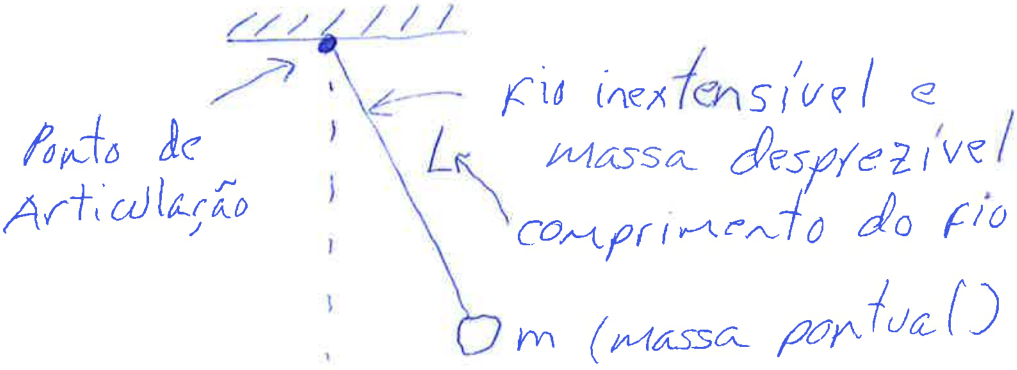
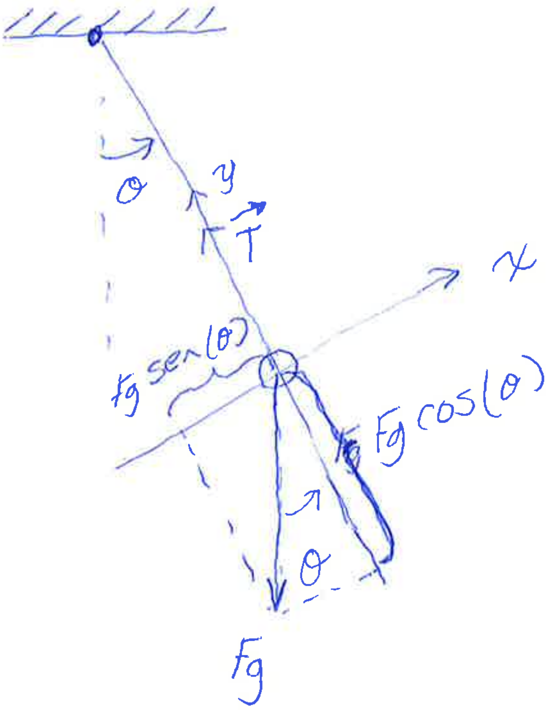
Introdução as Eq. Dif. de 2^{da} Ordem

Pêndulo Simples

sem atrito do ar





Segunda Lei de Newton para a Rotação

$$\underbrace{\Sigma \tau}_{\text{Somatoria dos Torques}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{momento de Inercia}}}{I}\,\alpha \leftarrow \text{aceleração angular}$$

$$\tau = d \cdot F_{\perp}$$

d → distância ao eixo de rotação

$F_{\perp}$ → Força perpendicular ao fio.

$$-L\cdot mg\,sen(\theta) = I\alpha$$

$$-\cancel{L}\cancel{m}g\,sen(\theta) = \cancel{m}L^{\cancel{2}}\alpha$$

$$-g\,sen(\theta) = L\alpha$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \leftarrow \text{velocidade ângular}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$\frac{-g\,sen(\theta)}{L} = \alpha$$

$$\frac{-g\,sen(\theta)}{L} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

ou.

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\,sen(\theta) = 0$$

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\,sen(\theta(t)) = 0$$

- Eq. Dif. de 2da Ordem, Não Linear
- Devemos procurar quem é a função $\theta = f(t)$ que satisfaz essa equação.
- A equação pode ser linealizada para ângulos pequenos.

Usamos a expansão de Maclaurin (Taylor em $\theta=0$) da função seno e pegamos somente o primeiro termo:

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\boxed{\text{sen}(\theta) \approx \theta}$ para ângulos pequenos

Se $\theta = 5° = 0{,}0873$ rad o erro é de apenas 0,1%.

$$\theta''(t) + \underbrace{\frac{g}{L}}_{cte}\,\theta(t) = 0 \Longleftarrow$$ Eq. Dif. Linear de 2da Ordem, Homogênea com coeficientes constantes

Mostraremos como resolver essa equação

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) + C_2\, \text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)$$

Solução Geral da Eq. Homogênea.

- Podemos escrever $\sqrt{\frac{g}{L}}\,t = 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)$ e interpretar T como o período de oscilação do pêndulo simples

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Redução de Ordem

- Eq. Dif. de 1ra ordem podem ser representadas pela eq. $G(x, y(x), y'(x)) = 0$

Ex: $[y'(x)]^2 + \ln(x)\, y(x)\, y'(x) = \text{sen}(x)$ é uma eq. dif. de 1ra ordem. A maior derivada que aparece é a primeira derivada. O fato da primeira derivada estar elevada ao quadrado não muda a ordem da eq.

- Eq. Dif. de 2da Ordem pode ser representada pela eq. $G(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$.

- Existem duas situações onde é possível transformar a eq. dif. de 2da ordem em uma eq. dif. de 1ra ordem usando uma mudança de variável.

① Se $y(x)$ não aparece na eq. dif.

Isto é, se $F(x, \cancel{y(x)}, y'(x), y''(x)) = 0$

Proponha $v(x) = y'(x) \Longrightarrow v'(x) = y''(x)$ e

$F(x, v(x), v'(x)) = 0$ é uma equação diferencial de 1ra ordem.

Ex. $xy''(x)+y'(x)=0$, $\underbrace{x, \cancel{y(x)}, y'(x), y''(x)}_{\text{checar}}$

Propomos $v(x)=y'(x)$

$v'(x)=y''(x)$

$xv'(x)+v(x)=0$ ← Eq. Dif. de 1^{ra} ordem

$xv'(x)=-v(x)$ ← Usando Separação de Variáveis

$$x\frac{dv(x)}{dx}=-v(x)$$

$$\frac{dv(x)}{v(x)}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dv(x)}{v(x)}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|=-\ln|x|+C$$

$$e^{\ln|v(x)|}=e^{-\ln|x|+C}$$

$y=e^{\ln(y)}$

Lembrando se $y=e^{x} \rightarrow x=\ln(y)$

$x=\ln(e^{x})$

$D=e^{C}$

$e^{a+b}=e^{a}\cdot e^{b}$

$|v(x)|=De^{\ln(|x|^{-1})}$ → Lembrando $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$ ←

$|v(x)|=\frac{D}{|x|}$ $D\in\mathbb{R}.$

$v(x)=\frac{\pm D}{x}$ $\pm D=E\in\mathbb{R}$

$v(x)=\frac{E}{x}$

mas $v(x)=y'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{E}{x} \Rightarrow dy=E\frac{dx}{x}$

$\int dy=E\int\frac{dx}{x}$ ...

$y = E[\ln|x| + G]$ $\quad G \in \mathbb{R}$

$y(x) = E\ln|x| + E\cdot G$ $\quad E\cdot G = H \in \mathbb{R}$

$y(x) = E\ln|x| + H$

Duas Constantes Arbitrárias

Solução da Eq. Dif. de 2da ordem $xy''(x) + y'(x) = 0$

② Se a eq. dif. não contém a variável independente (x).

Isto é, se $F(\cancel{x}, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Neste caso proponha $y'(x) = v(y)$

$$\Downarrow$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left[v(y\cancel{(x)})\right] = \overbrace{\left(\frac{dv}{dy}\right)}^{v'(y)}\overbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}^{v(y)}$$ Regra da Cadeia

$$y''(x) = v(y)v'(y)$$

$$\Swarrow$$

$$F(y, v(y), v(y)v'(y)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$F(y, v(y), v'(y)) = 0 \leftarrow 1^{ra}$ ordem.

~~Ex. $y''+y'=0$, $\cancel{x}, y(x), y'(x), y''(x)$~~

checar

Ex. $y''+y'+y=0$, $\underbrace{\cancel{x}, y(x), y'(x), y''(x)}_{\text{checar}}$

$y'(x) = v(y)$

$y''(x) = v(y)v'(y)$ leva a $\boxed{v(y)v'(y) + v(y) + y = 0}$

1^{ra} ordem
Solução $v(y)$.
Não linear por causa do termo $v(y)v'(y)$

Embora a técnica de redução de ordem se aplique neste caso, este não é o melhor caminho de solução para a eq. dif. de 2da ordem de partida. Tambem não posso resolver pelo método de separação de variáveis.

Vamos estudar como resolver

$y''+y'+y=0$ nas próximas aulas.

Outro exemplo do segundo caso

- $y''y'+3y=0$ → Esta é uma eq. dif. de 2da ordem não linear ($y''y'$), onde não aparece a variável independente x

Vamos propor as trocas $y'(x)=v(y)$ e

$y''(x)=v(y)v'(y)$

A eq. dif. fica $\boxed{v(y)v'(y)\cdot v(y)+3y=0}$ Eq. Dif. de 1ra ordem

$G(y,v(y),v'(y))=0$

Não linear

$$[v(y)]^2\frac{dv(y)}{dy}=-3y.$$

$$v^2dv=-3y\,dy$$

$$\frac{v^3}{3}=-\frac{3}{2}y^2+C_1$$ ← Primeira Constante de Integração

Para simplificar vamos supor que

$y'(x)=v(y)>0$ e $y(x)\in\mathbb{R}$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}y^2+D_1}\,,\quad D_1=3C_1\,,\quad D_1 \text{ e } C_1\in\mathbb{R}$$

mas $v=\frac{dy}{dx}$ → $\boxed{\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}y^2+D_1}}$ Eq. Dif. de 1ra ordem não linear

Podemos resolver separando as variáveis

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{-\frac{9}{2}y^2 + D_1}} = dx$$

$$H(y) = \boxed{\int \frac{dy}{\sqrt[3]{-\frac{9}{2}y^2 + D_1}}} = x + D_2$$

$$H(y) = x + D_2 \leftarrow$$

Não é mais uma eq. dif. Mesmo quando não tenho uma expressão analítica para $H(y)$.

Eq. Dif. LINEAR de 2^{da} Ordem

- Uma equação diferencial linear de 1^{ra} ordem é da forma

$$A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = C(x)$$

- As funções $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ não precisam ser lineares em relação a x.

Ex. $\ln(x)\,y'(x) + \mathrm{sen}(x)\,y(x) = e^x$

é uma eq. dif. linear de 1^{ra} ordem

- A equação precisa ser linear em relação a $y(x)$ e $y'(x)$.

Ex. $5y'(x) + \underbrace{y^2(x)}_{\text{Não é linear}} = 0$

Ex. $\underbrace{\sqrt{y'(x)}}_{\text{Não é linear}} = x$

- Não podem aparecer termos mixtos como $y(x)y'(x)$.

Ex. $3\,\underline{y(x)\,y'(x)} = \mathrm{sen}(x)$

é NÃO linear

- Uma equação diferencial linear de 2da ordem é da forma

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

- As funções $A(x), B(x), C(x)$ e $D(x)$ NÃO precisam ser lineares em relação a x.

Ex. $$\text{senh}(x)y''(x) + \frac{1}{x^2}y'(x) + x^3y(x) = \cos(x)$$

<u>é</u> uma eq. dif. <u>linear</u>.

- A equação precisa ser linear em relação a $y(x), y'(x)$ e $y''(x)$.

Ex. $$y''(x) + \underbrace{5\,\text{sen}(y'(x))} + y(x) = 0$$

é NÃO linear

Ex. $$\text{sen}(x)y''(x) + \underbrace{y^2(x)} = 0$$

é não linear

- Não podem aparecer termos mixtos: $y''(x)y'(x)$ ou $y''(x)y(x)$ ou $y'(x)y(x)$.

Ex. $$y''(x) + 5\underbrace{y'(x)y(x)} = 0$$

é não linear

Eq. $\underbrace{y''(x)y(x)} = \cos(x)$ → é não linear

Uma eq. dif. linear pode ser representada usando operadores.

$$A(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + B(x)\frac{dy(x)}{dx} + C(x)\,y(x) = D(x)$$

Vamos pensar como se pudessemos colocar y(x) em evidência do lado esquerdo da eq.

$$\underbrace{\left[A(x)\frac{d^2}{dx^2} + B(x)\frac{d}{dx} + C(x)\right]}_{\text{Operador Diferencial Linear de 2da Ordem.}} y(x) = D(x)$$

O operador parte da função y(x) e a transforma na função D(x). Isto é,

$$\mathcal{L}_2(x)\left[y(x)\right] = D(x)$$

ou simplesmente

$$\mathcal{L}\,y(x) = D(x).$$

- $\mathcal{L}$ satisfaz as condições de uma transformação linear

$$\mathcal{L}(\lambda y_1(x) + \beta y_2(x)) = \lambda \mathcal{L}(y_1(x)) + \beta \mathcal{L}(y_2(x))$$

devido a ser composto de uma soma de derivadas, que são, por sua vez, transformações lineares.

