ | $\approx 5{,}18$ |
| ⋮ | | |
| 1000 | $10^{-3}$ | $\approx 7{,}48$ |
| ⋮ | | |
| $10^4$ | $10^{-4}$ | $\approx 9{,}78$ |
| ⋮ | | |
| $10^5$ | $10^{-5}$ | $\approx 12{,}09$ |
| $10^6$ | $10^{-6}$ | $\approx 14{,}39$ |
| ⋮ | | |
| $10^{11}$ | | $\approx 27$ |

↳ Ordem de grandeza do número de segundos passados desde o ano de 4000 A.C. até agora. Isto é, se tivessemos começado a somar nessa data e calculasemos cada termo em um segundo o valor da soma parcial atualmente seria aproximadamente 27.

- Vamos mostrar que embora a série cresce lentamente ela é divergente:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = +\infty$$

$$S_1 = S_{2^0} = 1 + 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S_2 = S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S_4 = S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S_8 = S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{1/2} =$$

$$= 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\vdots$

$$S_{2^n} > 1 + n\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{conjetura}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2^n}) > \lim_{n\to\infty}\left[1 + n\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \infty \quad (\text{Não existe})$$

Se o limite da subsequência infinita de $S_n$ não existe o limite de $S_n$ também não existirá.

Logo, concluimos que a série harmônica é divergente.

Ex.: Se você tivesse um balde e uma piscina para encher e fossem dados dois caminhos:

a) Seguindo a ~~seq.~~ série harmônica $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

b) Seguindo a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

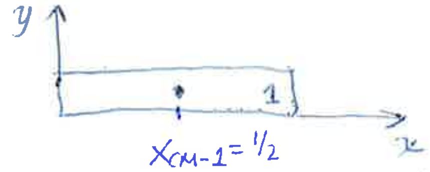
Qual você escolheria?

Sol.: A primeiro caminho, como a série é divergente ...

garanto que o volumem da piscina crescerá indefinidamente. No segundo caminho a série é convergente, logo não conseguiremos encher a piscina se esta for suficientemente grande. (4)

Série Harmônica

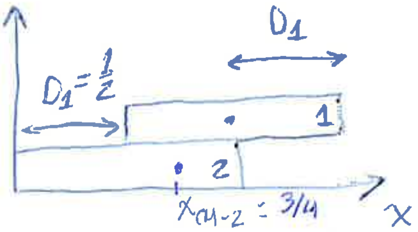
(1)



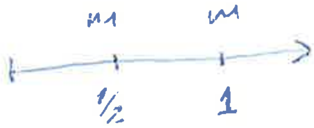

$$x_{CM-1} = \frac{1}{2}$$

$$D_1 = 1 - x_{CM-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

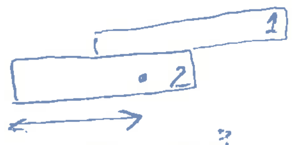
(2)




$$D_1 = 1 - x_{CM-1} = \frac{1}{2}$$



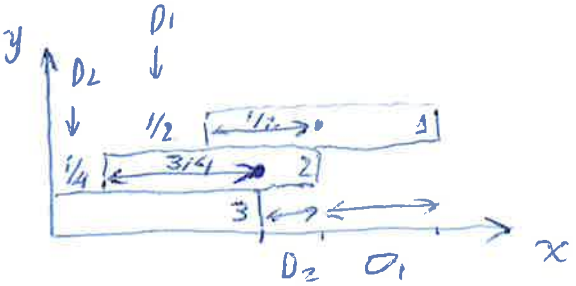

$$x_{CM-2} = \frac{\frac{1}{2}m + 1 \cdot m}{2m} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$$

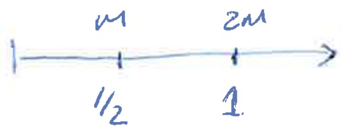



conjunto de 2 barras

$$D_2 = 1 - x_{CM-2} = \frac{1}{4}$$

(3)



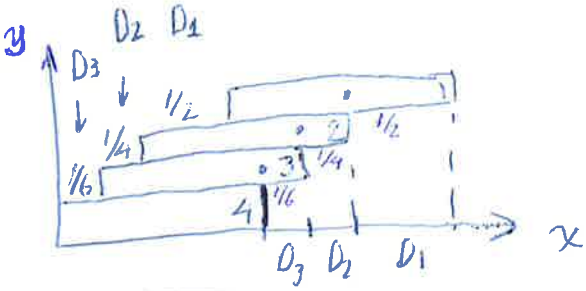



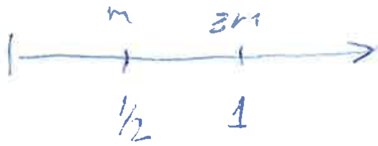

$$x_{CM-3} = \frac{\frac{1}{2}m + 1 \cdot 2m}{3m} = \frac{\frac{1}{2} + 2}{3} = \frac{5}{6}$$

Centro de Massa do conjunto de 3 barras


$$D_3 = 1 - x_{CM-3} = \frac{1}{6}$$

(4)




$$x_{CM-4} = \frac{\frac{1}{2}m + 1 \cdot 3m}{4m} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{7}{8}$$

$$D_4 = 1 - x_{CM-4} = \frac{1}{8}$$

$$x_{CM-n} = \frac{\frac{1}{2}m + (n-1)m}{nm} = \frac{\frac{1}{2} + (n-1)}{n}$$

$$x_{CM-n} = \frac{n - \frac{1}{2}}{n}$$

$$\boxed{x_{CM-n} = 1 - \frac{1}{2n}}$$

$$D_n = 1 - x_{CM-n}$$

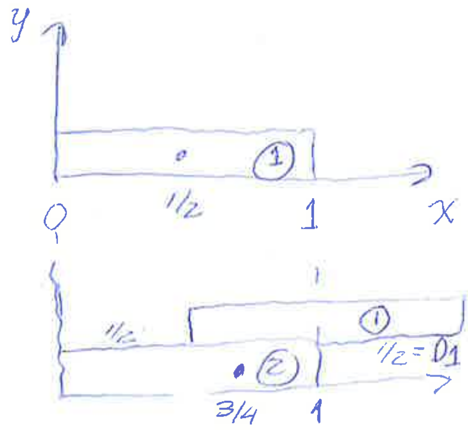
$$\boxed{D_n = \frac{1}{2n}}$$

$$\text{Saliência}_n = S_n = \sum_{i=1}^{n} (D_i) = \text{Divergente}$$

Série Harmônica

| $k$ | $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1,5 |
| 3 | 1,83 |
| 10 | 2,93 |
| 100 | 5,18 |
| 1000 | 7,48 |

| $k$ | |
|---|---|
| 10 000 | 9,78 |
| 100 000 | 12,09 |
| 1000 000 | 14,39 |




| $n$ | $x_{CM-n}$ | $D_n$ | Saliência (do bloco 1 respeito ao ~~[illegible]~~ n+1) |
|---|---|---|---|
| 1 | $1/2$ | $1-1/2=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}=0,5$ |
| 2 | $3/4$ | $1-3/4=1/4$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$ |
| 3 | $5/6$ | $1-5/6=\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}=0,92$ |
| 4 | $7/8$ | $1-7/8=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}=1,04$ $>1$ primeiro ponto em relação ao ~~[illegible]~~ |
| 5 | $9/10$ | $1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{137}{120}=1,14$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $1-\frac{1}{2n}$ | $\frac{1}{2n}$ | $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$ |

Divergente

# Teste da Divergência

Teorema: $\underbrace{\text{Se a série } \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) \text{ for convergente}}_{A}$ $\boxed{\text{então}}$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0}_{B}.$$

Prova: Se uma série é convergente existe o limite quando $n\to\infty$ de $S_n$ (como valor finito)

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = S$$

Por outro lado,

$$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \text{ou}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Calculando limite nos dois lados

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) - \lim_{n\to\infty}(S_{n-1})$$

$$= S - S$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \quad \blacksquare$$

- Para um teorema do tipo $A \Rightarrow B$ a recíproca não é válida em geral $B \not\Rightarrow A$.

- No teorema anterior

Se $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \underset{\text{em geral}}{\not\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é convergente

Ex. Se $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Porém, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ é a série harmônica que é divergente.

- Porém, se $A \Rightarrow B$ então é equivalente falar que a negação de $B \Rightarrow$ a negação de $A$

Não $B \Rightarrow$ Não $A$.

<u>Teste da Divergência</u>

Se $\lim_{n\to\infty}(a_n)$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é divergente.

Ex. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{5n^2+4}\right)$ diverge. 3

Sol.: A sequência geradora é

$$a_n = \frac{n^2}{5n^2+4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{5n^2+4}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$$

Pelo Teste da Divergência a Serie correspondente é Divergente.

Resumindo

- Se $\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0 \Longrightarrow$ A série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é divergente.
- Se $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Longrightarrow$ Nada pode ser afirmado sobre a convergência ou divergência de a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$ forem séries convergentes então também o serão as séries $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ (onde c é uma constante) e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$.

Ex.: Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n}\right]$.

Sol.: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{7}{n(n+1)}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right) = \underbrace{7\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{\substack{\text{Telescópica} \\ \text{Soma} = 1}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\substack{\text{Série Geométrica} \\ a=\frac{1}{3} \quad q = 1/3 < 1 \\ \text{convergente}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{7}{n(n+1)}+\frac{1}{3^n}\right]=7+\frac{1/3}{1-1/3}=7+\frac{1}{2}=7,5.$$

Ex.: O que está errado com o seguinte cálculo?

(I) $0=0+0+0+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(0)$

(II) $0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(1)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$

(III) $0=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1+1)$

(IV) $0=1+0+0+0 \qquad =1+\sum_{n=1}^{\infty}(0)$

(V) $0\overset{?}{=}1$

Sol.: Na segunda linha a segunda igualdade não é verdadeira, como as sequências geradoras são $a_n=1$ e $b_n=-1$ e $\lim_{n\to\infty}(a_n)=1\neq0$ e $\lim_{n\to\infty}(b_n)=-1\neq0$ as séries correspondentes são divergentes.

