10

Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

10.1 Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva *C*, como mostrado na Figura 1. É impossível descrever *C* com uma equação do tipo $y = f(x)$ porque *C* não passa no Teste da Reta Vertical.

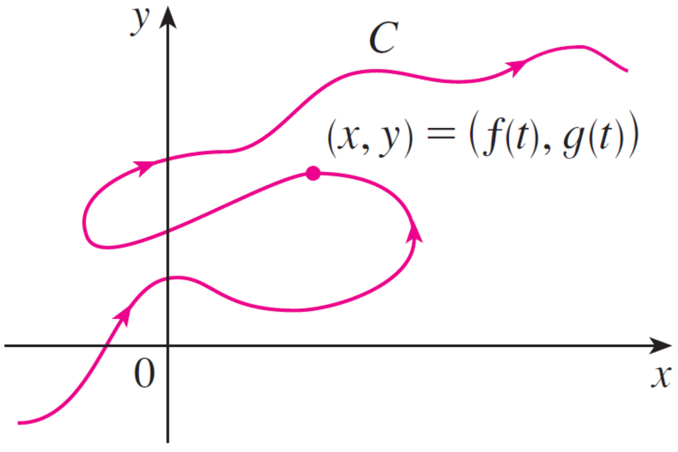


Figura 1

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Mas as coordenadas x e y da partícula são funções do tempo e, assim, podemos escrever $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente de descrever uma curva e faz surgir a definição a seguir.

Suponha que x e y sejam ambas dadas como funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) pelas equações

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(chamadas **equações paramétricas**).

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos marcar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto (x, y) = (f(t), g(t)) varia e traça a curva C, que chamamos **curva parametrizada**. O parâmetro t não representa o tempo necessariamente e, de fato, poderíamos usar outra letra em vez de t para o parâmetro. Porém, em muitas aplicações das curvas parametrizadas, t denota tempo e, portanto, podemos interpretar (x, y) = (f(t), g(t)) como a posição de uma partícula no instante t.

Exemplo 1

Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUÇÃO: Cada valor de *t* fornece um ponto na curva, como mostrado na tabela.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Por exemplo, se *t* = 0, então *x* = 0, *y* = 1 e assim o ponto correspondente é (0, 1). Na Figura 2 marcamos os pontos (*x*, *y*) determinados por diversos valores do parâmetro e os unimos para produzir uma curva.

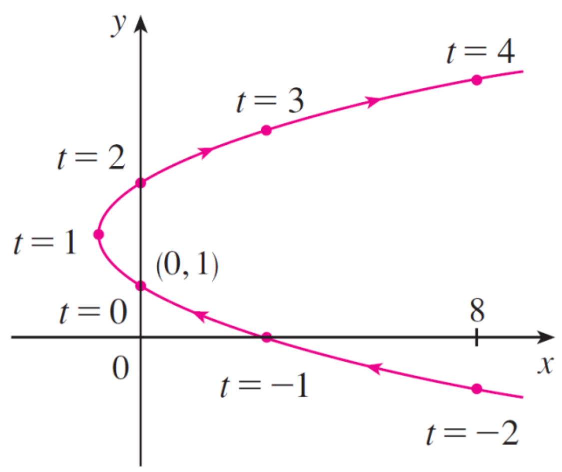


Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção das setas quando t aumenta. Observe que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não a distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera à medida que t aumenta.

Parece, a partir da Figura 2, que a curva traçada pela partícula poderia ser uma parábola. Isso pode ser confirmado pela eliminação do parâmetro t, como a seguir. Obtemos $t = y – 1$ a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Isso fornece

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

e assim a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola $x = y^2 - 4y + 3$.

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Nenhuma restrição foi colocada no parâmetro t no Exemplo 1, de modo que assumimos que t poderia ser qualquer número real. No entanto, algumas vezes restringimos t a um intervalo finito. Por exemplo, a curva parametrizada

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leq t \leq 4$$

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

mostrada na Figura 3 é a parte da parábola do Exemplo 1 que começa no ponto (0, 1) e termina no ponto (8, 5). A seta indica a direção na qual a curva é traçada quando aumenta de 0 até 4.