O operador L_2 também pode ser escrito em função do operador derivada (D).

$$L_2 = A(x)D^2 + B(x)D + C(x)$$

Isto é $D[y(x)] = \dfrac{dy(x)}{dx}$ e

$$D^2[y(x)] = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

Ex. $D(\cos 5x) = -5\,\text{sen}(5x)$

Ex. $(D+5)(\cos 5x) = -5\,\text{sen}(5x) + 5\cos(5x)$

Ex. $(D-3)(D+5)(\cos(5x)) = (D-3)[-5\,\text{sen}(5x) + 5\cos(5x)] =$

$-25\cos(5x) - 25\,\text{sen}(5x) + 15\,\text{sen}(5x) - 15\cos(5x)$

$$(D-3)(D+5)(\cos(5x)) = (D^2+2D-15)(\cos(5x))$$

$$(D^2+2D-15)[\cos(5x)] = \frac{d^2[\cos(5x)]}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}[\cos(5x)] - 15\cos(5x)$$

Uma eq. dif. linear de 2da ordem com coeficientes constantes reais e homogênea posso representar como

$$(D-r_1)(D-r_2)\,y(x) = 0$$

r_1 e $r_2 \in \mathbb{C}$ ← Complexos.

ctes.

- Um operador diferencial (D) aplicado n vezes anula um polinômio de grau n-1. Isto é,

Se $y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1}$ ← coeficientes constantes

$C_i \in \mathbb{R}$

$$D^n[y(x)] = 0$$

Neste caso se fala que D^n é um operador ANULADOR de $y(x)$.

$$D[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1}] =$$

$$= C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots + (n-1) C_{n-1} x^{n-2}$$

segunda derivada $D[C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots + (n-1) C_{n-1} x^{n-2}] =$

$$= 2C_2 + 3 \cdot 2 C_3 x + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot C_4 x^2 + \dots + (n-1)(n-2) C_{n-1} x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$D^n[y(x)] = 0 ..$$

- Um operador diferencial $(D-r)$ anula a função $y(x) = e^{rx}$.

$$(D-r) e^{rx} = re^{rx} - re^{rx} = 0$$

Veremos que esse fato está diretamente relacionado com a procura de soluções na eq. dif. de 2^{da} ordem linear, homogênea e com coeficientes constantes.

Funções Linearmente Independentes

e Solução Geral da Eq. Dif. Homogênea.

- Vamos lembrar do curso de Algebra que dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são chamados de linearmente independentes (L.I.) quando a única solução para a eq. vetorial

$$\lambda\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{0}$$

é a solução trivial. Isto é $\lambda=\beta=0$. Caso existam outras soluções, além da trivial, os vetores são ditos linearmente dependentes (L.D.).

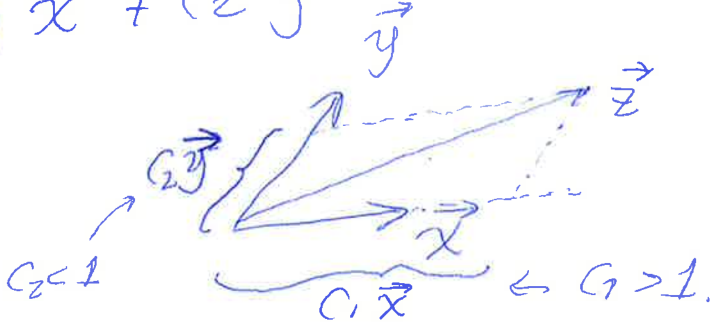
Ex. Se $\lambda=2$ e $\beta=1$ satisfaz

$$2\vec{x}+1\vec{y}=\vec{0}$$

$$\vec{y}=-2\vec{x}$$ ← Os vetores são paralelos: $\vec{y}=C\vec{x}$ (L.D.)

- Quando conheciamos dos vetores L.I. do plano ($\mathbb{R}^2$) podiamos geral qualquer outro vetor do plano usando uma combinação linear dos vetores da base (os vetores L.I.):

$$\vec{z}=C_1\vec{x}+C_2\vec{y}$$



Se $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A solução é única se $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

existe a matriz inversa.

- - - -

As soluções de uma eq. dif. linear de 2^{da} ordem formam um espaço vetorial de dimensão 2. Basta achar duas soluções linearmente independentes. Isto é

Se $y_1(x)$ satisfaz $A(x)y_1''(x) + B(x)y_1'(x) + C(x)y_1(x) =$ [illegible]

e $y_2(x)$ " $A(x)y_2''(x) + B(x)y_2'(x) + C(x)y_2(x) = 0$

e (a única solução para a eq. vetorial

y_1 e y_2 L.I. $\quad \lambda \vec{y_1}(x) + \beta \overrightarrow{y_2(x)} = \vec{0}$ é a solução

trivial ($\lambda = \beta = 0$) então

a solução geral da eq. dif. linear de 2^{da} ordem e homogênea

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

será $y_{g.h.}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ onde

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad \underset{\text{geral. homogênea}}{y_{g.h.}(x)} = \underset{\text{solução complementar outros autores.}}{y_c(x)}$

- Mas que significa mesmo que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L. I.?

- Quando $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L.D. existem valores de λ ou β diferentes de zero. Por exemplo, $\beta=3$, $\lambda=2$, tais que $2y_1(x) + 3y_2(x) = \underset{\sim}{0}$ função indenticament nula.

ou $y_2(x) = -\frac{2}{3}y_1(x)$

$y_2(x)$ é proporcional a $y_1(x)$

$\overrightarrow{y_2(x)}$ é paralelo a $\overrightarrow{y_1(x)}$

- Em termos práticos temos que determinar se o determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

em algum ponto do intervalo aberto que procuramos a solução.

- O determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x)$$ é chamado de Wronskiano

- Se $W(x) \neq 0 \Rightarrow y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L.I.

- O porquê de aparecer a função e sua derivada está relacionado com o problema de valor inicial ter solução única. Isso será estudado posteriormente.

Ex.: São as funções $y_1(x) = sen(2x)$ e $y_2(x) = sen(x)cos(x)$ L.I.?

Um caminho rápido é lembrar que $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$

Isso significa $y_1(x) = 2y_2(x)$ e elas não são L.I.

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são L.D.

- Ex. Suponha que $y_1(x) = \text{sen}(x)$ e $y_2(x) = \cos(x)$ são soluções de uma eq. dif. de 2^{da} ordem homogênea. São $y_1(x)$ e $y_2(x)$ L.I.?

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\text{sen}(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = -\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) = -1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo as duas soluções são L.I. e a solução geral da eq. dif. citada ~~são~~ é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \text{sen}(x) + C_2 \cos(x)$$

- Repita o exercício anterior com $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2e^x e^{-x} = -2\overset{1}{\boxed{e^0}} = -2 \neq 0$$

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

Logo $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ são L.I.

e $y_{g.h.}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

com C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Verificando Soluções de uma E.D. de 2da ordem. Casos Simples.

- Qual é a eq. dif. de 2da ordem mais simples que podemos escrever?

$$y''(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad D^2[y(x)] = 0$$

- Queremos encontrar qual é a função $y(x)$ que faz verdadeira a igualdade $y''(x) = 0$.

- Intuitivamente, qualquer polinômio de x de grau um serve:

$$y(x) = C_0 x^0 + C_1 x^1$$

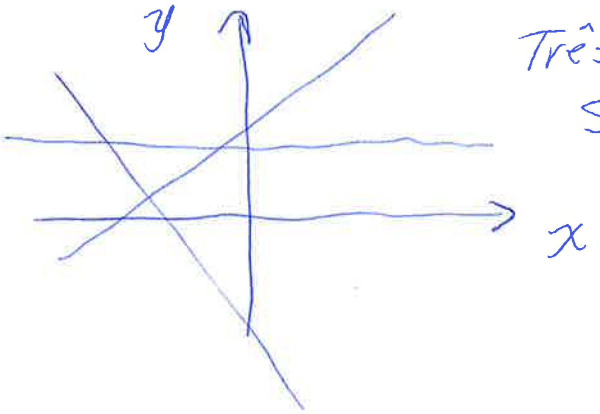
ou simplesmente

$$y(x) = C_0 + C_1 x$$

$$y'(x) = C_1$$

$$y''(x) = 0$$

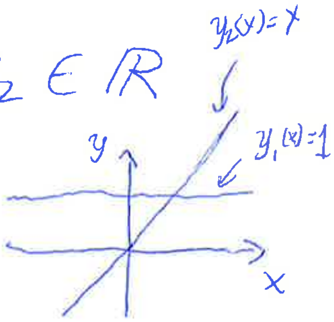
Isto é, qualquer reta do plano satisfaz a eq. dif. $y''(x)$.



Três Exemplos de Soluções

- Veremos que encontramos a solução geral, isto é qualquer solução de $y''(x)=0$ se "encaixa" na expressão

$$\underset{\text{geral da eq. homogênea}}{y_{g.h.}(x)} = C_0 \cdot \underbrace{1}_{y_1(x)=1} + C_1 \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow\, y_2(x)=x} \qquad C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}$$



- Em geral, para uma eq. dif. de segunda ordem

$$y_{g.h}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \leftarrow \text{Combinação Linear.}$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes.

Wronkiano $\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ L.I.

- Considerando somente a eq. dif. de segunda ordem existem infinitas soluções, C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

- A função constante $y_1(x)=1$ também pode ser escrita como $y_1(x)=e^{0\cdot x}=1$

ou $\boxed{y_1(x)=e^{rx} \text{ com } r=0}$

- $y_2(x)=x$ também pode ser escrita como

$$\boxed{y_2(x) = x\cdot 1 = xe^{rx} \text{ com } r=0}$$

Veremos que $y''(x)=0$ é um caso particular do Tipo II.

- Agora, vamos estudar outra eq. dif. de segunda ordem:

$D^2[y(x)] = y(x) \Rightarrow (D^2-1)\, y(x) = 0$

$(D+1)(D-1)\, y(x) = 0$

ou $y''(x) = y(x)$ ou $y''(x) - y(x) = 0$

Qual é a função que após ser derivada duas vezes continua como antes da derivação?

$y_1(x) = e^x$

$y_1'(x) = e^x$

$y_1''(x) = e^x$

e que tal $y_2(x) = e^{-x}$

$y_2'(x) = -e^{-x}$

$y_2''(x) = (-)(-)e^{-x} = e^{-x}$

- ou

$y_3(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh(x)$

$y_3'(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}] = \text{senh}(x)$

$y_3''(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh(x)$

- ou

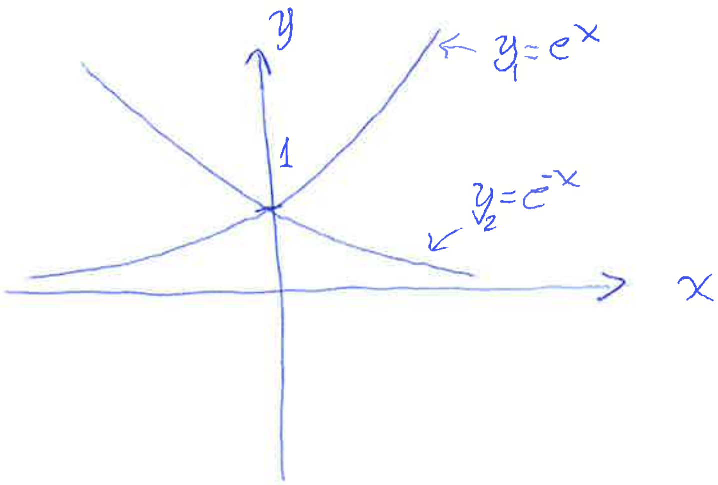
$y_4(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}] = \text{senh}(x)$

$y_4'(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh(x)$

$y_4''(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}] = \text{senh}(x)$

- A solução geral de $y''(x) = y(x)$ pode ser escrita como

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$, onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$



$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W(x) = -2e^x e^{-x}$$

$$W(x) = -2\overset{1}{\boxed{e^0}} = -2 \neq 0$$

L.I.

ou como

$$y_{g.h.}(x) = D_1 \cosh(x) + D_2 \operatorname{senh}(x)$$, onde D_1 e $D_2 \in \mathbb{R}$

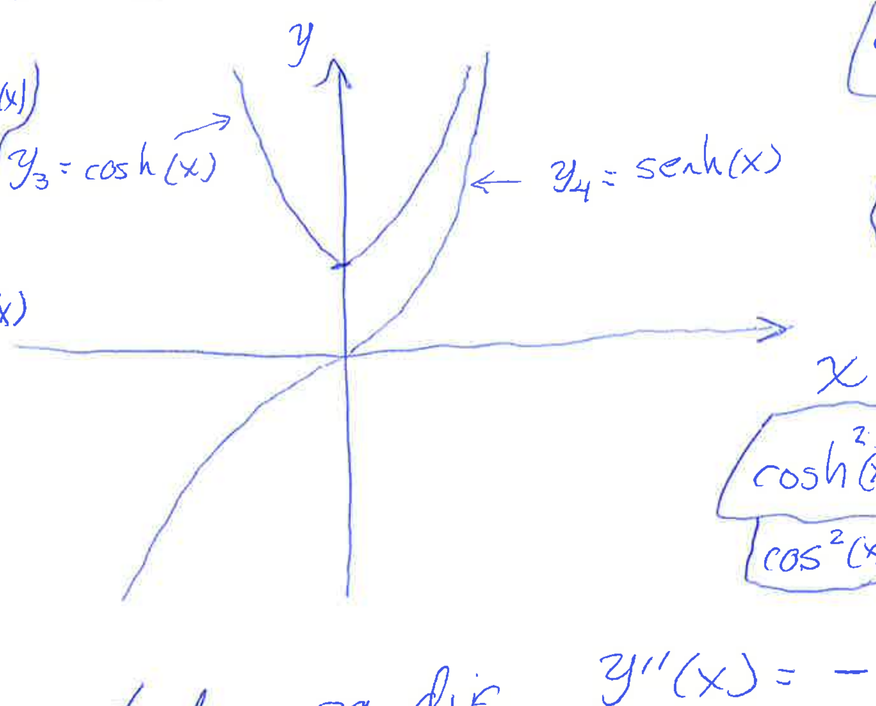
$$W(x) = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \operatorname{senh}(x) \\ \operatorname{senh}(x) & \cosh(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)$$

$$n(x) = 1 \neq 0$$

$\Downarrow$

L.I.