# Estimativa da Soma de uma Série pelo Teste da Integral. (1)

3) - $f(x)$ decrescente, contínua e positiva

2) - $a_n = f(x=n)$

1) - Vamos comparar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

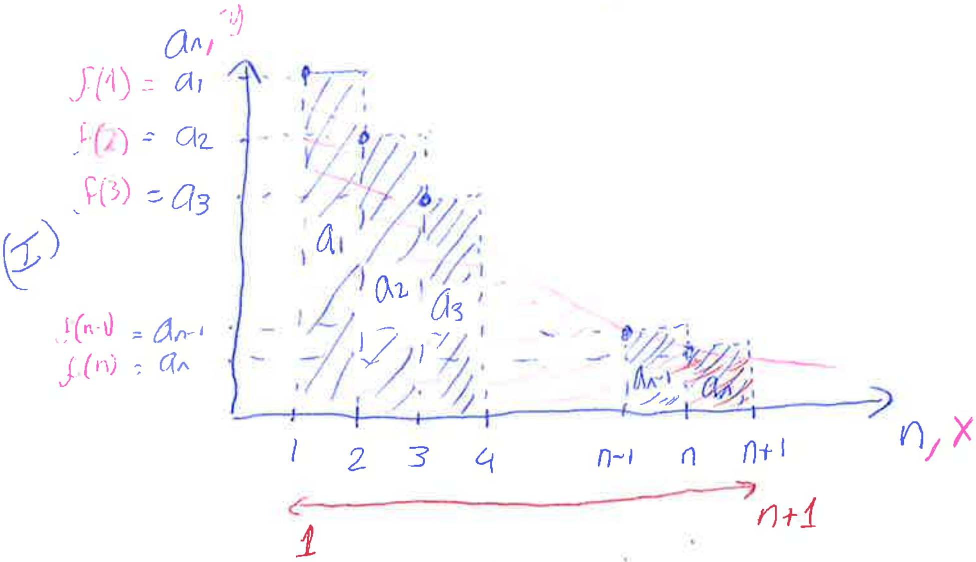
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Aproximação $\rightarrow$ $S \approx S_n$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = S_n + R_n \quad \swarrow \text{erro}$$

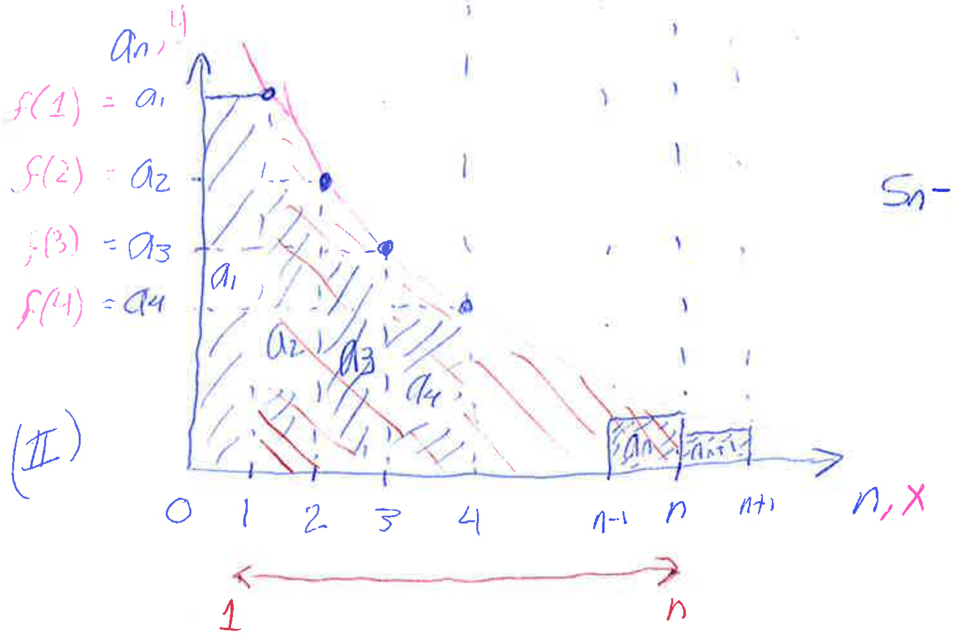
$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

(I)




$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

(II)



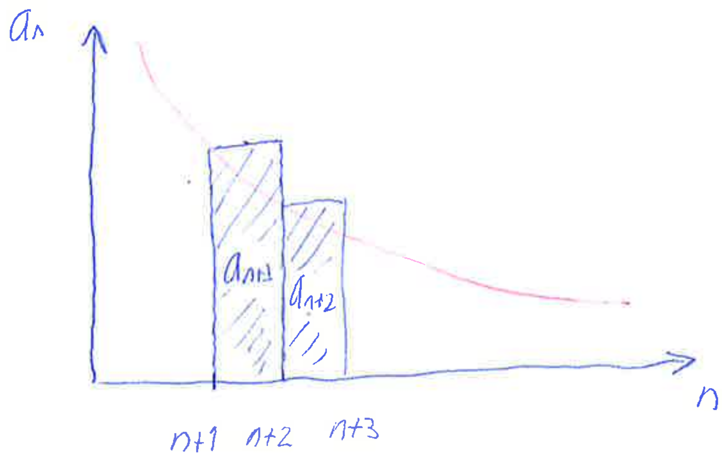

$$S_n - a_1 \leq \int_1^{n} f(x)dx$$

$$S_n \leq \int_1^{n} f(x)dx + a_1$$

juntando as duas desigualdades

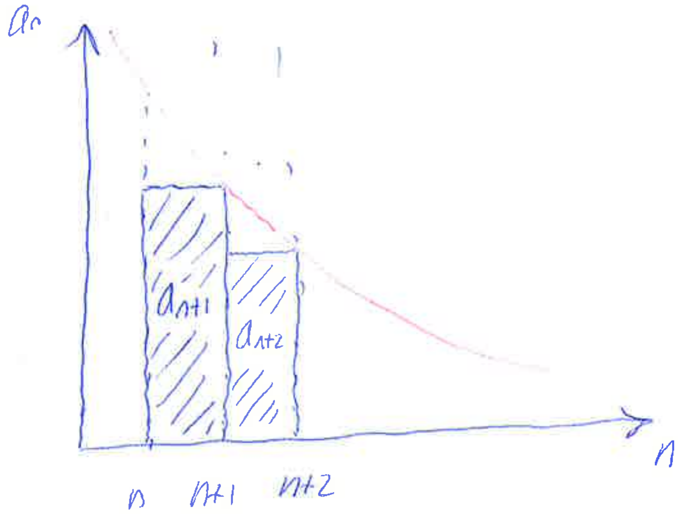
$$\underbrace{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n}_{\text{Uso esta parte (I) se a integral divergir}} \underbrace{\leq \int_1^{n} f(x)\,dx + a_1}_{\text{Uso esta parte (II) se a integral convergir}}$$

(I')




$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n$$

(II')




$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$ ← Estimativa para o resto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n) = S_n + R_n = S$$

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq S_n + \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$ ← Estimativa para a soma da série

③

Ex. Encontre a soma parcial $S_{10}$ da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Estime o erro cometido ao usar $S_{10}$ como uma aproximação para a soma da série.

Sol. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \approx S_{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{10^4} = 1{,}08204$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$a_n = \frac{1}{n^4} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[\int_n^A \frac{dx}{x^4}\right] = -\frac{1}{3}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\Big|_n^A\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{A^3} - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3n^3} \longrightarrow n=10 \rightarrow \int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3\cdot 10^3} = 0{,}33\cdot 10^{-3}$$

trocando de $n \to n+1$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3(n+1)^3} \longrightarrow n=10 \rightarrow \int_{11}^{\infty}\frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3\cdot 11^3} = 0{,}25\cdot 10^{-5}$$

$$0{,}25\cdot 10^{-5} \leq R_{10} \leq 0{,}33\cdot 10^{-3}$$

$$0{,}0000025 \leq R_{10} \leq 0{,}00033$$

erro mínimo

erro máximo

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \approx 1{,}0820 \pm 0{,}00033}$$

erro = 0,00016

erro mais provável é a metade do intervalo

$$1{,}0820425 \leq S \leq 1{,}08237$$

↑ soma da série

# Teste da Comparação

**Teorema:** Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos e suponha que para todo $k \geq N$
"quase todos os termos"

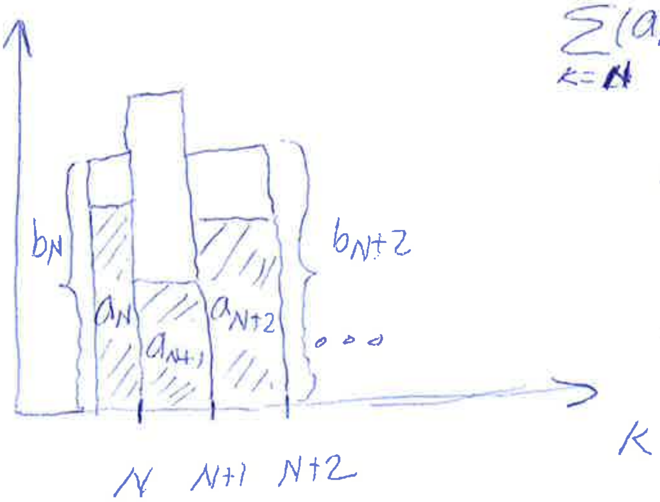
$$a_N \leq b_N$$
$$a_{N+1} \leq b_{N+1}$$
$$a_{N+2} \leq b_{N+2}$$
$$\vdots$$

i) Se a "série maior" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergir, então a "série menor" $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também convergirá.

ii) Se a "série menor" $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergir, então a "série maior" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ também divergirá.

## Ideia gráfica do Teorema

termos não negativos, as sequências das somas parciais de ambas as séries são crescentes.




$$\sum_{k=N}^{\infty}(a_k) \leq \sum_{k=N}^{\infty}(b_k)$$

i) $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ convergente

$$\Downarrow$$

$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ convergente

ii) $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ divergir

$$\Downarrow$$

$\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ diverge

Passos para usar o Teste de Comparação na série $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k)$.