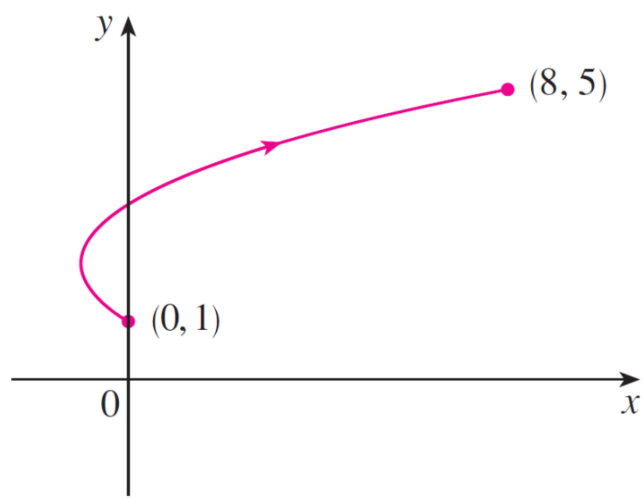


Figura 3

Curvas Definidas por Equações Paramétricas

De forma geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

tem **ponto inicial** $(f(a), g(a))$ e **ponto terminal** $(f(b), g(b))$.

Exemplo 2

Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \text{sen } t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

SOLUÇÃO: Se marcarmos os pontos, parece que a curva é um círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação de *t*. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

Então, o ponto (x, y) se move no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Observe que, neste exemplo, o parâmetro *t* pode ser interpretado como o ângulo (em radianos) mostrado na Figura 4. Quando *t* aumenta de 0 para 2π, o ponto $(x, y) = (\cos t, \text{sen } t)$ se move uma vez em torno do círculo, no sentido anti-horário, partindo do ponto (1, 0).

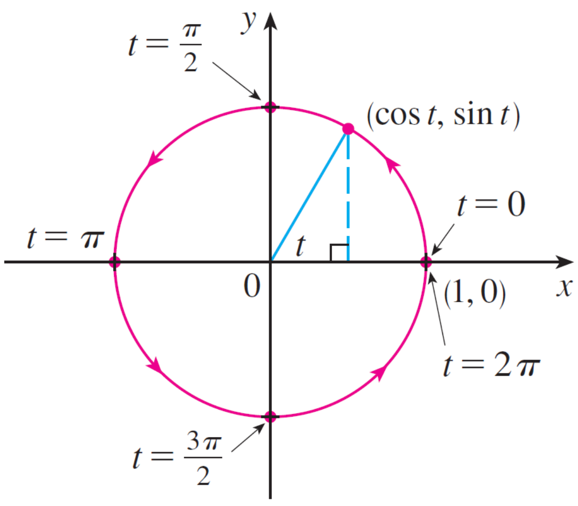


Figura 4

Ferramentas Gráficas

Ferramentas Gráficas

A maioria das calculadoras gráficas e dos programas gráficos computacionais pode ser usada para traçar curvas definidas por equações paramétricas. De fato, é instrutivo olhar uma curva parametrizada sendo desenhada por uma calculadora gráfica, porque os pontos são marcados em ordem, à medida que os valores correspondentes do parâmetro aumentam.

Exemplo 6

Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva
$x = y^4 - 3y^2$.

SOLUÇÃO: Se fizermos o parâmetro ser $t = y$, então teremos as equações

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Usando essas equações paramétricas para traçar a curva, obtemos a Figure 9. Seria possível resolver a equação dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como quatro funções de x e traçá-las individualmente, mas as equações paramétricas oferecem um método muito mais fácil.