$\boxed{\cosh(x) = \cosh(-x)}$ par

$\boxed{\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)}$ ímpar

$$\boxed{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1}$$

$$\boxed{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1}$$

?

- E que tal a eq. dif. $y''(x) = -y(x)$ ou $(D^2+1)\,y(x) = 0$

$y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(x)$

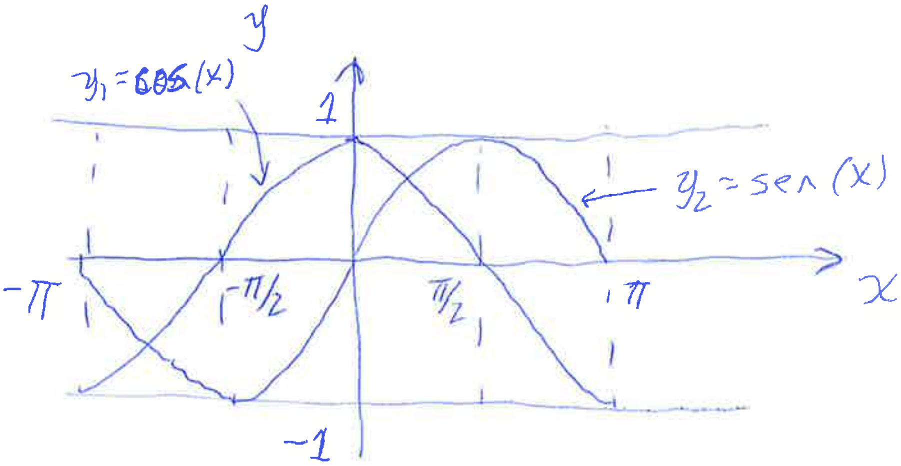
$y_1'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ $\qquad$ $y_2'(x) = \cos(x)$

$y_1''(x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $y_2''(x) = -\operatorname{sen}(x)$

- A solução geral da eq. dif. $y''(x) = -y(x)$ é

$$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{\cos(x)}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\text{sen}(x)}_{y_2(x).}$$

Já mostramos que sen(x) e cos(x) são L.I.



par
$\cos(-x) = \cos(x)$

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
ímpar

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
$\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}(x).$

Resumindo os exemplos

TIPO I: $y''(x) = y(x)$ $\rightarrow$ $y_{gh}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$
ou
$\rightarrow$ $y_{gh}(x) = D_1 \cosh(x) + D_2 \text{senh}(x)$

TIPO II: $y''(x) = 0$ $\rightarrow$ $y_{gh}(x) = C_1 \cdot \underbrace{1} + C_2 \underbrace{x}$
$= C_1 \cdot \underbrace{1 \cdot e^{0 \cdot x}} + C_2 \cdot \underbrace{x \cdot e^{0 \cdot x}}$

TIPO III: $y''(x) = -y(x)$ $\rightarrow$ $y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x)$

$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$ $\rightarrow$ $\theta_{g.h.}(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t) + C_2 \text{sen}(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t)$
pêndulo simples

Solução Geral de uma Eq. Dif. Linear de 2da Ordem e homogênea com coeficientes constantes

- Queremos resolver uma eq. deste tipo:

$$(I) \quad A y''(x) + B y'(x) + C y(x) = 0$$

- Vamos propor que exista uma solução do tipo:

$y(x) = e^{rx}$, onde r é um coeficiente a ser determinado.

- Derivando a nossa proposta de solução

$$(II) \begin{cases} y(x) = e^{rx} \\ y'(x) = r e^{rx} \\ y''(x) = r^2 e^{rx} \end{cases}$$

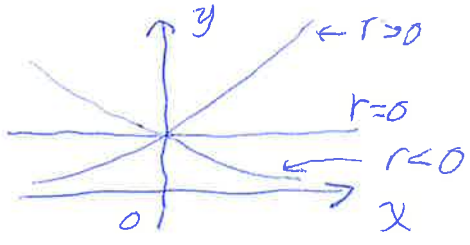
- Substituindo as eq. ~~de~~ (II) em (I)

$$A r^2 \underline{e}^{rx} + B r \underline{e}^{rx} + C \underline{e}^{rx} = 0$$

colocamos e^{rx} em evidência

$$(A r^2 + B r + C) e^{rx} = 0$$

Como a função exponencial (e^{rx}) nunca se anula



$\boxed{Ar^2 + Br + C = 0}$ Polinômio Caraterístico da Eq. Dif. de Partida

- Passamos de uma Eq. Dif. para outra eq. onde não existem mais derivadas. Como foi possível essa "mágica"? Justamente devido a exponencial e^{rx}.

- Resolvendo em r o polinômio caraterístico teremos três situações (tipos):

I) Se $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$ e r_1 e $r_2 \in \mathbb{R}$

II) " $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r$ e $r \in \mathbb{R}$

III) Se $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$

r_1 e $r_2 \in \mathbb{C}$ ← números complexos

- Note que a passagem de

$$Ay''(x) + By'(x) + Cy(x) = 0$$

para

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

pode ser resumida de forma rápida pelas trocas:

$y'' \rightarrow r^2$

$y' \rightarrow r$

$y \rightarrow 1$

- Vamos discutir agora cada um dos três tipos.

Tipo I: Se $B^2 - 4AC > 0$

- As raizes de uma eq. quadrática podem ser encontradas pela fórmula de Bhaskara. Isto é:

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- Quando $B^2 > 4AC \Rightarrow r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ encontramos duas funções que Voltado a proposta inicial são soluções da eq. dif. homogêa:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad e \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

são L.I.?

- Vamos verificar se estas funções

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = r_2 e^{r_1 x} e^{r_2 x} - r_1 e^{r_1 x} e^{r_2 x}$$

$$W(x) = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x + r_2 x}$$

$$W(x) = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) x}$$

Como $e^{(r_1 + r_2) x}$ nunca se anula e $r_1 \neq r_2$

$$\Downarrow$$

$$W(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x$$

$$\Downarrow$$

$y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ são L.I.

– Logo, a solução geral da eq. homogênea no tipo I será

$$y_{g.h.}(x) = \underbrace{C_1 \underbrace{e^{r_1 x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{r_2 x}}_{y_2(x)}}_{\text{combinação linear}}$$

geral homogênea

vetores da base

C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias $C_1 e C_2 \in \mathbb{R}$

– Exemplo: Encontre a solução geral da eq. dif.

$$y''(x) + y'(x) - 12y(x) = 0.$$

Sol.: Vamos procurar soluções da forma $y = e^{rx}$.

Para encontrar o polinômio caraterístico efetuamos as trocas $y'' \rightarrow r^2$ e encontramos

$y' \rightarrow r$

$y \rightarrow 1$

$r^2 + r - 12 = 0$ ← Polinômio Caraterístico

fatorando ou $r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \boxed{\sqrt{1+48}}^{\,7}}{2}$ ← Bhaskara

$(r-3)(r+4) = 0$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -4$

logo $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = e^{-4x}$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}}$$

$C_1 e C_2 \in \mathbb{R}$

Tipo II: Se $B^2 = 4AC$

Usando a fórmula de Bhaskara

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\cancel{B^2 - 4AC}} \rightarrow 0}{2A}$$

$$r_1 = r_2 = \boxed{r = -\frac{B}{2A}}$$

e encontramos UMA solução da eq. homogênea

$$y_1(x) = e^{rx} \quad \text{com } r = -\frac{B}{2A}.$$

Para tentar encontrar uma segunda solução da eq. dif. vamos propor que exista uma solução da forma:

$$y_2(x) = \underbrace{u(x)}_{\text{desconhecido}} \underbrace{e^{rx}}_{\text{conhecido}} \quad \text{onde } r = -\frac{B}{2A}$$

Derivando

$$y_2(x) = u(x)e^{rx}$$

$$y_2'(x) = u'(x)e^{rx} + u(x)re^{rx} = e^{rx}[u'(x) + ru(x)]$$

$$y_2''(x) = [u''(x) + ru'(x)]e^{rx} + re^{rx}[u'(x) + ru(x)]$$

$$= e^{rx}[u''(x) + 2ru'(x) + r^2u(x)]$$

Substituindo em

$$Ay''(x)+By'(x)+Cy(x)=0$$

$$Ae^{rx}[u''(x)+2ru'(x)+r^2u(x)]+Be^{rx}[u'(x)+ru(x)]+Cu(x)e^{rx}=0$$

a exponencial e^{rx} nunca se anula.

$$A[u''(x)+\underline{2ru'(x)}+r^2u(x)]+B[\underline{u'(x)}+ru(x)]+Cu(x)=0$$

$$Au''(x)+\underbrace{\cancel{(2rA+B)}}_{\text{No tipo II}}{}^{\to 0}u'(x)+\underbrace{\cancel{(Ar^2+Br+C)}}_{\text{Polinômio Caraterístico}}{}^{\to 0}u(x)=0$$

No tipo II

$$r=\frac{-B}{2A}$$

$$2\left(\frac{-B}{2A}\right)A+B=0$$

Polinômio Caraterístico

$$Ar^2+Br+C=0$$

$Au''(x)=0$, mas $A\neq 0$ (caso contrário não seria uma eq. de segundo grau)

$u''(x)=0$ ← já sabemos resolver.

$u(x)=C_0+C_1x$, C_0 e $C_1\in\mathbb{R}$

Estamos interessados em escolher $u(x)$ de tal forma que $y_2(x)$ seja L. I. com $y_1(x)$. A forma mais simples é $C_0=0$ e $C_1=1$. Isto é,

$$u(x)=x$$

com isso

$$y_2(x)=u(x)y_1(x)=u(x)e^{rx}$$

$$y_2(x)=xe^{rx}$$

Vamos verificar se $y_1(x)=e^{rx}$ e $y_2(x)=xe^{rx}$ são L.I.?

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx}[1+rx] \end{vmatrix}$$

$$W(x)=e^{2rx}[1+\cancel{rx}-\cancel{rx}]$$

$$W(x)=\underbrace{e^{2rx}}_{\text{nunca se anula}}\neq 0$$

$$\Downarrow$$

$y_1(x)=e^{rx}$ e $y_2(x)=xe^{rx}$ são L.I.

Logo, no tipo II ($B^2=4AC$)

$$\boxed{y_{g.h.}(x)=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}}, \quad C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r=-\frac{B}{2A}$$

Exemplo: Resolva a eq. dif.

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0.$$

Sol.: Propomos uma solução do tipo $y=e^{rx}$ e fazemos as trocas $y''\to r^2$ para encontrar

$y'\to r$

$y\to 1$

$$r^2-4r+4=0 \leftarrow \text{Eq. Caraterística}$$

quadrado perfeito

$$(r-2)^2=0 \Longrightarrow \underset{\text{Tipo II}}{\overset{r_1=r_2=r}{\boxed{r=2}}}$$

Única Solução Degenerada

Logo, a solução geral é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 \cdot x e^{2x}$$

com C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$.

Tipo III: Se $B^2 < 4AC$

Usando a fórmula de Bhaskara

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Multiplicamos dentro da raiz quadrada por $(-1)(-1)=1$.

$$\sqrt{\underbrace{(B^2-4AC)(-1)}_{\text{troca a ordem}}\underbrace{(-1)}_{i^2=-1}} = \sqrt{(4AC-B^2)\,i^2} = i\sqrt{4AC-B^2}$$

$i \rightarrow$ símbolo de número puramente imaginário

$\boxed{4AC - B^2 > 0 \text{ no tipo III}}$

$$r_{1,2} = \underbrace{-\frac{B}{2A}}_{\alpha} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}}_{\beta}$$

α e $\beta \in \mathbb{R}$.

r_1 e $r_2 \in \mathbb{C}$

$r_1 = \alpha + i\beta$ e

$r_2 = \alpha - i\beta$

Logo $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$

$$y_{g.h}(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$'' = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right]$$

- O problema está no argumento imaginário da

exponencial $e^{\pm i\beta x}$. Neste caso, a exponencial deixa de ser uma função real.