- Faça uma conjetura (palpite) sobre a convergência ou divergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.
- Encontre uma série que prove sua conjetura. As séries usualmente usadas para comparação são as séries $p$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)\right.$, convergente se $p>1$ e divergente se $\left.p\leq 1\right)$

e a série geométrica $\left(\sum_{n=1}^{\infty}[ar^{n-1}]\right.$, convergente se $|r|<1$, divergente se $\left.|r|\geq 1\right)$

Ex. 1: Convergente ou Divergente?

$$\sum_{k=45^2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-45}\right).$$

Sol.: Quando $k\to\infty$ o 45 do denominador é irrelevante para saber a convergência. Por isso podemos pensar na série $\sum_{k=45^2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ para comparação. Note que é uma série-$p$, com $p=1/2$, logo divergente. Note também que para todo $k\geq 45^2+1$ todos os termos da série são positivos e

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}-45}$$

$$a_k < b_k$$

Como a série "menor" $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ é divergente a série "maior" $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-45}\right)$ é divergente também. pelo Teste da Comparação

Note que se tivessemos que analisar uma série parecida $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+45}\right)$ agora a desigualdade seria

$$\frac{1}{\sqrt{k}+45} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

e o "Teste da Comparação" $\boxed{\text{não}}$ pode ser usado.

Ex. 2: Seja $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5k^3+7k^2}\right]$, é convergente ou divergente?

Sol.: Note que o denominador é um polinômio e que o termo dominante é $5k^3$. Isso sugere comparar com $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5k^3}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^3}\right)$ que é uma série-p convergente $p>1,\ 3>1$

Note ainda que tanto $\frac{1}{5k^3+7k^2}$ como $\frac{1}{5k^3}$ são positivos para $k \geq 1$. E adicionalmente

$$\frac{1}{5k^3+7k^2} < \frac{1}{5k^3}$$

$$a_k < b_k$$

Logo,
Como a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5k^3}\right)$ é convergente a série "menor" "maior" $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5k^3+7k^2}\right)$ também é convergente pelo Teste da Comparação

Ex. 3: Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n+1}\right)$ é convergente ou divergente.

Sol.: Se esquecermos do um no denominador a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica convergente. Note que as duas são de termos positivos e ainda

$$\underbrace{\frac{1}{3^n+1}}_{a_n} < \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{b_n.} \qquad \forall n \geq 1$$

Como a "série maior" converge, pelo Teste da Comparação, a "série menor" também converge. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n+1}\right]$ é convergente $\blacksquare$

Porém, se quisermos testar $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n-1}\right)$ o teste da comparação não ajuda pois

$$\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n-1}$$

Vamos a seguir resolver este problema com o "Teste da Comparação no Limite"

# Teste de Comparação no Limite



- Tinhamos visto que o Teste da Comparação não ajudava para saber a convergência ou não da serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n-1}\right)$ pois $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n-1}$ $\forall n \geq 1$. O proximo teste resolve esse problema.

Teste de Comparação no Limite (Teorema)

**Teste de Comparação no Limite**

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries com termos positivos.

Se $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = c$, onde $c$ é um número finito e $c>0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Prova: Sejam $m$ e $M$ números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que existe o limite $\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right)$ existe um número natural $N$ tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \quad , \text{para todo } n \geq N$$

logo

$$\underbrace{m b_n < a_n}_{(i)} \underbrace{< M b_n}_{(ii)} \; , \quad \forall n \geq N$$

(i) Se $\sum b_n$ for divergente, então $m\sum b_n$ também é divergente e pelo teste da comparação, $\sum a_n$ será divergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for convergente, então $\sum b_n$ também será convergente e pelo teste da comparação $\sum a_n$ será convergente. ■



- Existem outras duas possibilidades que citamos sem provar. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos.

① Se $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ e $\sum b_n$ for convergente, então $\sum a_n$ será convergente.

② Se $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$ e $\sum b_n$ divergir, então $\sum a_n$ será divergente

Ex. 1:

- Voltando ao problema de motivação. Queremos determinar a convergência ou não da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n - 1}\right).$$

Sol.: Seja $a_n = \frac{1}{3^n - 1}$ e $b_n = \frac{1}{3^n}$ logo.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3^n - 1} \cdot \frac{3^n}{1} = \frac{3^n}{3^n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3^n}} \quad e$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^n}}\right) = 1 = c > 0$$
e finito

logo, pelo teste de comparação no limite $\sum a_n$ e $\sum b_n$ terão a mesma "convergência". Isto é $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n - 1}\right)$ é convergente.

Ex. 2: Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{4k^2-3k+8}{3k^5+4k^3-k}\right)}_{a_k}$$ é convergente ou

divergente.

Sol.: Temos polinômios no índice do somatório no numerador e no denominador. O termo preponderante no numerador é $4k^2$ e no denominador $3k^5$.

Logo, vamos chamar $b_k = \frac{4k^2}{3k^5} = \frac{4}{3k^3}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{4k^2-3k+8}{3k^5+4k^3-k} \cdot \frac{3k^3}{4} = \frac{12k^5-9k^4+24k^3}{12k^5+16k^3-4k}$$

dividindo numerador e denominador por $k^5$ encontramos

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{12 - \frac{9}{k} + \frac{24}{k^2}}{12 + \frac{16}{k^2} - \frac{4}{k^4}}$$ e

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = 1 = c \text{ (finito) e } c>0$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k) = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^3}\right)$ é uma série-$p$ ($p=3$) convergente

pelo Teste da Comparação no Limite, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2-3k+8}{3k^5+4k^3-k}\right)$$ será convergente.

# Séries Alternadas

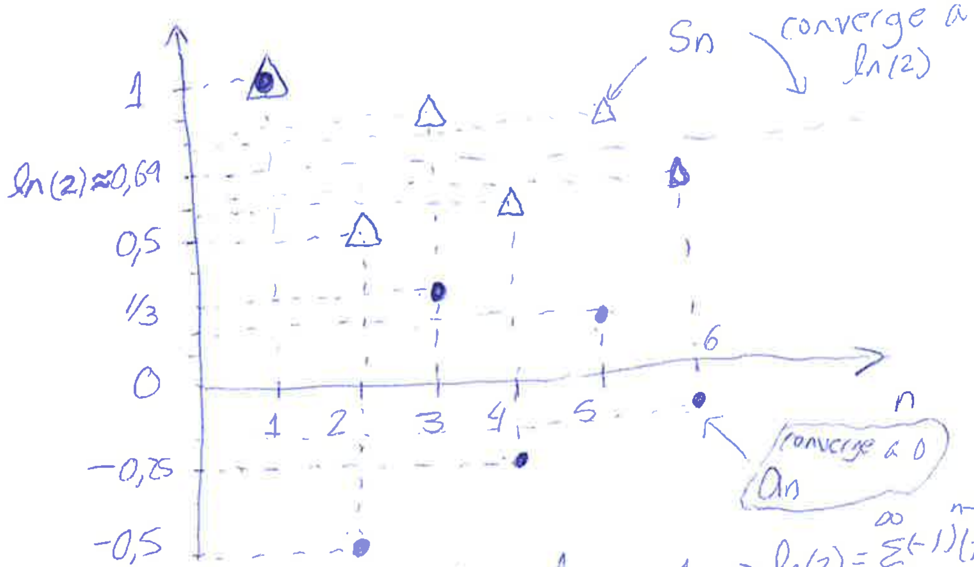


- Vamos estudar agora séries em que os termos consecutivos mudam de sinal. Exemplos

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1} b_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aqui $b_n \geq 0$ para todo $n$ ou $|a_n| = b_n$

| $n$ | $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ | 0,5 |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | $0,8\overline{3}$ |
| 4 | $-\frac{1}{4}$ | $\approx 0,58$ |
| 5 | $\frac{1}{5}$ | $\approx 0,78$ |
| 6 | $-\frac{1}{6}$ | $\approx 0,62$ |




Veremos que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, colocando $x = 1 \rightarrow \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)$
se $|x| \leq 1$ e $x \neq -1$

- O termo que produz a alternância também pode ser da forma: $(-1)^n b_n$. Nesse caso, para $n=1$ o termo é negativo

b) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$

Neste caso tanto $a_n$ como $S_n$ são sequências divergentes

# Teorema da Série Alternada

Se a série alternada

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1} b_n] = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

satisfaz que

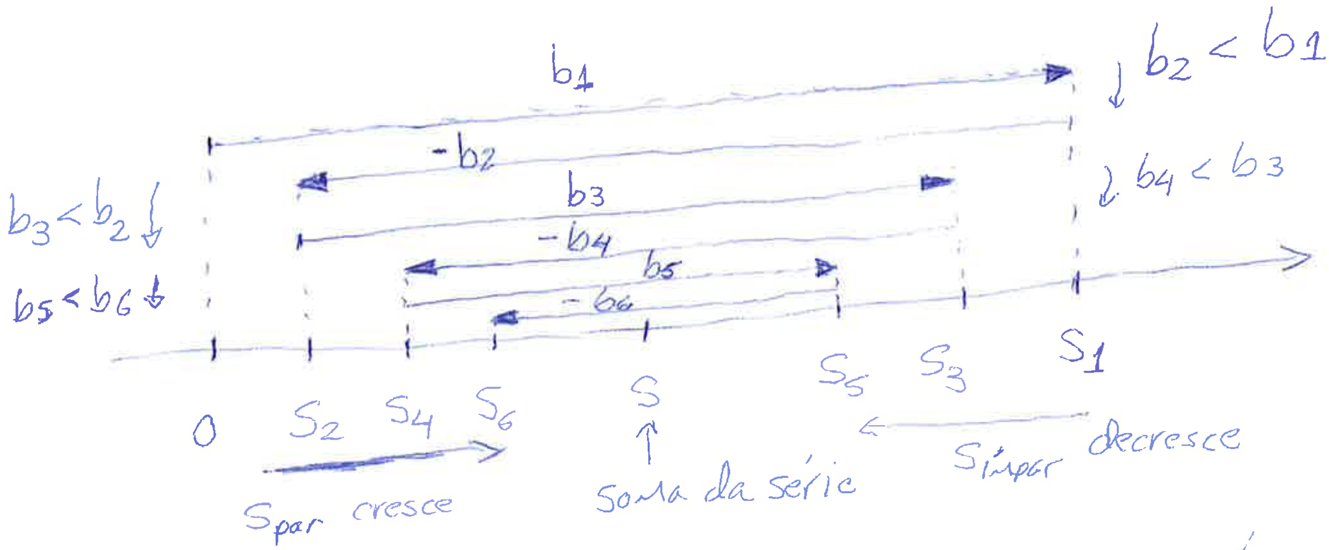
(ii) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \geq N$ ($b_n$ é decrescente)

← existe um número natural. Simplificando, consideramos $N=1$.