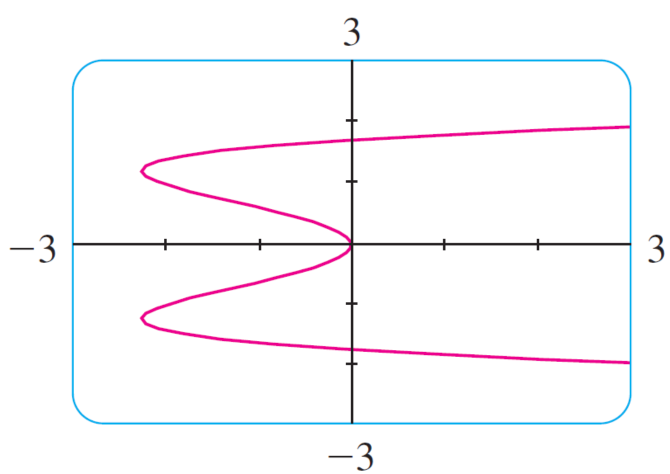


Figura 9

Ferramentas Gráficas

Um dos usos mais importantes das curvas parametrizadas é no Computer-Aided Design (CAD). No Projeto de Laboratório, investigaremos curvas parametrizadas especiais, chamadas **curvas de Bézier**, que são usadas amplamente em fabricação, especialmente na indústria automobilística. Essas curvas também são empregadas na especificação de formatos de letras e outros símbolos em impressoras a laser.

A Cicloide

Exemplo 7

A curva traçada pelo ponto P na borda de um círculo quando ele rola ao longo de uma reta é chamada **cicloide** (veja a Figura 13). Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo do eixo x e se uma posição de P for a origem, encontre as equações paramétricas para a cicloide.

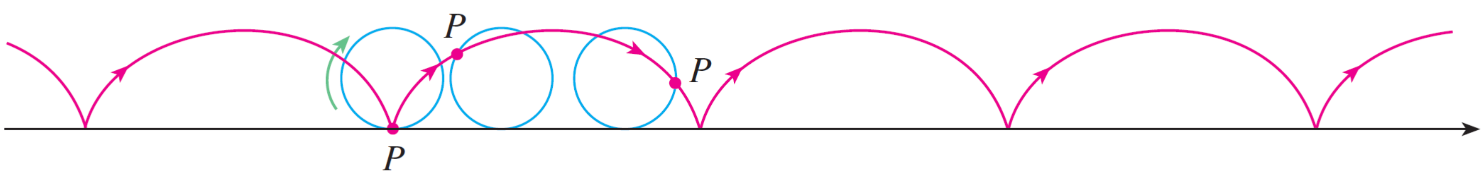


Figura 13

Exemplo 7 – *Solução*

Escolhemos como parâmetro o ângulo de rotação θ do círculo (θ = 0 quando *P* está na origem). Suponha que o círculo tenha girado θ radianos. Como o círculo está em contato com a reta, vemos na Figura 14 que a distância que ele girou a partir da origem é

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

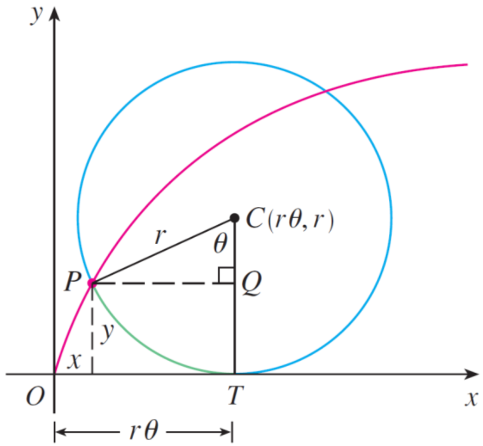


Figura 14

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Dessa forma, o centro do círculo será $C(r\theta, r)$. Sejam (x, y) as coordenadas P. Da Figura 14, vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide são

$$\boxed{1} \qquad x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Um arco da cicloide surge de uma rotação do círculo e, assim, é descrito por $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 14, que ilustra o caso em que $0 < \theta < \pi/2$, podemos ver que essas equações ainda são válidas para outros valores de θ.