- Quando a gente estude séries de potências mostraremos que $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,sen(\theta)}$ ← Conhecida como Fórmula de Euler

- Vamos usar a fórmula de Euler no nosso problema

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1\left\{\overbrace{\cos(\beta x) + i\,sen(\beta x)}^{\theta=\beta x}\right\} + C_2\left\{\overbrace{\cos(-\beta x) + i\,sen(-\beta x)}^{\theta=-\beta x}\right\}\right]$$

$\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ par

$sen(-\beta x) = -sen(\beta x)$ ímpar

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1\left\{\cos(\beta x) + i\,sen(\beta x)\right\} + C_2\left\{\cos(\beta x) - i\,sen(\beta x)\right\}\right]$$

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(C_1+C_2)}\cos(\beta x) + \underbrace{i(C_1-C_2)}sen(\beta x)\right]$$

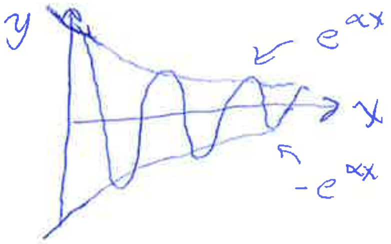
$C_1+C_2 = D_1$ $\qquad$ $i(C_1-C_2) = D_1$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[\underbrace{D_1\cos(\beta x) + D_2\,sen(\beta x)}_{\text{"parte oscilante"}}\right]}$$

Tipo III

D_1 e $D_2 \in \mathbb{C}$ complexos.

- Em aplicações físicas α é usualmente negativo, está relacionado com "atrito" e a exponencial $e^{\alpha x}$ é decrescente.



Exemplo: Resolva a eq. dif.

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0.$$

Sol.: Propomos uma solução do tipo e^{rx}

Fazemos as trocas $y'' \to r^2$ para encontrar

$$y' \to r$$
$$y \to 1$$

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$ Eq. Caraterística

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 13}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm \frac{\overset{6i}{\boxed{\sqrt{-36}}}}{2}$$

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i$$

$$\alpha = 2 \text{ e } \beta = 3$$

$$y_{gh}(x) = e^{\alpha x}\left[D_1 \cos(\beta x) + D_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

$$\boxed{\begin{gathered} y_{gh.}(x) = e^{2x}\left[D_1 \cos(3x) + D_2 \operatorname{sen}(3x)\right] \\ D_1 \text{ e } D_2 \in \mathbb{C} \end{gathered}}$$ ■

- Vamos verificar que $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ são L.I.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \mathrm{sen}(\beta x) \\ \alpha\cos(\beta x) - \beta\,\mathrm{sen}(\beta x) & \alpha\,\mathrm{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = e^{2\alpha x}\left[\cancel{\alpha\cos(\beta x)\mathrm{sen}(\beta x)} + \beta\cos^2(\beta x) \cancel{- \alpha\cos(\beta x)\mathrm{sen}(\beta x)} + \beta\,\mathrm{sen}^2(\beta x)\right]$$

$$W(x) = \beta\,\underbrace{e^{2\alpha x}}_{\text{nunca se anula}} \neq 0$$

$\downarrow$

no tipo III $\beta \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

$\rightarrow$ São L.I.

(Coeficientes Positivos)

Exercício: Dada uma eq. dif. linear de 2da ordem ,homogênea, com coeficientes constantes e positivos:

$$Ay''(x) + By'(x) + Cy(x) = 0$$

$$\boxed{A > 0\ ,\ B > 0 \text{ e } C > 0}$$

Mostre que toda solução satisfaz que

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x)] = 0.$$

Solução: Sabemos que qualquer solução é da forma $y_{g.h.}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da eq. e L.I. entre si. Temos três tipos.

- No tipo I: $B^2 > 4AC$, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\text{Como } \sqrt{B^2-\underbrace{4AC}_{\text{positivo}}} < \sqrt{B^2} = \underbrace{|B| = B}_{B \text{ é positivo}}$$

$$\sqrt{B^2-4AC} < B$$

então

$$-B+\sqrt{B^2-4AC} < 0 \quad \text{e} \quad -B-\sqrt{B^2-4AC} < 0$$

logo

$$r_1 < 0 \quad \text{e} \quad r_2 < 0$$

e $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$

são exponenciais decrescentes. Isto é

$$\lim_{x\to+\infty}[e^{r_1 x}] = \lim_{x\to+\infty}[e^{r_2 x}] = 0$$

Consequentemente $\lim_{x\to+\infty}[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = 0.$

- No tipo II : $B^2 = 4AC$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

onde $r = -\underset{\text{positivo}}{\boxed{\frac{B}{2A}}} < 0$, logo

Como $r<0$
$e^{rx} = e^{-|r|x}$
$= \frac{1}{e^{|r|x}}$

$\lim_{x\to+\infty}[e^{rx}] = 0$ e $\lim_{x\to+\infty}(x e^{rx}) = 0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^{|r|x}}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{|r|e^{|r|x}}\right) = 0$$

Consequentemente

$$\lim_{x\to+\infty}[y_{g.h.}(x)] = 0.$$

- No tipo III : $B^2 < 4AC$, $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$r_{1,2} = \underset{\alpha}{\boxed{\frac{-B}{2A}}} \pm i \underset{\beta}{\boxed{\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}}}$$

$4AC - B^2 > 0$

e

$\alpha < 0$ e $\beta > 0$

$$y_{g.h.}(x) = \underbrace{e^{\alpha x}}_{\downarrow} \underbrace{\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]}_{\text{limitado}}$$

exponencial decrescente. $\longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [e^{rx}] = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} [y_{g.h.}(x)] = 0.$$

Conclusão : Se os coeficientes são todos positivos então sempre $\lim\limits_{x \to +\infty} [y(x)] = 0$

↖ uma solução

Redução de Ordem II

Na discussão do tipo II fizemos a proposta

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$$

no caso $y_1(x) = e^{rx}$ com $r = -\frac{B}{2A}$.

Esse mesmo procedimento funciona sempre que conhecemos uma solução de uma eq. dif. linear e homogênea de 2^{da} ordem:

$$\boxed{A(x)}\, y''(x) + \boxed{B(x)}\, y'(x) + \boxed{C(x)}\, y(x) = 0$$

→ Os coef. não precisam ser constantes

Se $y_1(x)$ é uma solução então

$$A(x)\, y_1''(x) + B(x)\, y_1'(x) + C(x)\, y_1(x) = 0$$

Vamos procurar $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$. Derivando:

$$y_2'(x) = u'(x)\, y_1(x) + u(x)\, y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = u''(x)\, y_1(x) + \underbrace{u'(x)\, y_1'(x) + u'(x)\, y_1'(x)}_{2u'(x)\, y_1'(x)} + u(x)\, y_1''(x)$$

Colocando y_2, y_2' e y_2'' na eq. dif.

$$A(x)\left[u''(x)\, y_1(x) + 2u'(x)\, y_1'(x) + u(x)\, y_1''(x)\right] + B(x)\left[u'(x)\, y_1(x) + u(x)\, y_1'(x)\right] +$$

$$+\, C(x)\, u(x)\, y_1(x) = 0$$

Reagrupando por u'', u' e u

$$A(x)y_1(x)u''(x) + \left[2A(x)y_1'(x) + B(x)y_1(x)\right]u'(x) +$$

$$+ \underbrace{\left[A(x)y_1''(x) + B(x)y_1'(x) + C(x)y_1(x)\right]}_{=0 \qquad y_1(x) \text{ é solução}} u(x) = 0$$

$$\underbrace{A(x)y_1(x)}_{\text{conhecido}} u''(x) + \underbrace{\left[2A(x)y_1'(x) + B(x)y_1(x)\right]}_{\text{conhecido}} u'(x) = 0$$

$A(x)y_1(x) = f(x)$

$2A(x)y_1'(x) + B(x)y_1(x) = g(x)$

$$f(x)u''(x) + g(x)u'(x) = 0$$

É uma eq. dif. de 2^{da} ordem para $u(x)$ onde não aparece explicitamente $u(x)$. Isto é, $G(x, \cancel{u(x)}, u'(x), u''(x)) = 0$

Podemos mudar de variável

$$v(x) = u'(x)$$

$$v'(x) = u''(x)$$

$$\boxed{f(x)v'(x) + g(x)v(x) = 0} \leftarrow \text{Eq. Dif. de } 1^{ra} \text{ Ordem}$$

ou

$$f(x)\frac{dv}{dx} = -g(x)v \leftarrow \text{Separável}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{g(x)}{f(x)}dx \qquad f(x) \neq 0 \qquad v(x) \neq 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = h(x)$$

$$\ln|v| = -\int h(x)\,dx + C$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-\int h(x)dx}$$

$$v(x) = D\,e^{-\int h(x)dx}$$

Uma vez que $v(x)$ é conhecida retornamos a u.

$$v(x) = u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$u(x) = \int v(x)\,dx + C_2$$

E com isso encontramos $y_2(x) = u(x)\,y_1(x)$.

Exemplo: Verifique que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ é uma solução para a eq. dif. $2x^2y''(x) + 3xy'(x) - y(x) = 0$ com $x > 0$. Encontre uma segunda solução L.I. com a primeira.

<u>Sol.:</u> Derivando $y_2(x) = u(x)\,y_1(x)$

$$y_2(x) = u(x)\,\frac{1}{x}$$

$$y_2'(x) = u'(x)\,\frac{1}{x} - u(x)\,\frac{1}{x^2}$$

$$y_2''(x) = u''(x)\,\frac{1}{x} \underbrace{- u'(x)\,\frac{1}{x^2} - u'(x)\,\frac{1}{x^2}}_{-2u'(x)\frac{1}{x^2}} + 2u(x)\,\frac{1}{x^3}$$

Colocando y_2, y_2' e y_2'' na eq. dif.

$$2x^2y_2''(x) + 3xy_2'(x) - y_2(x) = 0$$

$$2x^2\left[u''(x)\frac{1}{x} - 2u'(x)\frac{1}{x^2} + 2u(x)\frac{1}{x^3}\right] + 3x\left[u'(x)\frac{1}{x} - u(x)\frac{1}{x^2}\right] -$$

$$- u(x)\overset{1/x}{\underline{y_1}}(x) = 0$$

Agrupando por u'', u' e u:

$$2xu''(x) + \left[-4+3\right]u'(x) + \underbrace{\left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x}\right]}_{0}u(x) = 0$$

como esperado.

$$2xu''(x) - u'(x) = 0$$

$$v(x) = u'(x)$$

$$v'(x) = u''(x)$$

$$\boxed{2xv'(x) = v(x)}$$

Eq. Dif. de 1ra ordem

$$2x\frac{dv}{dx} = v$$

← Usamos a separação de variáveis para resolver

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \qquad x > 0.$$

$$e^{\ln|v|} = De^{\frac{1}{2}\ln|x|} \qquad D = e^C$$

$$|v| = D\, e^{\ln(x^{1/2})} \qquad v > 0$$

$$\boxed{v(x) = D\, x^{1/2}}$$

voltando na variável original

$$v(x) = u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$u(x) = \int v(x)\, dx$$

$$u(x) = D \int x^{1/2}\, dx$$

$$u(x) = D \frac{x^{3/2}}{3/2} + D_2 \qquad D_1 = \frac{2D}{3}$$

$$u(x) = D_1\, x^{3/2} + D_2$$

Tomando $D_2 = 0$ e $D_1 = 1$

$$u(x) = x^{3/2}$$

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$$

$$y_2(x) = x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} = x^{1/2}$$

$$\boxed{y_2(x) = x^{1/2}}$$

Para saber se são L.I:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^{1/2} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{2x^{1/2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2x^{3/2}} + \left(-\frac{1}{x^{3/2}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\neq 0$$

$x \neq 0 \quad x > 0$

✓ L.I.

Redução de Ordem II: Exemplos

- Na discussão do tipo II fizemos a proposta

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

para encontrar a segunda solução fundamental.

Tinhamos $y_1(x) = e^{rx}$ com $r = \frac{-B}{2A}$

encontramos $u(x) = C_0 + C_1 x$ e escolhimos $C_0 = 0$ e $C_1 = 1$

de tal forma que $y_2(x) = xe^{rx}$. era L.I. com $y_1(x)$.

- A mesma ideia funciona quando a gente conhece uma solução de uma eq. dif. linear de 2da ordem.

Exemplo: Encontre uma segunda solução da eq. dif.

→ os coeficientes não são constantes

$$\boxed{x^2}\, y''(x) \boxed{-4x}\, y'(x) + 6y(x) = 0$$

com $x > 0$ e $\boxed{y_1(x) = x^2 \text{ é solução}}$.