(iii) $\lim_{n \to \infty}(b_n) = 0$

então a série é convergente

## Ilustração Gráfica da Prova do Teorema




- Note que $b_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e $b_{n+1} \leq b_n$, logo cada etapa é menor que a anterior e a soma da série será um valor finito ($S$)

- Note ainda que se $n$ é par $\Rightarrow S_n \leq S \leq S_{n+1}$
e se $n$ é ímpar $\Rightarrow S_{n+1} \leq S \leq S_n$

Demostração

Primeiro consideramos as somas parciais pares

$$S_2 = b_1 - b_2 \geq 0 \quad \text{já que } b_2 \leq b_1$$

$$S_4 = S_2 + \underbrace{(b_3 - b_4)}_{\text{positivo}} \geq S_2 \quad \text{já que } b_4 \leq b_3$$

$$\vdots$$

$$S_{2n} = S_{2n-2} + \underbrace{(b_{2n-1} - b_{2n})}_{\text{positivo}} \geq S_{2n-2} \quad \text{já que } b_{2n} \leq b_{2n-1}$$

Logo temos que

$$S_{2n} \geq S_{2n-2} \geq \dots \geq S_4 \geq S_2$$

crescente

A subsequência das somas parciais de índice par é crescente.

Podemos escrever ainda

$$S_{2n} = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\substack{\text{positivo} \\ b_3 \leq b_2}} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\substack{\text{positivo} \\ b_5 \leq b_4}} - \dots \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{\substack{\text{positivo} \\ b_{2n-1} \leq b_{2n-2}}} - \underbrace{b_{2n}}_{\text{positivo}}$$

- Logo $S_{2n} \leq b_1$. Isto significa que $S_{2n}$ é limitada superiormente. Pelo Teorema da Sequência Monótona $S_{2n}$ é convergente: $\lim_{n\to\infty} [S_{2n}] = S$ (chamaremos de $S$).
- Uma soma parcial ímpar pode ser escrita como

$$S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$$

- Calculando o limite nos dois lados

$$\lim_{n\to\infty} [S_{2n+1}] = \lim_{n\to\infty} (S_{2n}) + \lim_{n\to\infty} (b_{2n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} [S_{2n+1}] = S + 0 = S$$

Logo o limite da subsequência de somas parciais ímpares também é S. Pode ser provado que se as subsequências de ~~somas parciais~~ índices pares e ímpares convergem para o mesmo limite então a sequência como um todo também converge para esse limite. ■

- Voltando no Exemplo da Série Harmônica Alternada discutido anteriormente:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

onde $b_n = \frac{1}{n}$

Temos que a sequência $b_n$ é decrescente:

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = b_n \ , \ \forall n \geq 1$$

e que $\lim_{n\to\infty} (b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ será convergente pelo Teste da Série Alternada. ■

- No exemplo b). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n}{n+1}\right]$ a série é Alternada. Porém, ~~não~~ $b_n = \frac{n}{n+1}$ não é decrescente. Adicionalmente $\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \frac{n}{n+1}\right]$ não existe. Logo, pelo Teste da Divergência a série é DIVERGENTE. ■

- Note-se que a condição de $b_n$ ser decrescente não pode ser eliminada. O próximo exemplo mostra uma série alternada em que os termos n-ésimos tendem a zero mas que não é decrescente:

cresce

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{32} + \cdots$$

- Os termos ímpares podem ser descritos pela série harmônica: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ DIVERGENTE

- Os termos pares por uma série geométrica: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ CONVERGENTE

- Como uma das subséries é Divergente a série como um todo também será Divergente.

# Teorema da Estimativa do Resto em Séries Alternadas.

Tipicamente não se conhece uma fórmula para o valor exato de uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = S$ e se quere estimar seu valor $S \approx \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n$ e o erro cometido

$|R_n| = |S - S_n|$.

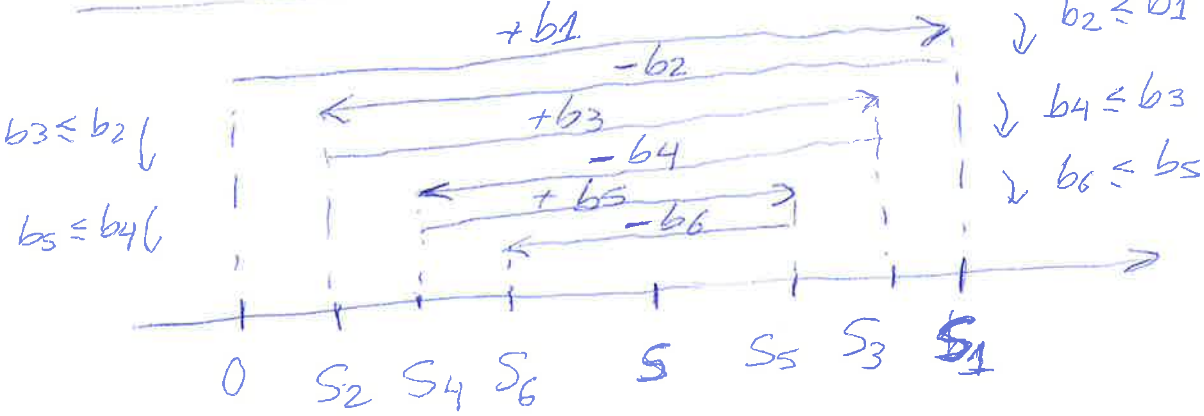
**Teorema**: Se $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n) = 0$

então, $|R_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$

## Ideia Gráfica da Demonstração




- Se $n$ é par $S_n \leq S \leq S_{n+1}$
- Se $n$ é ímpar $S_{n+1} \leq S \leq S_n$

- S é maior que todas as somas parciais pares e menor que todas as somas parciais ímpares. Segue que ...

$$|S - S_n| \leq \underbrace{|S_{n+1} - S_n|}_{\text{Duas somas Parciais Consecutivas}} = b_{n+1}$$

- Exemplo 1:

Tinhamos adiantado que se $-1 < x \leq 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Logo, colocando $x = 1$

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$$

Queremos estimar o valor do $\ln(2)$ usando 5 termos da série: $\ln(2) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = S_5$

Qual é uma estimativa do erro máximo cometido?

Sol.: $\ln(2) \approx S_5 = 0{,}783333$

Pelo Teorema de Estimativa do Resto em uma série Alternada convergente temos

$$|S - S_n| \leq b_{n+1}$$

$$|\ln(2) - S_5| \leq b_6 = \frac{1}{6} \approx 0{,}16$$

logo $R_5 \leq 0{,}16$

e poderiamos escrever aproximadamente

$$\ln(2) \approx 0{,}78 \pm 0{,}16$$

Com mais termos encontramos $\ln(2) \approx 0{,}693147$

Exemplo 2:

- Veremos que a função exponencial pode ser escrita usando uma série

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right).$$

- No caso em que $x = -1$ teremos uma série alternada

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!}\right)$$

- Estime o número $\frac{1}{e}$ com erro inferior a 0,001.

Sol: Pelo Teorema da Estimativa do Resto em Séries Alternadas teremos

$$|S - S_n| \leq b_{n+1}$$

como $b_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

$$|S - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Vamos calcular os primeiros valores da função factorial.

| $n$ | $n!$ | $\frac{1}{n!}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1/2 |
| 3 | 6 | ≈0,166 |
| 4 | 24 | ≈0,0416 |
| 5 | 120 | ≈ 0,00833 |
| 6 | 720 | ≈ 0,0013 |
| 7 | 5040 | ≈ 0,00019 |

Logo, basta calcular $S_6$ pois

$$|S - S_6| \leq \frac{1}{7!} \approx 0,00019$$

$$S_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

$$\frac{1}{e} \approx S_6 = 0,368056$$

O valor com 6 dígitos é $\frac{1}{e} = 0,367879$

$\Delta = 0,000177$

# Convergência Absoluta e Condicional

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8} - \cdots$$

- A série anterior não é de termos positivos e também não é uma série alternada. Tem dois termos consecutivos com o mesmo sinal e depois muda de sinal.
- Para lidar com este tipo de série vamos definir a convergência absoluta de uma série.
- Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, considere a série associada cujos termos são os valores absolutos desta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|) = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

Definição: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é dita ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE se sua série associada de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|)$ for convergente.

Definição: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ é dita CONDICIONALMENTE CONVERGENTE se ela for convergente, mas NÃO absolutamente convergente.

Série → Convergente → Absolutamente
Convergente → Condicionalmente
Série → Divergente

Exemplo 1: A série apresentada na introdução é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8} - \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^8} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}}$$

Série Geométrica com $q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ Convergente

Exemplo 2: Como exemplo de série alternada estudamos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\right] = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$b_n = \frac{1}{n}$ é decrescente $(b_{n+1} \leq b_n)$ e $\lim_{n\to\infty}(b_n) = 0$

logo pelo T. da Série Alternada é Convergente.

Vamos estudar agora a série associada de valores absolutos.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots}_{\text{Série Harmônica}} \Rightarrow \text{Divergênte}$$

Logo, como a série de partida é convergente, mas sua série associada com valores positivos é divergente temos uma série CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

(3)

Teorema: Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

CONVERGÊNCIA ABSOLUTA $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ $\Rightarrow$ CONVERGÊNCIA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Prova: Existem duas possibilidade para $|a_n|$:

$$|a_n| = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ & \text{ou} \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

logo
$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n = 2|a_n| & \text{se } a_n \geq 0 \\ & \text{ou} \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

com isso temos que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

- Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente (hipótese) então $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ é convergente e usando o Teorema da Comparação $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n + |a_n|]$ também será convergente pela desigualdade anterior.

- Note agora que uma série convergente pode ser escrita como a soma ou diferença de outras duas séries convergentes (Propriedade das Séries Convergentes estudada anteriormente) e a igualdade a seguir conclue a prova

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}[a_n + |a_n|]}_{\text{convergente}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|}_{\text{convergente}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \text{convergente}$$

Exemplo: Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{sen(n)}{n^3}\right]$$ é convergente.