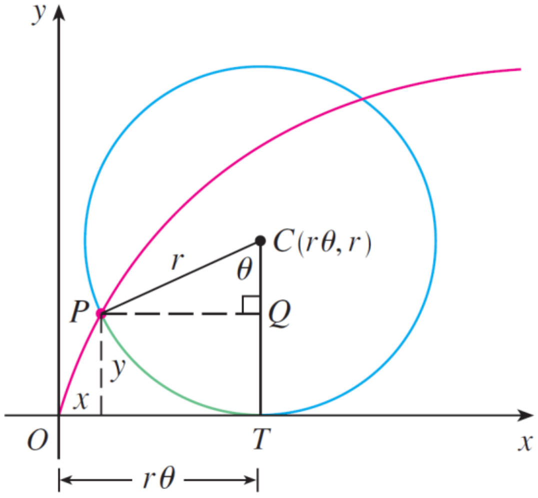


Figura 14

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Ainda que seja possível eliminar o parâmetro θ das Equações 1, a equação cartesiana resultante em *x* e *y* é muito complicada e não tão é conveniente para trabalhar quanto as equações paramétricas

A Cicloide

Uma das primeiras pessoas a estudar a cicloide foi Galileu, que propôs que pontes poderiam ser construídas no formato de cicloides e que tentou encontrar a área sob um arco de uma cicloide. Mais tarde essa curva apareceu na conexão com o **problema braquistócrona**: Encontre a curva da qual uma partícula irá deslizar no menor tempo (sob influência da gravidade) de ponto *A* para um ponto mais baixo *B* não diretamente abaixo de *A*.

A Cicloide

O matemático suíço John Bernoulli, que apresentou esse problema em 1696, mostrou que entre todas as curvas possíveis que ligam *A* e *B*, como na Figura 15, a partícula levará o menor tempo deslizando de *A* até *B* se a curva for um arco invertido de uma cicloide.

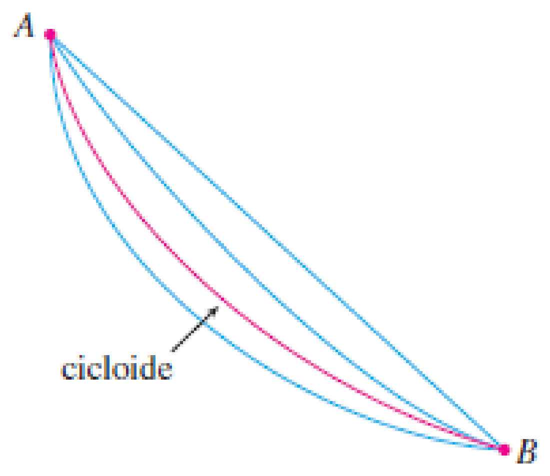


Figura 15

A Cicloide

O físico holandês Huygens já tinha mostrado que a cicloide é também a solução para o **problema da tautócrona**; isto é, onde quer que a partícula *P* seja colocada em uma cicloide invertida, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo (veja a Figura 16). Huygens propôs que o pêndulo de relógio (que ele inventou) deveria oscilar em um arco cicloidal, porque então ele levaria o mesmo tempo para fazer uma oscilação completa por um arco maior ou menor.