Sol.: Vamos verificar que de fato $y_1(x) = x^2$ é uma solução da eq. dif. dada:

$y_1(x) = x^2$

$y_1'(x) = 2x$

$y_1''(x) = 2$

Substituindo em $x^2 y_1''(x) - 4x y_1'(x) + 6 y_1(x) \overset{?}{=} 0$

$x^2 \cdot 2 - 4x \cdot 2x + 6x^2 \overset{?}{=} 0$

✓ $2x^2 - 8x^2 + 6x^2 = 0$ OK, $y_1(x)$ é solução

Vamos procurar uma segunda solução do tipo

$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$, isto é

$y_2(x) = u(x)\, x^2$. Derivando

$y_2'(x) = u'(x)\, x^2 + 2u(x)\, x$

$y_2''(x) = u''(x)\, x^2 + \underbrace{2x\,u'(x) + 2u'(x)\,x}_{4} + 2u(x)$

Colocando na eq. dif.

$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

$\cancel{x^2}\left[u''(x)x^2 + 4x\,u'(x) + 2u(x)\right] - 4\cancel{x}\left[u'(x)x^{\cancel{2}} + 2u(x)\cancel{x}\right] + 6u(x)\cancel{x^2} = 0$

$x > 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

$x^2 u''(x) + \cancel{4x\,u'(x)} + \underline{2u(x)} - \cancel{4x\,u'(x)} \underline{- 8u(x)} + \underline{6\,u(x)} = 0$

$x^2 u''(x) = 0$

$x^2 \neq 0$

$u''(x) = 0$ já sabemos resolver

$u(x) = C_0 + C_1 \cdot x$

Se anulamos $C_1 \rightarrow y_2 = C\,y_1$ e não são L.I.

Tomamos $C_1 = 1$ e $C_0 = 0 \Longrightarrow u(x) = x$ e

$y_2(x) = x \cdot x^2 = x^3$

Podemos verificar que $y_2(x) = x^3$ é solução

$$\left.\begin{aligned} y_2(x) &= x^3 \\ y_2'(x) &= 3x^2 \\ y_2''(x) &= 6x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) \overset{?}{=} 0 \\ & x^2\cdot 6x - 4x\cdot 3x^2 + 6\cdot x^3 \overset{?}{=} 0 \\ & 6x^3 - 12x^3 + 6x^3 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Exemplo 2: $\underbrace{x}\,y''(x) - y'(x) + \underbrace{4x^3}\,y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

Os coeficientes não são constantes

Vamos verificar se $y_1(x)$ é de fato solução

$$\begin{cases} y_1(x) = \operatorname{sen}(x^2) \\ y_1'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x \\ y_1''(x) = -\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\cdot 2x + \cos(x^2)\cdot 2 \end{cases}$$

$$= -4x^2\operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(x^2)$$

$$x y_1''(x) - y_1'(x) + 4x^3 y_1(x) \overset{?}{=} 0$$

$$x\left[-4x^2\operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(x^2)\right] - 2x\cos(x^2) + 4x^3\operatorname{sen}(x^2) \overset{?}{=} 0$$

$$\underline{-4x^3\operatorname{sen}(x^2)} + \overline{2x\cos(x^2) - 2x\cos(x^2)} + \underline{4x^3\operatorname{sen}(x^2)} = 0 \quad \checkmark$$

OK, $y_1(x)$ é solução.

Vamos procurar a segunda solução na forma

$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$. Isto é,

$y_2(x) = u(x)\operatorname{sen}(x^2)$

Derivando

$$y_2(x) = u(x)\operatorname{sen}(x^2)$$

$$y_2'(x) = u'(x)\operatorname{sen}(x^2) + [2x\,u(x)]\cos(x^2)$$

$$y_2''(x) = u''(x)\operatorname{sen}(x^2) + 2x\,u'(x)\cos(x^2) + \cos(x^2)[2u(x) + 2x\,u'(x)]$$

$$- 2x\,u(x)\cdot 2x\operatorname{sen}(x^2)$$

Colocando na eq. dif.

$$x y_2''(x) - y_2'(x) + 4x^3 y_2 = 0$$

$$u''x\operatorname{sen}(x^2) + u'\,2x^2\cos(x^2) + \underbrace{2xu\cos(x^2)}_{} + 2x^2u'\cos(x^2) \cancel{-4x^3\operatorname{sen}(x^2)}$$

$$- u'(x)\operatorname{sen}(x^2) \underbrace{- 2xu\cos(x^2)}_{} + \cancel{4x^3 u}\operatorname{sen}(x^2) = 0$$

$$u''[x\operatorname{sen}(x^2)] + u'[4x^2\cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)] + u[0] = 0$$ ← Não aparece u $G(u'(x), u''(x)) = 0$

$$u'(x) = v(x)$$

$$u''(x) = v'(x) = \frac{dv}{dx}$$

$$x\operatorname{sen}(x^2)\frac{dv}{dx} + v[4x^2\cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)] = 0$$

$$x\operatorname{sen}(x^2)\frac{dv}{dx} = [\operatorname{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2)]\,v$$

$$\frac{dv}{v} = \left[\frac{\operatorname{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2)}{x\operatorname{sen}(x^2)}\right]dx$$

$$\frac{dv}{v} = \left[\frac{1}{x} - 4x\cot(x^2)\right]dx$$

$$\frac{1}{x} - 4x\cot(x^2) = f(x)$$

$$\frac{dv}{v} = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int f(x)\,dx$$

$$\ln|v| = \int f(x)\,dx + C.$$

$$v(x) = D\, e^{\int f(x)dx}$$

$$v = u'$$

$$\frac{du}{dx} = D\, e^{\int f(x)dx}$$

$$du = D\, e^{\int f(x)dx}\, dx$$

$$u(x) = D\int e^{\int f(x)dx}\, dx$$

Após as duas integrações encontramos $u(x)$ e depois $y_2(x)$. ▨

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x).$$

Eq. de Cauchy-Euler

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \quad , \quad x>0$$

- O exponente de x coincide com a ordem da derivação em todos os somandos:

$$x^2 y^{(2)}(x) \, , \quad x^1 y^{(1)}(x) \, , \quad x^0 y^{(0)}(x)$$

- Os coeficientes não são constantes. Porém, com a mudança de variáveis $t=\ln(x)$, $x>0$, podemos transformar essa eq. em outra com coeficientes constantes.

$$t(x)=\ln(x) \longrightarrow x(t)=e^t$$

$$y(x) \xrightarrow[\text{Composição}]{} y(x(t))$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) \leftarrow \text{Regra da Cadeia}$$

$$(I) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right]\frac{dt}{dx}\right]$$

Regra da Cadeia

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$(II)\quad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}}$$

Substituindo (I) e (II) na eq. de Cauchy-Euler

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

$$a\cancel{x^2}\left[-\frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{d^2y}{dt^2}\right] + b\cancel{x}\left[\frac{1}{\cancel{x}}\frac{dy}{dt}\right] + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = 0$$

ou

$$\underbrace{a}\,y''(t) + \underbrace{(b-a)}\,y'(t) + \underbrace{c}\,y(t) = 0$$

Coeficientes Constantes.

→ Solução: $y(t)$

Depois de encontrar $y(t)$ retornamos a x.

- No tipo I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$.

$$y_{g.h.}(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$t = \ln(x)$$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{r_1 \ln(x)} + C_2 e^{r_2 \ln(x)}$$

$$\log(x^r) = r \log(x)$$ ← propriedade dos logaritmos

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{\ln(x^{r_1})} + C_2 e^{\ln(x^{r_2})}$$

$$\boxed{y_{g.h}(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

$x > 0$

- No tipo II: $r_1 = r_2 = r$

$$y_{g.h.}(t) = C_1 e^{rt} + C_2 \cdot t \cdot e^{rt}$$

$$t = \ln(x)$$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = C_1 x^r + C_2 \ln(x) x^r}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

$x > 0$

- No tipo III: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y_{g.h.}(t) = e^{\alpha t}\left[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right]$$

$$t = \ln(x)$$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\right]}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{C}$, $x > 0$.

Exemplo: Resolva $x^2y''(x) + xy'(x) + 1y(x) = 0$

Um caminho alternativo mais rápido é propor que existe uma solução do tipo $y(x) = x^r$, com $x > 0$.

$$y(x) = x^r$$
$$y'(x) = rx^{r-1}$$
$$y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

Colocando de volta na eq. dif.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + 1\cdot y(x) = 0$$

$$x^2[r(r-1)x^{r-2}] + x[rx^{r-1}] + x^r = 0$$

$$x^2x^{r-2} = x^r \qquad x\cdot x^{r-1} = x^r$$

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = 0$$

Como $x > 0 \Rightarrow x^r \neq 0$

$r(r-1) + r + 1 = 0$ ← Eq. Característica

$$r^2 + 1 = 0$$

$r^2 = -1 = i^2$ ← Tipo III

$$r = \alpha \pm i\beta$$
$$\alpha = 0 \text{ e } \beta = 1$$

$$y_{g.h.}(x) = x^\alpha[C_1\cos(\beta\ln(x)) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta\ln(x))]$$

$$y_{g.h.}(x) = \overset{1}{\boxed{x^0}}[C_1\cos(1\cdot\ln(x)) + C_2\,\mathrm{sen}(1\cdot\ln(x))]$$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = C_1\cos(\ln(x)) + C_2\,\mathrm{sen}(\ln(x))}$$

Problema de Valor Inicial (PVI)

$A(x) \neq 0$

Supor que $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são contínuas em I. $x_0 \in I$

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0 \,,$$

A solução geral é uma combinação linear de duas soluções L.I

$$y_{g.h.}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \,, \quad x \in I \leftarrow \text{Intervalo Aberto onde existe a solução}$$

$x_0 \in I \leftarrow x_0$ é um ponto de I.

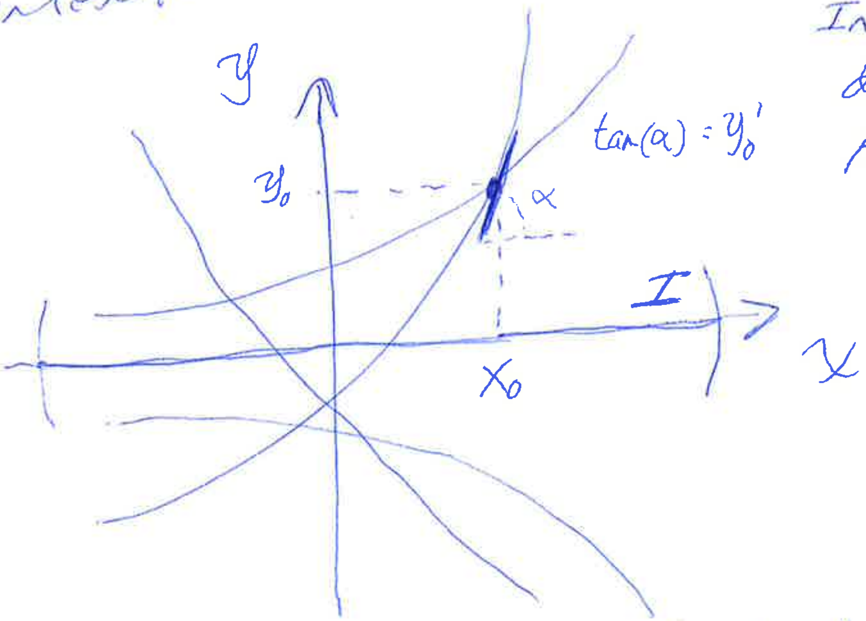
onde C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias. Para determinar essas constante podemos adicionar duas restrições do tipo "Condição Inicial".

Restrições do tipo Condição Inicial

$$\begin{cases} y(x_0) = \boxed{y_0} \\ y'(x_0) = \boxed{y'_0} \end{cases} \rightarrow \text{valores Conhecidos} \qquad x_0 \in I$$

Em Física: $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = v(t_0) = v_0 \leftarrow$ posição e velocidade inicial

Graficamente



Infinitas Soluções da Eq. Dif. Homogênea.

O problema de Valor Inicial terá uma única solução.

Analiticamente

$y_{g.h}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $x \in I$ ← Intervalo Aberto onde Existe Solução.

Usando a primeira restrição : $y(x_0) = y_0$

$$y(x_0) = \boxed{y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0)} \text{ (I).}$$

Antes de usar a segunda restrição temos que derivar $y_{g.h.}(x)$

$$y'_{g.h.}(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

Usando a segunda restrição : $y'(x_0) = y_0'$

$$y'(x_0) = \boxed{y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0)} \text{ (II)}$$

Reescrevendo as duas eq. (I e II)

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'$$

$(y_0, y_0', y_1(x_0), y_2(x_0), y_1'(x_0), y_2'(x_0))$

↑ Conhecido

C_1 e C_2 são as variáveis desconhecidas

Podemos escrever o sistema de eq. lineares anteriores como

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

Se o determinante for diferente de zero existe a matriz inversa e a solução para C_1 e C_2 existe e é única.

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

Se $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{y}}$$

A solução existe e é única.

O determinante em questão não é mais que o Wronskiano avaliado no ponto $x = x_0$.

$$|A| = W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

Como as soluções são L.I.

$W(x_0) \neq 0$ $\quad x_0 \in I \leftarrow$ Intervalo aberto onde existe solução.

Será provado posteriormente que se $W(x)$ é diferente de zero em algum ponto do intervalo aberto onde existem soluções da eq. homogênea então $W(x)$ será diferente de zero para todo o mesmo intervalo (FÓRMULA DE ABEL)

Conclusão: O problema de valor inicial sempre terá solução e a solução é única.