Sol.: Essa série não é de termos positivos e também não é alternada. Os termos mudam de sinal, mas não de forma regular (um positivo, um negativo):

radiano

| $n$ | $sen(n)$ |
|---|---|
| 1 | $\approx 0,841$ |
| 2 | $\approx 0,909$ |
| 3 | $\approx 0,141$ |
| 4 | $\approx -0,756$ |
| 5 | $\approx -0,958$ |
| 6 | $\approx -0,279$ |

$n^3$ é sempre positivo, o sinal depende de $sen(n)$.

Vamos estudar a série associada em módulo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sen(n)}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|sen(n)|\cdot\frac{1}{n^3}$$

como $|sen(n)| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[|sen(n)|\frac{1}{n^3}\right] \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{Série-}p\ (p=3>1 \Rightarrow \text{convergente})}$$

Pelo Teorema da Comparação $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sen(n)}{n^3}\right|$ será convergente e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(n)}{n^3}$ absolutamente convergente.

ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\Rightarrow$ CONVERGENTE

# Teste da Razão

Teorema: Seja $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$

(i) Se $L<1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

(ii) Se $L>1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

(iii) Se $L=1$ o teste é inconclusivo

Prova

(i) Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, para um número natural $N$ suficientemente grande teremos um $r \in \mathbb{R}$, $L<r<1$

tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$ se $n \geq N$

logo $|a_{n+1}| < r|a_n|$ se $n \geq N$

sucessivamente $n = N, N+1, N+2, \ldots$

Agora colocamos

$$|a_{N+1}| < r|a_N|$$

$$|a_{N+2}| < r|a_{N+1}| < r^2|a_N|$$

$$|a_{N+3}| < r|a_{N+2}| < r^3|a_N|$$

$$\vdots$$

$$+\quad |a_{N+k}| < r^k|a_N|$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=N}^{\infty}|a_i| < |a_N|\sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

A série $\sum_{i=1}^{\infty}(r^i)$ é uma série geométrica ②

convergente pois $0<r<1$.

Logo, da desigualdade

$$\sum_{i=N}^{\infty}|a_i| < |a_N| \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}(r^i)}_{\text{convergente}}$$

e do Teste da Comparação segue que a série $\sum_{i=N}^{\infty}|a_i|$ é convergente. Isto é, $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ é absolutamente convergente. A série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ também é absolutamente convergente pois um número finito de termos (de 1 até N) não mudam a convergência ou não.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ então existe um natural N tal que se $n \geq N$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Isto é,

$$|a_{n+1}| > |a_n| \quad \text{sempre que} \quad n \geq N$$

Logo a sequência $\{|a_n|\}$ será crescente e maior que 1. Com isso $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Pelo Teste da Divergência, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serão divergentes.

(iii) Vamos mostrar dois exemplos em que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ e no primeiro a série é divergente ~~convergente~~ e no segundo a série é ~~divergente~~ convergente.

Exemplo 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Já sabemos que essa é a série harmônica que é divergente.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n}{1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

Exemplo 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ é uma série-$p$ convergente $(p=2>1)$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{(n+1)^2}\right] = 1.$$

Exercício-1: Use o Teste da Razão para determinar se a série converge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right]$   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2n-1)!}{3^n}\right]$

Sol.:

a) $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}$   $a_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$|a_n| = \frac{2^n}{n!}$   $|a_{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2\cdot\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right) = 0 = L < 1$$

Pela primeira parte do Teste da Razão concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ é absolutamente convergente e consequentemente convergente.

b) $a_n = (-1)^n\frac{(2n-1)!}{3^n}$   $a_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{[2(n+1)-1]!}{3^{n+1}}$

$|a_n| = \frac{(2n-1)!}{3^n}$   $|a_{n+1}| = \frac{(2n+1)!}{3^{n+1}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(2n-1)!} = \frac{\cancel{3^n}}{3\cdot\cancel{3^n}}\cdot\frac{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!}}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n(2n+1)}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}n(2n+1)\right] = \infty = L > 1$$

Pela segunda parte do teste da razão (5)

a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!}{3^n}$ será divergente.

# Teste da Raiz

**Teorema:** Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$, seja

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = L$$

(i) Se $L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente

(ii) Se $L > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

(iii) Se $L = 1$, então o teste é INCONCLUSIVO.

A prova deste teorema é análoga ao Teste da Razão e deixaremos como exercício.

**Ex. 1:** Teste a convergência das séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-4}{3n+1}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$

**Sol.** a) $a_n = \left(\frac{4n-4}{3n+1}\right)^n$ se $n \geq 1 \Rightarrow \frac{4n-4}{3n+1} \geq 0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4n-4}{3n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n-4}{3n+1}\right] = \frac{4}{3} > 1$$

logo a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n-4}{3n+1}\right]^n$ diverge pelo teste da raiz.

b) $a_n = \dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ se $n \geq 1 \rightarrow \ln(n+1) > 0$ 2

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{\ln(n+1)} \right] = 0 = L < 1$$

Logo, pelo teste da raiz a série converge absolutamente.

# Séries de Potências

Uma série de potência centrada em $x_0$ tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n(x-x_0)^n\right] = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + C_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

se $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n x^n\right] = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

- $x$ é uma variável real
- $C_n$ é chamado de coeficientes da série (depende $n \in \mathbb{N}$)
- Para cada $x$ fixo podemos testar se a série converge ou diverge.
- As somas parciais da série são polinômios de grau $n$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} C_i(x-x_0)^i = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + \cdots + C_n(x-x_0)^n$$

- Uma série trigonométrica é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right] = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\,\mathrm{sen}(x) + a_2\cos(2x) + b_2\,\mathrm{sen}(2x) + \cdots$$

Esse tipo de série é útil para estudar funções periódicas

- Para cada valor de $x$ em que a série convergir podemos definir uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n(x-x_0)^n\right]$$

Tinhamos estudados a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_1 q^{n-1}] = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$$

Se $|q| < 1$ a série converge e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_1 q^{n-1}] = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos trocar $q = x$ e colocar $a_1 = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[x^{n-1}] = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1$$

Também podemos trocar $k = n-1$, logo se $n=1 \Rightarrow k=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x^k) = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1$$

Note que a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$ pode ser escrita como uma soma de infinitos termos. Trocando de novo $k = n$.

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)}_{\substack{\text{Série de Potências} \\ \text{em torno de } x_0 = 0}} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{se } |x| < 1$$

- Se $x = 2$ note que

$$\frac{1}{1-2} = -1 \neq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

- Mas se $x = 1/2$

$$\frac{1}{1-1/2} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Ex. Para que valores de $x$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right]$$ converge?

Sol.: Usamos o Teste da Razão

$$a_n = \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{x^{3(n+1)}}{[3(n+1)]!} = \frac{x^3 \cdot x^{3n}}{(3n+3)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{3n}\cdot x^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}$$

Logo $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{x^{3n}}\cdot x^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}} \cdot \frac{\cancel{(3n)!}}{\cancel{x^{3n}}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x^3| \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\right]}_{0} = 0$$

Logo, como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ para todo $x$, pelo Teste da Razão a série converge para todo $x$.

Ex. Para quais valores de $x$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n!\,x^n]$$ converge?

Sol.: Vamos usar novamente o TESTE da RAZÃO se $x \neq 0$

$$a_n = n!\,x^n \quad e \quad a_{n+1} = (n+1)!\,x^{n+1}$$

$$a_{n+1} = (n+1)\,n!\,.x.x^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{n!}\,x\cdot\cancel{x^n}}{\cancel{n!}\,\cancel{x^n}} = (n+1)\,x$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)x\right| = |x|\underbrace{\lim_{n\to\infty}(n+1)}_{\infty} = \infty$$

Logo, como $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ a série diverge para todo $x \neq 0$.

Em $\underline{x = 0}$ a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ se transforma em

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n!\,0^n\right] = 0+0+0+\cdots = 0$$ é convergente

Toda série de potências é convergente em $x=0$ $\underline{\text{se } x_0 = 0}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n\,0^n\right] = 0+0+\cdots = 0$$

ou em $x = x_0$ se centrada em $x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[x-x_0\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot 0^n = 0+0+\cdots = 0$$

Ex. Para quais valores de $x$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(x-5)^n}{n}\right] \text{ converge?}$$

Sol.: Usamos o Teste da Razão

$$a_n = \frac{(x-5)^n}{n} \quad e \quad a_{n+1} = \frac{(x-5)^{n+1}}{n+1} = \frac{(x-5)(x-5)^n}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x-5)\cancel{(x-5)^n}}{n+1}\cdot\frac{n}{\cancel{(x-5)^n}} = (x-5)\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|(x-5)\frac{n}{n+1}\right| = |x-5|\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{1} = |x-5|$$

Pelo Teste da Razão a série será convergente se

$|x-5| < 1$ ou

$-1 < x-5 < 1$ ou

$$\boxed{4 < x < 6}$$

Os valores extremos ($x=4$ e $x=6$) devem ser analizados por separado. O teste da razão é inconclusivo quando $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

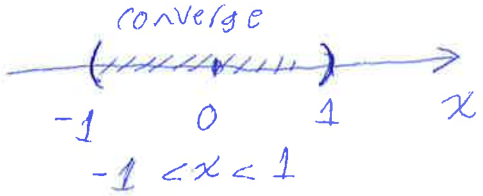
- Se $x=4$ em $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$ teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow$$ Essa é a série harmônica alternada que já sabemos que é condicionalmente convergênte

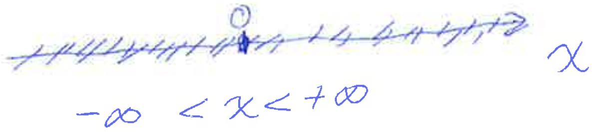
- Se $x=6 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow$ Série Harmônica Divergente.

