17

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

17.2 Equações Lineares Não Homogêneas

Equações Lineares Não Homogêneas

Nesta seção, aprenderemos a resolver equações diferenciais lineares não homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$\boxed{1} \qquad ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde *a*, *b* e *c* são constantes e *G* é uma função contínua. A equação homogênea correspondente

$$\boxed{2} \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

é chamada **equação complementar** e desempenha um papel importante na solução da equação não homogênea original $\boxed{1}$.

Equações Lineares Não Homogêneas

$\boxed{3}$ **Teorema** A solução geral da equação diferencial não homogênea $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

onde y_p é uma solução particular da Equação 1 e y_c é a solução geral da Equação complementar 2.

Existem dois métodos para encontrar uma solução particular:

O método dos coeficientes indeterminados é simples, mas funciona apenas para uma classe restrita de funções *G*.

O método de variação de parâmetros funciona para todas as funções *G*, mas, geralmente, é mais difícil de aplicar na prática.

O Método dos Coeficientes Indeterminados

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos primeiro ilustrar o método dos coeficientes indeterminados para a equação

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

onde $G(x)$ é um polinômio. É razoável prever que exista uma solução particular y_p que seja um polinômio de mesmo grau de G, pois, se y for um polinômio, então $ay'' + by' + cy$ também é um polinômio. Portanto, substituímos $y_p(x)$ = a, um polinômio (de mesmo grau de G), na equação diferencial e determinamos os coeficientes.

Exemplo 1

Resolva a equação $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ é

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

com raízes $r = 1, -2$. Logo, a solução da equação complementar é

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Uma vez que $G(x) = x^2$ é um polinômio de grau 2, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Então, $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Assim, substituindo na equação diferencial dada, temos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

ou $$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Assim,

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

A solução desse sistema de equações é

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Uma solução particular é, portanto,

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

e, pelo Teorema 3, a solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

Exemplo 3

Resolva $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$.

SOLUÇÃO: Tentemos uma solução particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \text{ sen } x$$

Então, $y_p' = -A \text{ sen } x + B \cos x$ $\quad y_p'' = -A \cos x - B \text{ sen } x$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

logo, substituindo na equação diferencial, temos

$$(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x) + (-A\,\text{sen}\,x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) = \text{sen}\,x$$

ou

$$(-3A + B)\cos x + (-A - 3B)\,\text{sen}\,x = \text{sen}\,x$$

Isso acontece se

$$-3A + B = 0 \qquad \text{e} \qquad -A - 3B = 1$$

A solução deste sistema é

$$A = -\frac{1}{10} \qquad\qquad B = -\frac{3}{10}$$

Exemplo 3 – *Solução*

logo, uma solução particular é

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\operatorname{sen} x$$

No Exemplo 1, determinamos que a solução da equação complementar é $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\operatorname{sen} x)$$

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Se $G(x)$ for um produto de funções dos tipos precedentes, então tentamos a solução como um produto de funções do mesmo tipo. Por exemplo, ao resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

tentamos

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \operatorname{sen} 3x$$

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Se $G(x)$ for uma soma de funções desses tipos, usamos o *princípio da superposição*, que é facilmente verificável e nos diz que, se y_{p_1} e y_{p_2} forem soluções de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, então $y_{p_1} + y_{p_2}$ é uma solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

O Método dos Coeficientes Indeterminados

Resumo do Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Se $G(x) = e^{kx}P(x)$, onde P é um polinômio de grau n, então tente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de n-ésimo grau (cujos coeficientes são determinados através da substituição na equação diferencial).

2. Se $G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$ ou $G(x) = e^{kx}P(x)\operatorname{sen} mx$, onde P é um polinômio de n-ésimo grau, então tente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\sin mx$$

onde Q e R são polinômios de grau n-ésimo.

Modificação: Se algum termo de y_p for uma solução da equação complementar, multiplique y_p por x (ou por x^2 se necessário).

Exemplo 6

Determine a forma da solução tentativa para a equação diferencial $y'' - 4y + 13y = e^{2x} \cos 3x$.

SOLUÇÃO: Aqui $G(x)$ tem a forma encontrada na parte 2 do resumo, onde $k = 2$, $m = 3$ e $P(x) = 1$. Assim, à primeira vista, a forma da solução tentativa deveria ser

$$y_p(x) = e^{2x} (A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

Mas a equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0$, com raízes $r = 2 \pm 3i$, portanto a solução da equação complementar é

$$y_c(x) = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Isso significa que temos de multiplicar a solução tentativa sugerida por x.

Então, em vez disso, usamos

$$y_p(x) = xe^{2x}\,(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

O Método das Variações dos Parâmetros

O Método das Variações dos Parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea $ay'' + by' + cy = 0$, escrevamos a solução como

$$\boxed{4} \qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 da Equação 4 pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

O Método das Variações dos Parâmetros

Procuramos uma solução particular da equação não homogênea $ay'' + by' + cy = G(x)$ da forma

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x) \tag{5}$$

(Esse método é chamado **variação dos parâmetros** porque variamos os parâmetros c_1 e c_2, para tornando-os funções.) Derivando a Equação 5, obtemos

$$y_p' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2') \tag{6}$$

O Método das Variações dos Parâmetros

Uma vez que u_1 e u_2 são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre eles. Uma condição é que y_p é uma solução da equação diferencial e podemos escolher a outra condição de modo a simplificar nossos cálculos. Considerando a expressão da Equação 6, vamos impor a condição de que

$$\boxed{7} \qquad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

Então,

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$$

O Método das Variações dos Parâmetros

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

ou

$$\boxed{8} \quad u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Mas y_1 e y_2 são soluções da equação complementar, logo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

e a Equação 8 simplifica para

$$\boxed{9} \quad a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

O Método das Variações dos Parâmetros

As Equações 7 e 9 formam um sistema de duas equações nas funções desconhecidas u_1' e u_2'. Após resolver esse sistema, podemos integrar para encontrar u_1 e u_2 e então a solução particular é dada pela Equação 5.

Exemplo 7

Resolva a equação $y'' + y = \text{tg } x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $r^2 + 1 = 0$ com as raízes $\pm i$, logo, a solução de $y'' + y = 0$ é $y(x) = c_1 \text{ sen } x + c_2 \cos x$.

Usando a variação dos parâmetros, buscamos uma solução da forma

$$y_p(x) = u_1(x) \text{ sen } x + u_2(x) \cos x$$

Então $$y_p' = (u_1' \text{ sen } x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \text{ sen } x)$$

Faça

$$u_1' \text{ sen } x + u_2' \cos x = 0 \tag{10}$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Então, $$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Para y_p ser uma solução, devemos ter

$$\boxed{11} \qquad y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$$

Resolvendo as Equações 10 e 11, obtemos

$$u_1'(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \operatorname{tg} x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

(Procuramos uma solução particular, logo não precisaremos de uma constante de integração aqui). Em seguida, a partir da Equação 10, obtém-se

$$u_2' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Então $\qquad u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

(Observe que $\sec x + \operatorname{tg} x > 0$ para $0 < x < \pi/2$.) Portanto

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x$$

$$= -\cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$