Premisas: $A(x), B(x), C(x) \rightarrow$ contínuas em I, $x_0 \in I$.

Teorema de Existência e Unicidade da Solução em um problema de valor inicial (PVI)

O problema de valor inicial

$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$

em que $A(x) \neq 0$ e $A(x), B(x), C(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto x_0.

$\Downarrow$ então

Existe exatamente UMA solução e a solução existe em todo o intervalo I.

A demostração deste teorema é razoavelmente difícil e não será discutida aqui.

Exemplo de Problema de Valor Inicial ①

- Resolva o problema de condição inicial $y''(x) - 4y(x) = 0$,

$\underbrace{y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0}_{\text{restrições}}$, do tipo condição inicial

- Começamos resolvendo a eq. dif.

$$y''(x) - 4y(x) = 0$$

Trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$$r^2 - 4 = 0 \leftarrow \text{Eq. Carateristica}$$

$$r^2 = 4$$

$$r_1 = -2 \quad r_2 = 2 \quad (\text{Tipo I}) \quad r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_{g.h.}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$$

Vamos usar a primeira restrição : $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 = C_1 \underbrace{e^{-2\cdot 0}}_{1} + C_2 \underbrace{e^{2\cdot 0}}_{1}$$

$$\boxed{C_1 + C_2 = 1} \quad (\text{I})$$

Para usar a segunda restrição temos que derivar $y_{g.h.}(x)$:

$$y'_{g.h.}(x) = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$$

$$y'(0) = 0 = -2C_1 \underbrace{e^{-2\cdot 0}}_{1} + 2C_2 \overbrace{e^{2\cdot 0}}^{1}$$

$-2C_1 + 2C_2 = 0$ ou

$\boxed{C_2 - C_1 = 0}$ (II).

Encontramos um sistema de duas eq. lineares com duas incognitas: C_1 e C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 & (I) \\ -C_1 + C_2 = 0 & (II) \end{cases} \longrightarrow \boxed{C_2 = C_1 = 1/2}$$

$+$

$$2C_2 = 1$$

$$C_2 = 1/2$$

Logo, a solução do $\underbrace{\text{problema de valor inicial}}_{\text{p.v.i.}}$ é (única):

$$\boxed{\underset{\text{p.v.i.}}{y(x)} = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}}$$

~~$y_{g.h.}$~~ ← errado
não é geral da
eq. homogênea
(infinitas)

Neste problema existe um segundo método mais rápido.

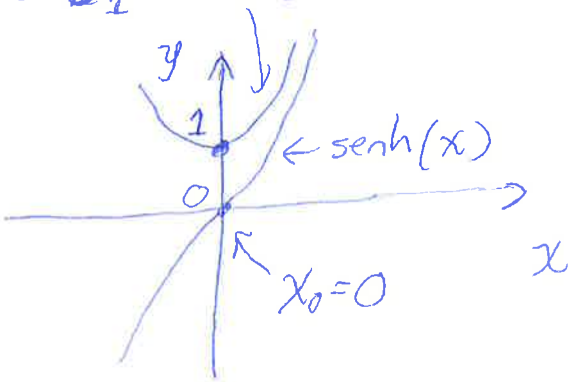
1) Note que a solução da eq. homogênea era do tipo: $y_{gh.}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx}$ com o mesmo r em módulo. No caso r=2.

2) As condições iniciais eram em $x_0=0$.

Isto é, do tipo $y(0)=a$ e $y'(0)=b$, a e b $\in \mathbb{R}$.

- Quando são satisfeitas estas duas restrições é mais rápido propor como vetores da base de soluções as funções seno e cosseno hiperbólicas

$$y_{gh}(x) = D_1 \cosh(2x) + D_2 \operatorname{senh}(2x)$$



Usando a primeira restrição: $y(0)=1$

$$y(0)=1=D_1\underbrace{\cosh(2\cdot 0)}_{1}+D_2\underbrace{\operatorname{senh}(2\cdot 0)}_{0}$$

$$\boxed{D_1=1}$$

Derivando $y_{gh}(x)$:

$$y'_{gh}(x)=2D_1\operatorname{senh}(2x)+2D_2\cosh(2x)$$

Usando a segunda restrição: $y'(0)=0$

$$y'(0)=0=2D_1\underbrace{\operatorname{senh}(2\cdot 0)}_{0}+2D_2\underbrace{\cosh(2\cdot 0)}_{1}$$

$$2D_2=0$$

$$\boxed{D_2=0}$$

④

Logo $\boxed{y_{p.v.i}(x) = \cosh(2x)}$

Note que a solução é a mesma que a encontrada pelo primeiro método.

Exemplo PVI-2

- Resolva o problema de valor inicial

$$y''(x)+4y(x)=0\ ,\ \underbrace{y(\pi/3)=1\ ,\ y'(\pi/3)=0.}_{\text{restrições tipo condição inicial}}$$

- Resolvemos primeiro a eq. dif.

$$y''(x)+4y(x)=0$$

Trocamos $y'' \rightarrow r^2$

$y' \rightarrow r$

$y \rightarrow 1$

$$r^2+4=0$$

$$r^2=-4=4i^2$$

$$r_{1,2}=0\pm 2i=\alpha\pm\beta i \quad (\text{Tipo III})$$

$$\alpha=0 \quad \beta=2$$

$$y_{g.h.}(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x)+C_2\operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

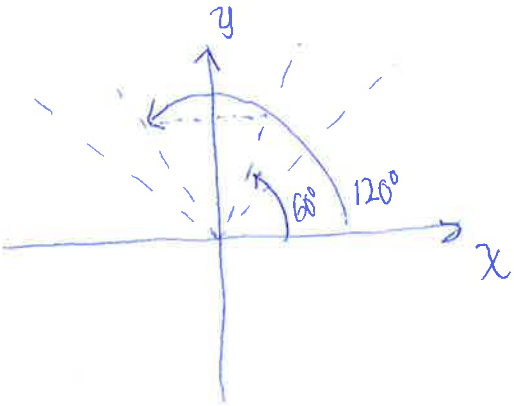
$$y_{g.h.}(x)=\overset{1}{\boxed{e^{0\cdot x}}}\left[C_1\cos(2x)+C_2\operatorname{sen}(2x)\right]$$

$$\boxed{y_{gh}(x)=C_1\cos(2x)+C_2\operatorname{sen}(2x)}$$

Usando a primeira restrição: $y(\pi/3)=1$

$$y(\pi/3)=1=C_1\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)+C_2\operatorname{sen}(2\pi/3)$$

$$\frac{\pi}{3}=60^\circ \qquad \frac{2\pi}{3}=120^\circ$$



$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{1 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2} \quad (I)$$

Derivando $y_{gh}(x)$:

$y'_{gh}(x) = -2C_1\,\text{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x)$

Usando a segunda restrição: $y'(\pi/3) = 0$

$$y'(\pi/3) = 0 = -2C_1\,\text{sen}(2\,\pi/3) + 2C_2\cos(2\cdot\pi/3)$$

$$0 = -\cancel{2}C_1\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \cancel{2}C_2\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$\boxed{C_1\cdot\sqrt{3} + C_2 = 0} \quad (II)$$

Temos um sistema

$$③\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 1 & (I) \\ \sqrt{3}\,C_1 + C_2 = 0 & (II) \xrightarrow{①} C_2 = -\sqrt{3}\,C_1 \end{array}\right.$$

②

$$-\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})C_1 = 1$$

$$-\frac{C_1}{\cancel{2}}\left[+1 + 3\right]^{2\,\cancel{4}} = 1 \longrightarrow \boxed{C_1 = -\frac{1}{2}}$$

④ ⑤

$$\boxed{C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Caso $\boxed{y_{p.v.i}(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(2x)}$

- Existe uma solução alternativa no caso em que o problema de valor inicial não é em $x_0 = 0$.

Neste problema era em $x_0 = \pi/3$.

- A solução geral da eq. homogênea era

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

Mude para

$$y_{gh}(x) = D_1 \cos(2[x-\pi/3]) + D_2 \operatorname{sen}(2[x-\pi/3])$$

As constantes agora serão diferentes, mas as novas funções continuam sendo soluções L.I. da eq. homogênea.

Verifique!

Usamos a primeira restrição: $y(\pi/3) = 1$

$$y(\pi/3) = 1 = D_1 \underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{1} + D_2 \underbrace{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}_{0}$$

$$\boxed{D_1 = 1}$$

Derivamos para encontrar $y'_{gh}(x)$:

$$y'_{gh}(x) = -2D_1 \operatorname{sen}(2[x-\pi/3]) + 2D_2 \cos(2[x-\pi/3])$$

Usando a segunda restrição: $y'(\pi/3) = 0$

$$y'(\pi/3) = 0 = -2D_1 \underbrace{sen(0)}_{0} + 2D_2 \underbrace{cos(0)}_{1}$$

$$0 = 2D_2$$

$$\boxed{D_2 = 0}$$

Logo. $\boxed{y_{p.v.i}(x) = cos(2[x - \pi/3])}$

Use a identidade do cosseno da soma de dois ângulos para verificar que os resultados são idênticos.

$$cos(\theta + \beta) = cos(\theta)\,cos(\beta) - sen(\theta)\,sen(\beta)$$

Problema de Valor de Contorno (PVC)
ou Problema de Fronteira

$$A(x)\,y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

$A(x) \neq 0$, $A(x), B(x), C(x)$ são contínuas em um intervalo aberto I.

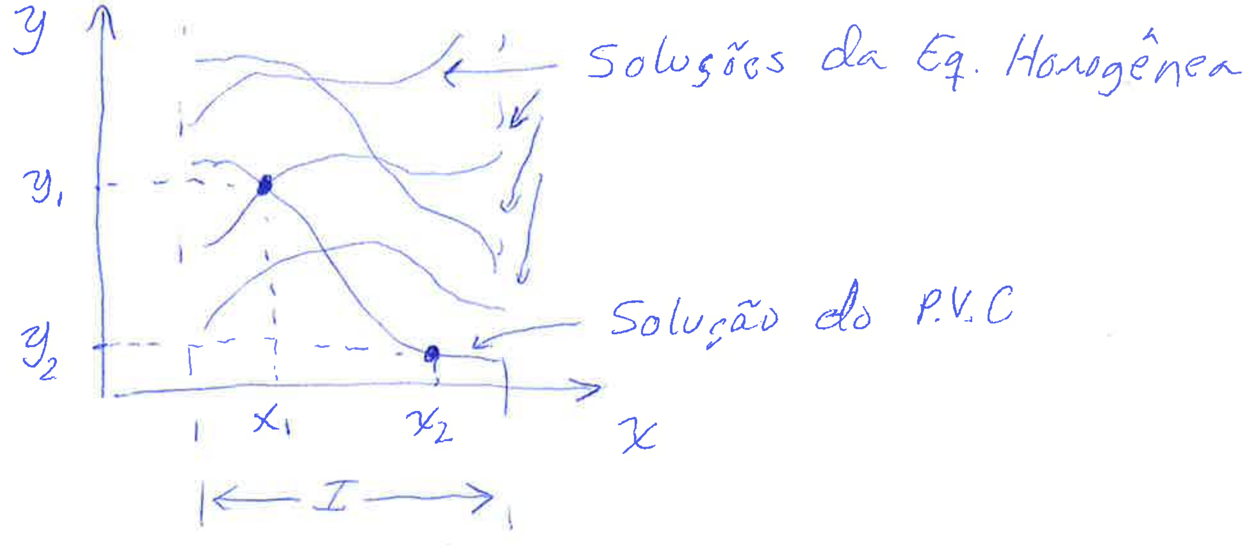
$$y_{g.h.}(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções $\overset{L.I.}{\text{em}}$ I para a eq. dif.

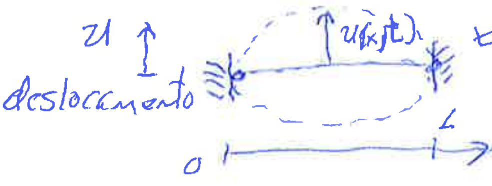
Para tentar determinar C_1 e C_2 podem ser impostas restrições do tipo

$$\text{condições de contorno}\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

Graficamente



Em Física essas restrições são comuns quando se estudam as oscilações de uma corda (por exemplo).



Extremos Fixos

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t > 0.$

- Contrário a um problema de valor inicial onde sempre existe solução e é única, para um problema de fronteira a solução pode não existir, podem existir infinitas soluções ou existir uma única solução. Estudaremos exemplos de cada caso.

- Existem outros pares de restrições possíveis para uma eq. dif. de 2da ordem

$y'(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2$

$y(x_1) = y_1 \qquad y'(x_2) = y_2$

} Derivada em um ponto Valor da função sem derivar em outro

$y'(x_1) = y_1 \qquad y'(x_2) = y_2$ → Derivada nos dois pontos.

- Em geral as restrições podem ser escritas como

$$\alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = \gamma_2$$

- Lembrando, em um problema de valor inicial as restrições são em um único ponto do espaço

$$y(x_1) = y_1 \quad e \quad y'(x_1) = y_1'$$

Exemplos de PVC

1) Resolva a eq. dif $y''(x)+16y(x)=0$.

Trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2+16=0$ ← Eq. Caraterística

$r_{1,2}^2=-16=16i^2=$

$r_{1,2}=\pm 4i = 0 \pm 4i$ ↗ $\alpha=0$, $\beta=4$

$= \alpha \pm \beta i$

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x)+C_2 sen(\beta x)\right]$$

$$= \overset{1}{\boxed{e^{0x}}}\left[C_1\cos(4x)+C_2 sen(4x)\right]$$

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = C_1\cos(4x)+C_2 sen(4x)}$$ C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

← infinitas soluções

2) Determine a solução da eq. anterior que satisfaz as condições de contorno $\underbrace{\boxed{y(0)=0} \text{ e } \boxed{y(\pi/2)=0}}_{\text{restrições}}$, $\underbrace{y''(x)+16y(x)=0}_{\text{Eq. Dif.}}$.

- Usando a primeira restrição: $y(0)=0$

$$y(0)=0=C_1\underbrace{\cos(4\cdot 0)}_{1}+C_2\underbrace{sen(4\cdot 0)}_{0}$$

$$\boxed{C_1=0}$$

- Usando a segunda restrição: $y(\pi/2)=0$

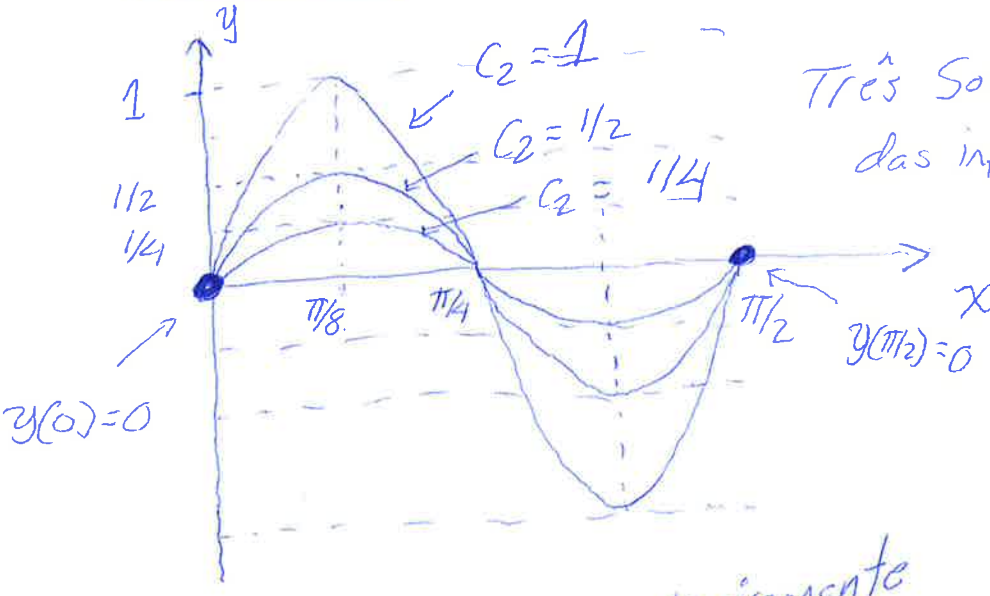
$$y(\pi/2)=0=C_1\cos(4\cdot\tfrac{\pi}{2})+C_2\, sen(4\cdot\pi/2)$$

$$0 = C_1 \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + C_2 \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{0}$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

As duas restrições levam a mesma conclusão $C_1=0$, mas nada é determinado sobre C_2. Isso significa que C_2 pode assumir qualquer valor e existirão infinitas soluções:

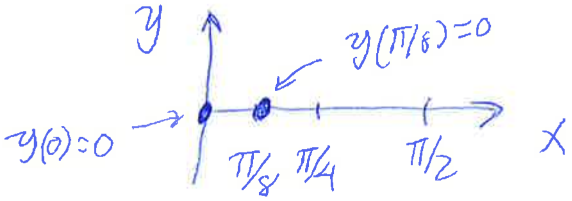
$$\boxed{y_{p.v.c}(x) = C_2 \text{ sen}(4x)}$$



Três Soluções Possíveis das infinitas existentes

3) Vamos modificar ligeiramente as condições de contorno da mesma eq. dif.

$$\underbrace{\underbrace{y''(x) + 16\,y(x) = 0}_{\text{Eq.}}, \quad \underset{\text{Restrição 1}}{y(0) = 0}}_{\text{igual}}, \quad \underset{\text{modificou}}{\boxed{\underset{\text{Restrição 2}}{y(\pi/8) = 0}}}$$



- Da primeira restrição sabemos que $\boxed{C_1 = 0}$
- Usando a segunda restrição : $y(\pi/8) = 0$

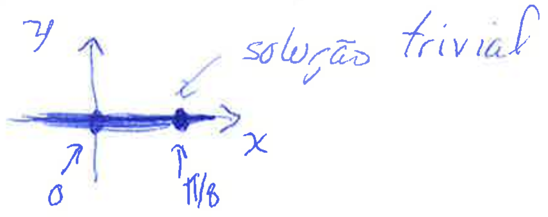
$$y(\pi/8) = 0 = \overset{0}{\cancel{C_1 \cos(4 \cdot \pi/8)}} + C_2 \,\text{sen}\,(4 \cdot \pi/8)$$

$$0 = C_2 \underbrace{\text{sen}\,(\pi/2)}_{1}$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Logo, neste caso existe exatamente UMA solução: quando $C_1 = C_2 = 0$ (chamada solução trivial)

$$\boxed{y_{p.v.c}(x) = 0} \quad \forall x$$



4) Vamos novamente modificar uma das condições de contorno:

$$\underbrace{\underbrace{y''(x) + 16\,y(x) = 0}_{\text{Eq. Dif.}} \;,\; \underset{\text{Rest. 1}}{y(0) = 0}}_{\text{igual}} \;,\; \underbrace{\underset{\text{Rest. 2}}{y(\pi/2) = 1}}_{\text{modificou}}$$

- $y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \,\text{sen}\,(4x)$
- Da primeira restrição $C_1 = 0$
- Da segunda restrição : $y(\pi/2) = 1$

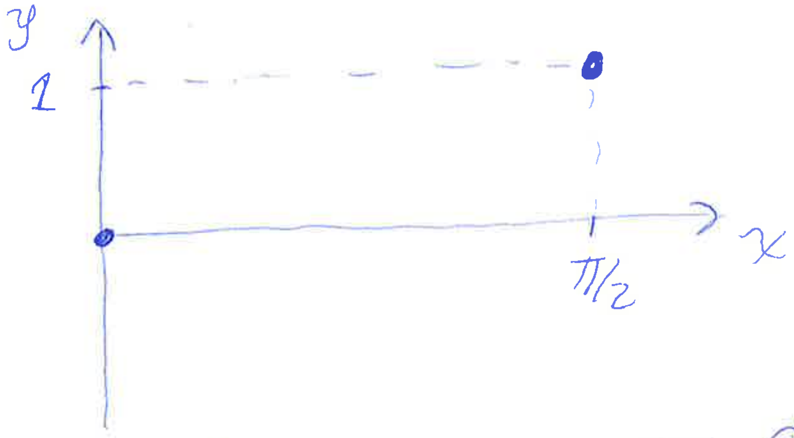
$$y(\pi/2) = 1 = 0 + C_2 \,\text{sen}\,(4 \cdot \tfrac{\pi}{2})$$

$$1 = C_2 \underbrace{\text{sen}\,(2\pi)}_{0}$$

$$1 \neq 0$$

④

Logo, neste caso não existe nenhuma solução.



Não existe nenhuma curva do tipo $y_{gh}(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \operatorname{sen}(4x)$ que passe pelos dois pontos indicados no gráfico

Teorema de Abel

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da eq. diferencial

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

em que p e q são contínuas em um intervalo aberto I, $\boxed{\text{então}}$ o Wronskiana $W(x)$ é dado por

$$W(x)=Ee^{-\int p(x)dx}$$

em que E é uma certa constante que não depende de x. Além disso, $W(x)$ ou é nulo para todo x em I (se $E=0$) ou nunca se anula em I (se $E\neq 0$).

Prova

: Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções

$$\left.\begin{array}{l} y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=0 \\ y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)=0 \end{array}\right\}$$

$\cdot[-y_2(x)]$

$\cdot[y_1(x)]$

$$\left.\begin{array}{l} -y_1''(x)y_2(x)-p(x)y_1'(x)y_2(x)\cancel{-q(x)y_1(x)y_2(x)}=0 \\ y_2''(x)y_1(x)+p(x)y_2'(x)y_1(x)\cancel{+q(x)y_2(x)y_1(x)}=0 \end{array}\right\}$$

$+$

$$\underbrace{(y_1y_2''-y_1''y_2)}_{W'(x)}+p(x)\underbrace{[y_1y_2'-y_1'y_2]}_{W(x)}=0 \qquad (I)$$

veremos que

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \checkmark$$

pela definição

Quem é $\frac{dW(x)}{dx}$?

$$W'(x) = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - (y_1''y_2 + \cancel{y_1'y_2'})$$

$$W'(x) = y_1y_2'' - y_1''y_2 \checkmark$$

Com isso podemos re-escrever (I) como

$$\frac{dW(x)}{dx} + p(x)W(x) = 0$$ ← É uma eq. dif. de 1ª ordem para W(x).

Podemos resolver por separação de variáveis

$$\frac{dW}{dx} = -p(x)W$$

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|W| = -\int p(x)dx + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$e^{\ln|W|} = e^{-\int p(x)dx + C} = e^{-\int p(x)dx} \cdot \overset{D}{\boxed{e^{C}}} \quad (D \in \mathbb{R})$$

$$|W| = De^{-\int p(x)dx}. \quad E = \pm D \quad (E \in \mathbb{R})$$

o sinal pode ser colocado na constante

$$\boxed{W(x) = Ee^{-\int p(x)dx}}$$

- Como uma exponêncial nunca se anula a única possibilidade para $W(x)$ ser zero é que a constante Ⓒ seja zero e nesse caso W é zero para todo x no intervalo I.

- Se a constante é diferente de zero $C \neq 0$ então $W(x)$ será diferente de zero para todo x no intervalo I (onde existem as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da eq. homogênea).

- Note que a exponencial $e^{-\int p(x)dx}$ somente depende de $p(x)$. Isto é, dados dois conjuntos diferentes de soluções fundamentais os Wronskianos respectivos somente diferem em uma constante.

Ex. Estudamos anteriormente a eq. dif.

$$\underbrace{y''(x) - 4y(x) = 0}$$

comparando com

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

temos que $p(x) = 0$
$q(x) = 4.$

Note que usando a fórmula de Abel

$$W(x) = C\, e^{-\int p(x)dx}$$
$$= C\, e^{-\int 0 dx} = C \boxed{e^0}^{1}$$

$W(x) = C \leftarrow$ constante.

Na resolução do exercícios escrevemos que

$$y_{gh}(x) = C_1 \underset{y_1(x)}{\boxed{e^{-2x}}} + C_2 \underset{y_2(x)}{\boxed{e^{2x}}}$$

ou

$$y_{gh}(x) = D_1 \underset{y_3(x)}{\boxed{\cosh(x)}} + D_2 \underset{y_4(x)}{\boxed{\operatorname{senh}(x)}}$$

Note que

$$W(y_1 \, e \, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 4\underbrace{e^{-2x}e^{2x}}_{\underline{1}} = 4$$

e

$$W(y_3 \, e \, y_4)(x) = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \operatorname{senh}(x) \\ \operatorname{senh}(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \underline{1}$$

Os Wronskianos são ambos constantes para todo x. Diferem apenas nessa constante. Mas como a constante é diferente de zero os dois conjuntos de soluções são válidos.

Eq. não homogênea

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x).$$

$A(x) \neq 0$, $A(x), B(x), C(x)$ e $D(x)$ sejam contínuas em algum intervalo aberto I.

Lembrando que podemos escrever a mesma eq. usando o operador linear L_2.

$$L_2[y(x)] = D(x).$$

Vamos supor que seja conhecida uma solução particula para a eq. não homogênea $\{y_p(x)\}$. Isto é:

$$L_2[y_p(x)] = D(x)$$

Então, a solução geral para a eq. não homogênea será:

$$y_{g.n.h.}(x) = \underset{\text{correspondente}}{y_{g.h.}(x)} + y_p(x).$$

A eq. homogênea correspondente é

$$L_2[y(x)] = 0$$

e sua solução $y_{g.h}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções L.I. da homogênea correspondente

Pela linealidade do operador diferencial

$$L_2[y_{g.n.h}(x)] = L_2[y_{g.h}(x) + y_p(x)] = \underbrace{L_2[y_{g.h}(x)]}_{0} + \underbrace{L_2[y_p(x)]}_{D(x)}$$

$$L_2[y_{g.n.h.}(x)] = D(x)$$

Isto é, $y_{g.n.h.}(x)$ satisfaz a eq. não homogênea.