Resumindo os resultados encontrados até agora

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n) = \frac{1}{1-x}$ se $|x|<1$ converge

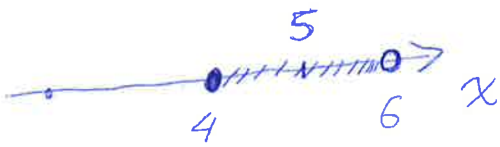



b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ Converge




c) $\sum_{n=0}^{\infty}[n!x^n]$ Somente converge em $x=0$


d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(x-5)^n}{n}\right]$ Converge se $4 \leq x < 6$

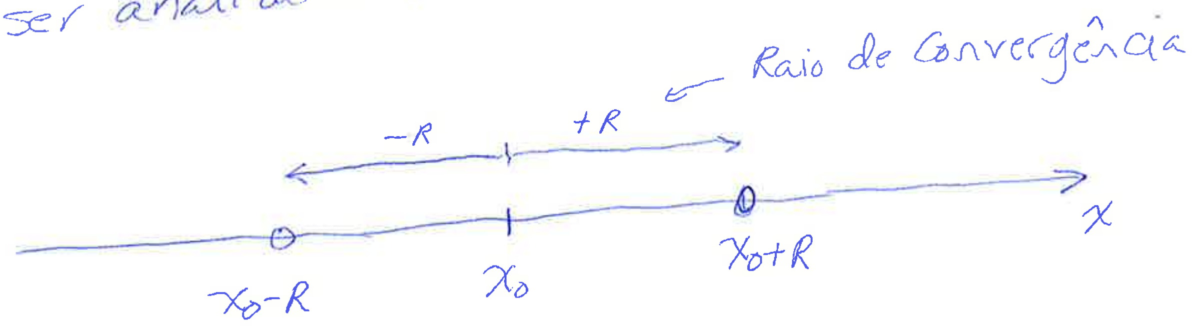



Teorema: Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(x-x_0)^n\right]$ existem três possibilidades:

i) A série converge somente em $x=x_0$

ii) " " " para todo $x \in \mathbb{R}$

iii) Existe um número positivo $R$ (Raio de Convergência) tal que a série converge se $|x-x_0|<R$ e diverge se $|x-x_0|>R$. Os casos em que $|x-x_0|=R$ devem ser analizados por separado.



O intervalo de convergência pode ser de quatro (7)

formas:

$(x_0-R, x_0+R)$; $(x_0-R, x_0+R]$; $[x_0-R, x_0+R)$; $[x_0-R, x_0+R]$

Para demostrar o Teorema se usa o Teste da Comparação para mostrar que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge quando $x=b>0$ então converge se $|x|<b$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n|x|^n < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n|b|^n}_{\text{Se converge}}$$

Converge. $\Leftarrow$ Se converge

Ex. Vamos estudar as séries de potências $p$ para $p>1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^p}\right)}_{c_n} x^n$.

Sol.: Note que $a_n = \frac{x^n}{n^p}$ e $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^p} = \frac{x\,x^n}{(n+1)^p}$

Logo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x\,\cancel{x^n}}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{\cancel{x^n}} = x\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}_{1} = |x|$$

Pelo Teste da Razão mostramos que a série converge se $|x|<1$.

- Vamos estudar por separado os extremos $x=-1$ e $x=1$.

Se $x=-1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ e como $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|$ converge $(p>1)$ a serie anterior também converge

Se $x = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1^n}{n^p}\right]$ é uma série $p$ convergente. 8

Conclusão: As séries de potência-$p$ $(p>1)$ são convergentes com raio de convergência 1 $(R=1)$ centrada em 0 e intervalo de convergência $[-1, 1]$.

Ex. Um método de resolução de equações diferenciais é usando séries de potências. Algumas funções que resolvem uma eq. dif. somente podem ser escritas usando séries de potências. Esse é o caso das funções de Bessel.

Uma delas é escrita assim:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Note que somente aparecem potências pares e

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} = \frac{(-1)(-1)^n x^{2n} \cdot x^2}{2^{2n} \cdot 2^2 (n+1)^2 (n!)^2}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\cancel{x^{2n}} \cdot x^2}{\cancel{2^{2n}} \cdot 2^2 \cdot (n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{2^{2n}} \cancel{(n!)^2}}{\cancel{x^{2n}}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x^2| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4(n+1)^2}\right]}_{0} = 0 < 1 \quad \forall x$$

Logo, a função $J_0(x)$ está definida para todo $x$ pois sua série é convergente para todo $x$.

# Funções como Séries de Potências

Tinhamos visto que se $|x|<1$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \leftarrow \text{série geométrica com } a_1 = 1 \text{ e } q = x$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad \text{se } |x|<1}$$

igualdade — soma de infinitos termos

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 = P_3(x)$$

aproximação — polinômio finito

- Agora vamos encontrar uma representação de outra função $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ em termos de uma série de potências.
- Se trocamos $x$ por $-x^2$ em $f(x)$ se transforma em $g(x)$. Vamos repetir a troca dentro da série de potências também.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{se } |x|<1$$

na troca

$$\text{se } |-x^2| < 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

$$\Big\downarrow x \to -x^2$$

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Logo $\frac{1}{1+x^2} = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ se $|x|<1$

ou

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots} \quad \text{se } |x|<1$$

<u>Teorema</u>: Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ tiver um raio de convergência $R>0$, então a função definida como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(x_0-R, x_0+R)$ e

i) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}$ se $x \in (x_0-R, x_0+R)$

ii) $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ se $x \in (x_0-R, x_0+R)$

Em outras palavras, o Teorema afirma que as duas igualdades embaixo são verdadeiras

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n (x-x_0)^n\right]$$

$$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int c_n (x-x_0)^n dx\right]$$

e que as três funções $f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ e $\int f(x)dx$ tem o mesmo raio de convergência.

Ex.: Sabendo que $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg}(x) + C$ encontre uma representação da função Arctg(x) em série de potências.

Sol.: Lembramos que tinhamos encontrado uma representação em série de potências da função

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{se } |x|<1$$

Integrando nos dois lados

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{se } |x|<1$$

$$\text{Arctg}(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\int x^{2n}\,dx\right)\right]$$

$$\text{Arctg}(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{se } |x|<1$$

$$\text{se } x=0 \implies \text{Arctg}(0) = 0$$

$$\text{Logo} \quad \text{Arctg}(0) = 0 = \underbrace{C}_{} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0^{2n+1}}_{0}$$

$$C = 0.$$

$$\boxed{\text{Arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \quad \text{se } |x|<1$$

Se x pequeno
Arctag(x) ≈ x

$$\text{"} \quad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

neste caso é verdade também em $x = \pm 1$

Sabemos que $\tan(45^\circ) = \tan(\pi/4) = 1$, logo $\text{Arctan}(1) = \pi/4$, vamos colocar $x=1$ na série de potências embaixo:

$$\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ou

$$\boxed{\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)}$$

Fórmula de Leibniz para $\pi$

Ex.: Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1+x)$ e seu raio de convergência.

Sol.: Note que $\frac{d}{dx}\left[\ln(1+x)\right] = \frac{1}{1+x}$

e lembre que sabemos representar a função $\frac{1}{1-x}$ como uma série de potências

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{se } |x| < 1$$

Logo, vamos resolver o problema em dois passos.

- Primeiro: Trocar $x \to -x$ na igualdade anterior

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \text{se } |-x| < 1$$

Teremos $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ se $|x|<1$ 5

- Segundo, vamos integrar nos dois lados

$$\underbrace{\int \left(\frac{1}{1+x}\right) dx}_{} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{se } |x|<1$$

por ser convergente a série

$$\ln(1+x) + C^* = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n \quad \text{se } |x|<1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{se } |x|<1$$

Se $x=0 \Rightarrow \ln(1+0) = 0$

$\ln(1+0) = \boxed{0 = C}$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{se } |x|<1}$$

ou $k = n+1$ se $n=0 \Rightarrow k=1$ e $n=k-1$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{se } |x|<1}$$

Explicitamente

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{se } |x|<1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{se } x \text{ pequeno} \\ \ln(1+x) \approx x\end{array}}$$

# Séries de Taylor e Maclaurin



- Toda função pode ser representada por uma série de potências? Veremos que não.
- Se existir uma representação de uma função em série de potências como encontrá-la?

Teorema: Se $f$ tiver uma representação em série de potências em torno de $x_0$, isto é se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad \text{se } |x-x_0|<R$$

ou

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots \quad \text{se } |x-x_0|<R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$f^{(n)}(x) \rightarrow$ derivada n-ésima da função $f(x)$.

Prova: Veja que $f(x)$ em $x_0$ deve ser

$f(x_0) = c_0$ ou $\boxed{c_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}}$

$0! = 1$ por definição

$f^{(0)}(x) \rightarrow$ função sem derivar

Derivando uma vez

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + n c_n (x-x_0)^{n-1} + \dots$$

se $|x-x_0|<R$

e avaliando em $x_0$

$f'(x_0) = c_1$ ou $\boxed{c_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}}$

$1! = 1$

$f^{(1)}(x) \rightarrow$ primeira derivada

Derivando novamente

$$f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3\, C_3 (x-x_0)^1 + 4\cdot 3\cdot C_4 (x-x_0)^2 + \cdots + n(n-1)\, C_n (x-x_0)^{n-2} + \cdots$$

se $|x-x_0| < R$

Avaliando em $x_0$

$$f''(x_0) = 2C_2 \quad \text{ou} \quad \boxed{C_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}}$$

Derivando mais uma vez

$$f'''(x) = 2\cdot 3\cdot C_3 + 2\cdot 3\cdot 4\, C_4 (x-x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)\, C_n (x-x_0)^{n-3} + \cdots$$

se $|x-x_0| < R$

Avaliando em $x_0$

$$f'''(x_0) = 2\cdot 3\, C_3 \quad \text{ou} \quad C_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \qquad 2\cdot 3 = 3! = 6$$

$\vdots$ Repetindo o mesmo procedimento se encontra que

Em geral

$$f^{(n)}(x_0) = 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n\, C_n$$

ou

$$\boxed{C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

Isto é, se $f$ tiver representação em série de potências em torno de $x_0$ então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad \text{se } |x-x_0| < R$$

ou

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \cdots$$

se $|x-x_0| < R$

Essa série é chamada SÉRIE de TAYLOR de $f$ em torno de $x_0$.

Quando $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

A série é conhecida como SÉRIE de Maclaurin.