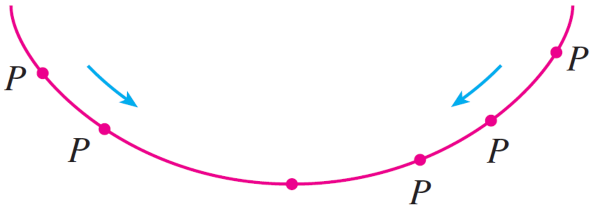


Figura 16

Famílias de Curvas Parametrizadas

Exemplo 8

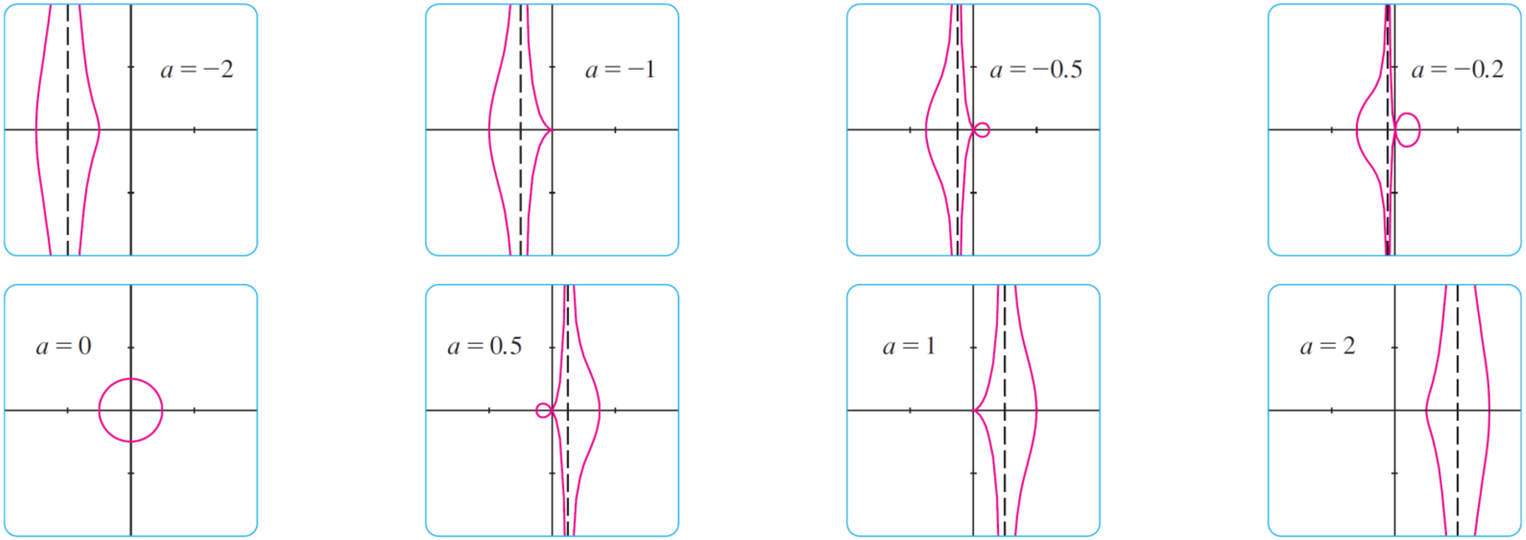
Investigue a família de curvas com equações paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$$

O que essas curvas têm em comum? Como muda o formato quando *a* aumenta?

Exemplo 8 – *Solução*

Usamos um aparelho gráfico para produzir gráficos para os casos a = –2, –1, –0,5, –0,2, 0, 0,5, 1 e 2 mostrados na Figura 17.



Membros de uma família $x = a + \cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$, todos traçados na janela retangular [–4, 4] por [–4, 4]

Figura 17

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Observe que todas essas curvas (exceto no caso $a = 0$) têm dois ramos e ambos se aproximam da assíntota vertical $x = a$ quando x se aproxima de a a partir da esquerda ou da direita.

Quando a < –1, ambos os ramos são lisos; mas quando a se aproxima de –1, o ramo direito adquire um formato pontudo, chamado *cúspide*. Para a entre –1 e 0 a cúspide se torna um laço, que se torna maior quando a se aproxima de 0. Quando $a = 0$, ambos os ramos se juntam e formam um círculo. Para a entre 0 e 1, o ramo esquerdo tem um laço, que se encolhe para se tornar uma cúspide quando $a = 1$.

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Para $a > 1$, os ramos se tornam lisos novamente e, quando a aumenta mais ainda, eles se tornam menos curvados. Observe que as curvas com a positivo são reflexões em torno do eixo y das curvas correspondentes com a negativo.

Essas curvas são denominadas **conchoides de Nicomedes**, em homenagem ao antigo estudioso grego Nicomedes. Ele as chamou de conchoides porque o formato de seus ramos lembra uma concha.