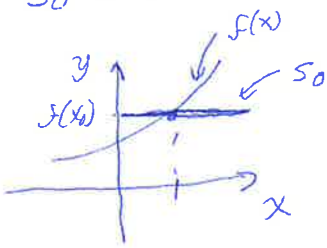
- Taylor devido ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731)
- Maclaurin " " " escocês Colin Maclaurin (1698-1746)

* A série de Maclaurin não é mais que um caso particular da série de Taylor (quando $x_0 = 0$).

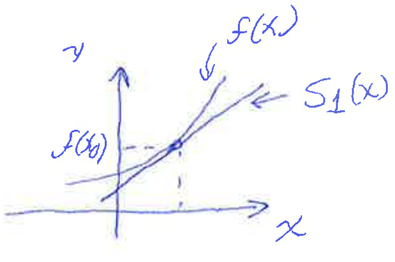
- As somas parciais da série de Taylor são polinômios de grau n.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{se } |x - x_0| < R$$

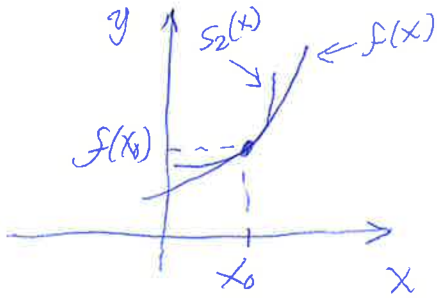
$f(x) \approx S_0 = f(x_0)$ ← Aproximação por uma reta horizontal.




$f(x) \approx S_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ← Aproximação Linear




$f(x) \approx S_2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ ← Aproximação parabólica (quadrática)



Ex.: Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência. Assuma que a exponêncial seja igual a sua série de Maclaurin.

Sol.: Queremos escrever $(x_0 = 0$, Maclaurin$)$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{em } |x| < R$$

Note que $f(0) = e^0 = 1$

$$f'(x) = e^x \quad \text{e} \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad \text{e} \quad f''(0) = e^0 = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{e} \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Logo, $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} x^n\right]$$

ou

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Para determinar o raio de convergência $(R)$ usamos o teste da razão.

Seja $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ e $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{x\, x^n}{(n+1)n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x \cdot \cancel{x^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consequentemente, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ para todo $x$ e $R = \infty$. Isto é, o raio de convergência é infinito: $-\infty < x < \infty$.

Resumindo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n!}\right] \leftarrow \underbrace{-\infty < x < \infty \quad \text{ou } R = \infty}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

verifique que $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

Em 1748 Euler usou essa fórmula para achar o valor exato de 23 dígitos

Note que se $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Fornece uma fórmula para calcular o número de Euler.

- Em geral, $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor se

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}[S_n(x)] = \lim_{n\to\infty}\Big\{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right]}\Big\} = f(x)$$

soma da série

$S_n = T_n \leftarrow$ polinômio de Taylor de grau n

soma parcial n-ésima

- Na prática aproximamos a soma infinita por uma finita

$$\underset{\text{função}}{f(x)} \approx \underset{\text{polinômio de grau } n}{T_n(x)}$$

- É chamado RESTO de TAYLOR de ordem n a

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

tal que

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Exemplo: $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$R_2(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

- Dizemos que $f(x)$ coincide com sua série de Taylor se $\lim_{n \to \infty} [R_n(x)] = 0$.

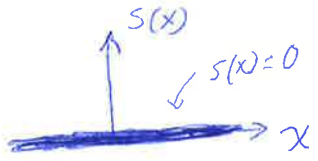
- Um exemplo de função infinitamente diferenciável em um ponto e que permite escrever uma série de Taylor. Porém, a função $\boxed{\text{não}}$ é igual a sua série de Taylor é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

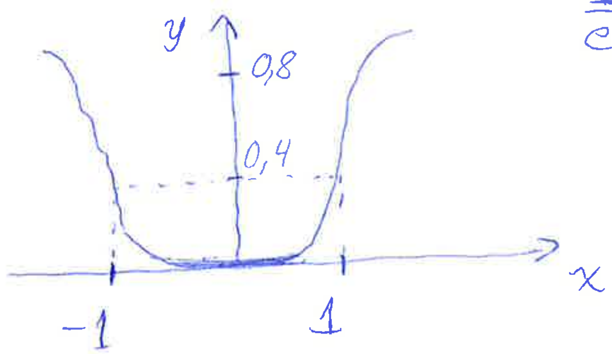
Pode ser provado que $\boxed{\text{para todo } n}$ será verdade que $\boxed{f^{(n)}(0) = 0}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 + 0 + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\boxed{S(x) = 0 \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}} \rightarrow$$

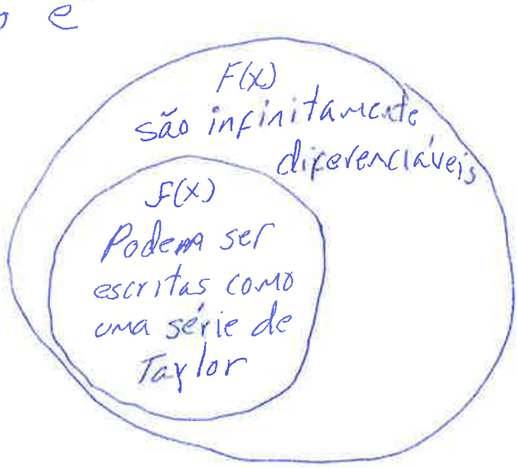



Mas o gráfico de $f(x)$ é




$\frac{1}{e} \approx 0,37$

- Isto é




O conjunto das funções que são iguais a sua série de Taylor é um subconjunto do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis

A desigualdade de Taylor permite estimar o erro cometido quando usamos aproximações: (7)

Desigualdade de Taylor: Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-x_0| < d$ então o resto $R_n(x)$ satisfaz

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \quad \text{para } |x-x_0| \leq d$$

- Ex. Calcule a constante e com exatidão de três casas decimais.

Sol.: Tinhamos visto que a série de Maclaurin $(x_0=0)$ é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) \quad \text{válido para todo } x.$$

se $x = 1$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Queremos saber qual é o valor de n tal que o resto

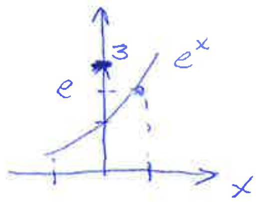
$$|R_n| \leq 0{,}\underbrace{000}_{\text{três casas decimais exatas}}5$$

Usando a Desigualdade de Taylor temos que encontrar um valor de M que seja maior que a derivada de ordem n+1 em todo um intervalo.

$$\frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}}[e^x] = e^x = f^{(n+1)}(x)$$

mas

$$e^x \leq e \leq 3 \quad \text{se } |x| < 1$$




Logo, vamos tomar $M = 3$
então pela desigualdade de Taylor $|R_n| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$ se $|x| < 1$

Mas

$$|R_n| \leq \frac{3}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{se } |x|<1$$

e queremos que

$$|R_n| \leq \underbrace{\frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}0005}_{} = 5\cdot 10^{-4}$$

Logo $(n+1)! \geq \frac{3}{5\cdot 10^{-4}} = \frac{30}{5}\cdot 10^{3} = 6000$

Calculamos os primeiros valores de $n!$

| $n$ | $n!$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 6 |
| 4 | 24 |
| 5 | 120 |
| 6 | 720 |
| 7 | 5040 |
| 8 | 40320 |

Note que se $\boxed{n=7}$ então $(n+1)! = 8! > 6000$

Consequentemente podemos computar o valor da constante e com três casas decimais exatas se usamos 8 termos da série ($n=0,1,\ldots,7$)

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2{,}\underbrace{718}25$$

O valor de e com 7 dígitos é

$$e \simeq 2{,}718282$$

Note, que conseguimos um resultado com mais de três dígitos exatos.

# Séries de Maclaurin de sen(x) e cos(x)



Queremos escrever $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Como $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

vamos calcular as derivadas:

repete
$$
\begin{aligned}
f(x) &= sen(x) \longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow c_0 = 0 \\
f'(x) &= cos(x) \longrightarrow f'(0) = 1 \longrightarrow n=1,\ k=0 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{1!} \\
f''(x) &= -sen(x) \longrightarrow f''(0) = 0 \longrightarrow c_2 = 0 \\
f'''(x) &= -cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -1 \longrightarrow n=3,\ k=1 \longrightarrow c_3 = \frac{-1}{3!} \\
f^{(4)}(x) &= sen(x) \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0 \longrightarrow c_4 = 0
\end{aligned}
$$

Note que se $n$ é par $\boxed{f^{(n)}(0) = 0}$ e se $n$ é ímpar $f^{(n)}(0) = \pm 1$.

Para $n$ ímpar escrevemos $n = 2k+1$, se $n=1 \Rightarrow k=0$ e

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Logo $sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$ ← Série Alternada

ou

$$\underbrace{sen(x)}_{\text{função ímpar}} = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}_{\text{Potências Ímpares}}$$

Para determinar o raio de convergência usamos o teste da razão:

$a_k = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e $a_{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{x^{\overbrace{2(k+1)+1}^{(2k+1)+2}}}{(2k+1+2)!} = (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1} \cdot x^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{x^2\, \cancel{x^{2k+1}}}{(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(2k+1)!}}{\cancel{x^{2k+1}}} = \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = x^2 \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\right]}_{0} = 0 < 1$$

Logo a série converge para todo $x$ e seu raio de convergência $R=\infty$.

Resumindo

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{se } -\infty < x < \infty \quad (R=\infty)$$

ou

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Note também que se $x$ é pequeno

$$\operatorname{sen}(x) \approx x$$

Essa foi a aproximação que usamos no vídeo que discute o pêndulo simples e que é usada em muitas aplicações na Física.

- Para encontrar a série de Maclaurin da função $\cos(x)$ poderíamos repetir o procedimento usado com a função $\operatorname{sen}(x)$. Porém, é mais simples lembrar que

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(x)\right] = \cos(x)$$

$\downarrow$ Trocamos a função seno pela sua série de Maclaurin

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \cos(x)$$

Por ser convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\underbrace{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}}_{\text{não depende de } x} \frac{d}{dx}\left[x^{2n+1}\right]\right\} = \cos(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{\underbrace{(2n+1)!}_{(2n+1)(2n)!}} \cancel{(2n+1)} \, x^{2n} \right\}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{se} \quad -\infty < x < \infty$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

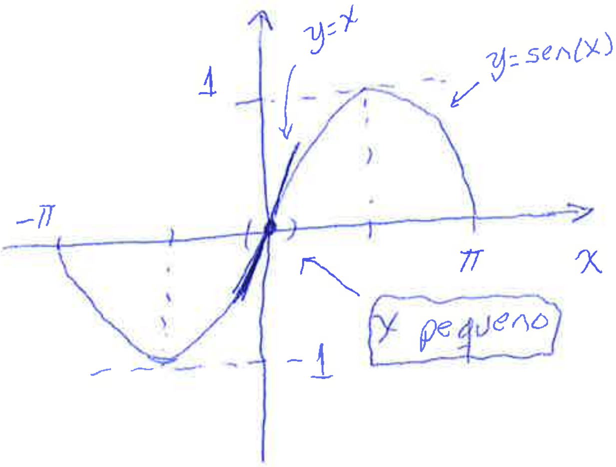
ou

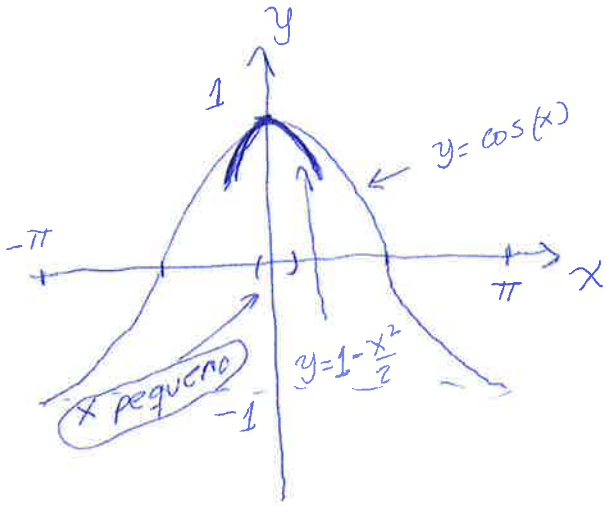
$$\underbrace{\cos(x)}_{\text{Função Par}} = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}_{\text{Potências Pares}} \quad R = \infty$$

mesmo raio de convergência da função sen(x).

Em aplicações físicas se $x$ é pequeno aproximamos

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$



# Série Binomial



- Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$ onde $k \in \mathbb{R}$.

Sol.: Queremos escrever $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, se $-R < x < R$

e $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Temos que

$n=0 \to f(x) = (1+x)^k \longrightarrow f(0) = 1$

$n=1 \to f'(x) = k(1+x)^{k-1} \longrightarrow f'(0) = k$

$n=2 \to f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \longrightarrow f''(0) = k(k-1)$

$n=3 \to f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \longrightarrow f'''(0) = k(k-1)(k-2)$

$\vdots$

$n \to f^{(n)}(x) = \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}_{\binom{k}{n}\cdot n!}(1+x)^{k-n} \longrightarrow f^{(n)}(0) = \binom{k}{n} n!$

logo $c_n = \binom{k}{n}$

* Caso $k$ seja um inteiro positivo em algum momento $n = k+1$ e $\binom{k}{n} = 0$ para $n \geq k+1$. A série é finita.

$\boxed{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)! = k!}$

* Quando $k$ é um inteiro positivo

$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$ e $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$

Binômio de Newton

FÓRMULA do NÚMERO DE COMBINAÇÕES: de $k$ escolhe $n$.

Ex: $(1+x)^3 = \binom{3}{0}1 + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

Porém, se $k$ é um valor Real, mas não inteiro positivo (2)
então $\binom{k}{n}$ nunca se anula e a série é de fato de um número infinito de termos.

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

Para encontrar o raio de convergência usamos o teste da razão:

$$a_n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n \quad e \quad a_{n+1} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)\,n!} x^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{k(k-1)\cdots}(k-n+1)(k-n)\,x\cdot\cancel{x^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k(k-1)\cdots(k-n+1)}\cdot\cancel{x^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(k-n)\,x}{n+1}\right| = |x| \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right|}_{1} = |x|$$

Logo $|x|<1$ para a série ser convergente e $R=1$.
(Pelo Teste da Razão)

Resumindo (Série Binomial)

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \quad \text{se } |x|<1$$

ou

$$(1+x)^k = \binom{k}{0}x^0 + \binom{k}{1}x^1 + \binom{k}{2}x^2 + \cdots \quad \text{se } |x|<1$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots \quad \text{se } |x|<1$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \cdots$$

Ex. Encontre a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x}}.$$

Sol.: Vamos manipular a função para poder usar a série binomial:

$$g(x) = (1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \quad \text{se } |x| < 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x}} = \frac{1}{\sqrt{9(1-\frac{x}{9})}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x/9}} = \frac{1}{3}\left[1+(-x/9)\right]^{\overbrace{-1/2}^{k}}$$

trocando $x \to -x/9$, e colocando $k = -1/2$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(-\frac{x}{9}\right)^n \quad \text{se } \left|-\frac{x}{9}\right| < 1$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\left(\frac{x}{9}\right)^n \quad \text{se } |x| < 9}$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{9}\right) + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}^{-3/2}}{2!}\left(\frac{x}{9}\right)^2 - \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}^{-3/2}\overbrace{\left(-\frac{1}{2}-2\right)}^{-5/2}}{3!}\left(\frac{x}{9}\right)^3 + \cdots\right] \quad \text{se } |x|<9$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{x}{18} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{81} + \frac{5}{11664}x^3 + \cdots\right] \quad \text{se } |x| < 9}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \qquad R = \infty$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n!}\right] \qquad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[x^n\right] \qquad \begin{matrix} R = 1 \\ |x| < 1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{9-x}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-1/2}{n}\left(\frac{x}{9}\right)^n \qquad \text{se } |x| < 9$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n \qquad \begin{matrix} |x| < 1 \\ R = 1 \end{matrix}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad \begin{matrix} |x| < 1 \\ R = 1 \end{matrix}$$

# Exemplo do uso de Séries de Potências para resolver equações diferenciais. ①

- Tinhamos estudado a equação diferencial

$$y'' = -y$$

(Vídeo 10, Casos Simples 3)

e sabemos que

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$$

- Vamos tentar resolver o mesmo problema usando séries de potências

- Suponha que a solução de $y''(x) = -y(x)$ seja

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n x^n]$$

- Supondo que a série é convergente em algum intervalo podemos derivar duas vezes.

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [n c_n x^{n-1}]$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) c_n x^{n-2}]$$

- Substituindo em $y''(x) = -y(x)$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) c_n x^{n-2}]}_{\substack{k = n-2 \rightarrow n = k+2 \\ \text{se } n=2 \rightarrow k=0}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} [c_n x^n]}_{k=n} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)\,c_{k+2}\,x^k\right] + \sum_{k=0}^{\infty}\left[c_k\,x^k\right] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\{(k+2)(k+1)\,c_{k+2} + c_k\}\,x^k\right] = 0 = \sum_{k=0}^{\infty}\left[0\,x^k\right]$$

As duas séries de potências serão iguais quando os coeficientes de cada potência de $x$ sejam iguais

$$(k+2)(k+1)\,c_{k+2} + c_k = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Logo $\boxed{c_{k+2} = \dfrac{-c_k}{(k+2)(k+1)}}$ , $k = 0, 1, 2, \ldots$

Relação de Recorrência

$k=0 \rightarrow c_2 = \dfrac{-c_0}{2\cdot 1} = -\dfrac{c_0}{2}$

$k=1 \rightarrow c_3 = \dfrac{-c_1}{3\cdot 2}$

$k=2 \rightarrow c_4 = \dfrac{-c_2}{4\cdot 3} = \dfrac{(-)(-)}{4\cdot 3}\dfrac{c_0}{2\cdot 1} = +\dfrac{c_0}{4!}$

$k=3 \rightarrow c_5 = \dfrac{-c_3}{5\cdot 4} = \dfrac{(-)}{5\cdot 4}\dfrac{(-)\,c_1}{3\cdot 2} = +\dfrac{c_1}{5!}$

$k=4 \rightarrow c_6 = \dfrac{-c_4}{6\cdot 5} = \dfrac{(-)}{6\cdot 5}\dfrac{c_0}{4!} = \dfrac{-c_0}{6!}$

$k=5 \rightarrow c_7 = \dfrac{-c_5}{7\cdot 6} = \dfrac{(-)}{7\cdot 6}\dfrac{c_1}{5!} = \dfrac{-c_1}{7!}$

Agora podemos conjeturar que se

- $k$ é par $(k=2n)$ $\longrightarrow c_k = c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$
  $n = 0, 1, 2, \ldots$

- $k$ é ímpar $(k=2n+1)$ $\longrightarrow c_k = c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n+1)!}$
  $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

A proposta de solução inicial

$$y_{gh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{2n} x^{2n}\right]}_{\text{somente os pares}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{2n+1} x^{2n+1}\right]}_{\text{somente os ímpares}}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{c_0}{(2n)!} x^{2n}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right]$$

$$y(x) = c_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]}_{\cos(x)} + c_1 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]}_{\operatorname{sen}(x)}$$

séries de Maclaurin

$$\boxed{y_{gh}(x) = c_0 \cos(x) + c_1 \operatorname{sen}(x).}$$

- As conjeturas podem ser provadas por indução finita.
- Vamos provar a primeira. Seja $P(2n)$: $c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$

Base: Se $n=1 \implies c_2 = (-1)^1 \frac{c_0}{(2\cdot 1)!} = -\frac{c_0}{2} \rightarrow$ verdadeira

Hipótese de Indução: Suponha que para algum $k = 2n$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}$$

Precisamos provar que $c_{2n+2} = (-1)^{n+1} \frac{c_0}{(2n+2)!}$

Usando a relação de recorrência

$$c_{2n+2} = \frac{-\overbrace{\left((-1)^n c_0/(2n)!\right)}^{c_{2n}}}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} c_0}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$

$$c_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1} c_0}{(2n+2)!}$$

(4)

Logo, se $P(2n)$ então $P(2n+2)$. Pelo princípio de indução finita $P(2n)$ é verdadeira para todo $n$.

- A prova de $C_{2n+1} = (-1)^n \frac{C_1}{(2n+1)!}$ é feita de forma análoga.