Vários autores denotam $y_{g.h}(x) = y_c(x)$ solução complementar

e a solução geral da não homogênea simplesmente como $y(x)$. Com isso

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

- Logo, para resolver a eq. não homogênea precisamos encontrar uma solução particular: $y_p(x)$.
- Vamos ~~encon~~ estudar dois métodos para encontrar $y_p(x)$.

① Método dos Coeficientes Indeterminados ou a serem determinados.

② Método da Variação dos Parâmetros.

- O primeiro método é mais simples, porém limitado. O segundo método é válido sempre, porém mais complicado.

Método dos Coeficientes Indeterminados - 1

Termo não homogêneo: Polinômio

Exemplo:

Resolva a eq. dif. não homogênea

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = x^2 .$$

Sol.: Primeiro resolvemos a eq. homogênea correspondente

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

Trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 + 3r + 2 = 0$ ← Eq. Característica

$$r = \frac{-3 \pm \overset{1}{\boxed{\sqrt{9-8}}}}{2}$$

$r_1 = -2$ e $r_2 = -1$ (Tipo I)

$$\boxed{y_{g.h.}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}$$

- Agora vamos procurar uma solução particular da eq. não homogênea de partida. ($y_p(x)$).

- Como o termo não homogêneo é um polinômio de grau 2 vamos propor que exista uma solução particular da mesma forma.

$y_p(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2$ (Polinômio de Grau 2)

D_0, D_1 e D_2 são os coeficientes a serem determinados

$$\begin{cases} y_p(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 \\ y_p'(x) = D_1 + 2D_2 x \\ y_p''(x) = 2D_2 \end{cases}$$

Estamos assumindo que $y_p(x)$ é solução

$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = x^2$ ← Eq. não homogênea de partida.

$2D_2 + 3[D_1 + 2D_2 x] + 2[D_0 + D_1 x + D_2 x^2] = x^2$

↑

Igualdade de Polinômios

Queremos encontrar D_0, D_1 e D_2 de tal forma que a eq. seja verdadeira para todo x.

$(2D_2)x^2 + (6D_2 + 2D_1)x + (2D_2 + 3D_1 + 2D_0)\cdot x^0 = 1\cdot x^2 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^0$

$$\begin{cases} 2D_2 = 1 & (I) \\ 6D_2 + 2D_1 = 0 & (II) \\ 2D_2 + 3D_1 + 2D_0 = 0 & (III) \end{cases}$$

De (I) $\boxed{D_2 = 1/2}$

Colocando D_2 em (II)

$6 \cdot \frac{1}{2} = -2D_1 \longrightarrow \boxed{D_1 = -\frac{3}{2}}$

Colocando D_1 e D_2 em (III).

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(-\frac{3}{2}\right) = -2D_0$$

$$1 - \frac{9}{2} = -2D_0$$

$1 = \frac{2}{2}$

$$-\frac{7}{2} = -2D_0$$

$$\boxed{D_0 = \frac{7}{4}}$$

$$y_p(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}$$

$$y_{g.n.h}(x) = y_{g.h}(x) + y_p(x).$$

geral da eq. não homogênea

correspondente homogênea

particular da não homogênea

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}$$

infinitas soluções, C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Coeficientes Indeterminados - 2
Termo não homogêneo : Exponencial

Exemplo : Resolva a eq. dif. $y''+9y=e^{3x}$.

Sol.: Escrevemos a eq. homogênea correspondente

$$y''+9y=0$$

Trocamos $y''\to r^2$

$y'\to r$

$y\to 1$

$$r^2+9=0$$

$$r^2=-9=9i^2 \quad (\text{Tipo III})$$

$$r_{1,2}=\pm 3i=\alpha\pm\beta i$$

$$\alpha=0 \text{ e } \beta=3$$

$$\boxed{y_{gh}(x)=C_1\cos(3x)+C_2\,\text{sen}(3x)}$$

Como o termo não homogêneo é uma função do tipo exponencial vamos propor que exista uma solução particular da eq. não homogênea do tipo exponencial

coeficiente indeterminado

$$y_p(x)=Ae^{3x}$$

igual ao termo não homogêneo da eq. de partida.

$$y_p'(x)=3Ae^{3x}$$

$$y_p''(x)=9Ae^{3x}$$

②

$$y'' + 9y = e^{3x}$$

$$9Ae^{3x} + 9[Ae^{3x}] = e^{3x}$$

$$18A[e^{3x}] = 1[e^{3x}] \qquad e^{3x} \neq 0$$

$$18A = 1$$

$$A = 1/18$$

$$y_p(x) = Ae^{3x}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{18} e^{3x}}$$

$$y_{g.n.h.}(x) = y_{g.h.}(x) + y_p(x)$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{18} e^{3x}}$$

Coeficientes Indeterminados - 3

Se é solução da homogênea não pode ser solução da não homogênea - I

Exemplo: Resolva a eq. dif. $y''-9y=e^{3x}$.

Sol.: Escrevemos a homogênea correspondente

$$y''-9y=0$$

Trocamos $y''\to r^2$

$y'\to r$

$y\to 1$

$$r^2-9=0$$

$$r^2=9$$

$r_1=-3$ e $r_2=+3$ (Tipo I)

$$\boxed{y_{g.h.}(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}}$$

A proposta de solução

$y_p(x)=Ae^{3x}$ não funciona.

Note que e^{3x} é uma das soluções fundamentais da eq. homogênea. Se uma função é solução da eq. homogênea não pode ser solução da eq. não homogênea

$L_2[y(x)]=0$

$L_2[y_p(x)]=e^{3x}$

Vamos insistir no caminho errado

$$y_p(x) = Ae^{3x}$$

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x}$$

$$y_p''(x) = 9Ae^{3x}$$

Colocamos em $y'' - 9y = e^{3x}$

$$9Ae^{3x} - 9[Ae^{3x}] = e^{3x}$$

$0 = e^{3x}$ ← Falso (Absurdo)

Não consigo determinar A

- Nesta situação multiplicamos a proposta original pela menor potência de x possível.

- ~~$y_p(x) = Ae^{3x}$~~ não funciona

$$y_p(x) = Axe^{3x}$$

$$y_p'(x) = A[e^{3x} + 3xe^{3x}]$$

$$= Ae^{3x}[1 + 3x]$$

$$y_p''(x) = 3Ae^{3x}[1 + 3x] + Ae^{3x} \cdot 3$$

$$= 3Ae^{3x}[2 + 3x]$$

Colocando y_p, y_p' e y_p'' na eq. de partida

$$y'' - 9y = e^{3x}$$

③

$$3Ae^{3x}[2+3x]-9Axe^{3x}=e^{3x}$$

Como $e^{3x}\neq 0$

$$3A[2+3x]-9Ax=1$$

$$6A+9Ax-9Ax=1$$

$$6A=1$$

$$A=1/6$$

Logo $y_p(x)=Axe^{3x}$

$$\boxed{y_p(x)=\frac{1}{6}xe^{3x}}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}xe^{3x}}$$

Coeficientes Indeterminados - 4
Se é solução da homogênea não pode ser solução da não homogênea - II

Exemplo: Resolva a eq. dif. $y''-6y'+9y=e^{3x}$.

Sol.: Escrevemos a homogênea correspondente

$$y''-6y'+9y=0$$

Trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$$r^2-6r+9=0 \quad \text{Eq. Caraterística}$$

$$(r-3)^2=0 \quad (\text{Tipo II})$$

$$r_1=r_2=\boxed{r=3}$$

$$\boxed{y_{gh}(x)=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}}$$

Propostas de Solução Particular

- $\cancel{y_p(x)=Ae^{3x}}$ não funciona, e^{3x} é solução da eq. homogênea
- $\cancel{y_p(x)=Axe^{3x}}$ não funciona, xe^{3x} é solução da eq. homogênea
- $y_p(x)=Ax^2e^{3x}$

$$y_p(x) = Ax^2e^{3x}$$

$$y_p'(x) = A[2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}]$$

$$= Axe^{3x}[2+3x]$$

$$y_p''(x) = A\{\underbrace{[e^{3x} + 3xe^{3x}]}_{e^{3x}(1+3x)}[2+3x] + xe^{3x}\cdot 3\}$$

$$= Ae^{3x}[\underbrace{(1+3x)(2+3x)}_{2+3x+6x+9x^2} + 3x]$$

$$= Ae^{3x}(9x^2+12x+2)$$

Colocando na eq. não homogênea

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$$

$$A\cancel{e^{3x}}(9x^2+12x+2) - 6Ax\cancel{e^{3x}}(2+3x) + 9Ax^2\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}$$

$$e^{3x} \neq 0.$$

$$A[\underbrace{18x^2 - 18x^2}_{0} + \underbrace{12x - 12x}_{0} + 2] = 1$$

$$2A = 1$$

$$\boxed{A = 1/2}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Coeficientes Indeterminados - 5
Termo <u>não</u> homogêneo: sen(kx) ou cos(kx)

Exemplo: Resolva a eq. dif. $y''-2y'=\text{sen}(4x)$.

Sol.: Escrevemos a eq. homogênea correspondente

$$y''-2y'=0$$

Trocamos $y''\to r^2$

$y'\to r$

$y\to 1$

$$r^2-2r=0$$ ← Eq. Característica

errado

$$r\neq 0$$

$$r-2=0$$

$$r_1=r_2=\boxed{r=2}\ (\text{TIPO II})$$

$$y_{gh}(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$$

certo

$$r(r-2)=0 \qquad r_1\neq r_2\in\mathbb{R}$$

$$r_1=0 \quad r_2=2 \quad (\text{Tipo I})$$

$$y_{gh}(x)=C_1\underset{1}{\boxed{e^{0\cdot x}}}+C_2e^{2x}$$

$$\boxed{y_{gh}(x)=C_1\cdot\underbrace{1}_{y_1(x)}+C_2\underbrace{e^{2x}}_{y_2(x)}.}$$ C_1 e $C_2\in\mathbb{R}$

- Quando o termo não homogêneo é sen(kx) <u>ou</u> cos(kx) a proposta deve ser sen(kx) <u>e</u> cos(kx).

$$y_p(x)=D_1\cos(4x)+D_2\,\text{sen}(4x)$$

$$y_p'(x)=-4D_1\,\text{sen}(4x)+4D_2\cos(4x)$$

$$y_p''(x)=-16D_1\cos(4x)-16D_2\,\text{sen}(4x)$$

Colocando na eq. não homogênea

$$y'' - 2y' = \text{sen}(4x)$$

$$-16D_1\cos(4x) - 16D_2\,\text{sen}(4x) - 2\left[-4D_1\,\text{sen}(4x) + 4D_2\cos(4x)\right] = \text{sen}(4x$$

$$(-16D_1 - 8D_2)\cos(4x) + (-16D_2 + 8D_1)\,\text{sen}(4x) = 1\cdot\text{sen}(4x) + 0\cdot\cos(4x$$

↑ igualdade de monômios de sen(4x) e cos(4x)

$$\begin{cases} -16D_1 - 8D_2 = 0 & (I) \\ -16D_2 + 8D_1 = 1 & (II) \end{cases}$$

De (I) $D_2 =$ [illegible] $= -2D_1$

colocando D_2 em (II)

$$\cancel{-16\left(-\frac{D_1}{2}\right) + 8D_1 = 1}$$

$$\cancel{16D_1 = 1}$$

$$\cancel{\boxed{D_1 = 1/16}}$$

$$\cancel{D_2 = -1/32}$$

$$-16(-2D_1) + 8D_1 = 1$$

$$40D_1 = 1$$

$$\boxed{D_1 = \frac{1}{40}}$$

$$\boxed{D_2 = -\frac{1}{20}}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{40}\cos(4x) - \frac{1}{20}\,\text{sen}(4x)}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{40}\cos(4x) - \frac{1}{20}\,\text{sen}(4x)}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Acabamos de ver que para

$$y'' - 2y' = \text{sen}(4x)$$

$$y_{gh}(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$$

e a proposta de solução particular da não homogênea

foi $y_p(x) = D_1 \cos(4x) + D_2 \,\text{sen}(4x)$.

Exercício Proposto-1

Resolva $y'' + 16y = \text{sen}(4x)$.

Sol.: $y_{gh}(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \,\text{sen}(4x)$

~~$y_p(x) = D_1 \cos(4x) + D_2 \,\text{sen}(4x)$~~ não funciona

$$y_p(x) = D_1 x \cos(4x) + D_2 x \,\text{sen}(4x)$$

Exercício Proposto-2.

Resolva $y'' + 16y = \text{sen}(3x)$.

Sol.: $y_{gh}(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \,\text{sen}(4x)$

$y_p(x) = D_1 \cos(3x) + D_2 \,\text{sen}(3x)$ ✓ (funciona)

$\cos(3x)$ e $\cos(4x)$ são L.I.

Isto é, $\dfrac{\cos(3x)}{\cos(4x)} = f(x)$ não é constante

Exercícios Coeficientes Indeterminados

- Resolva a eq. dif. $y'' - y' = x^2$.

Sol.: A eq. homogênea correspondente é:

$$y'' - y' = 0$$

Trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 - r = 0$ Eq. Caraterística

$r(r-1) = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = 1$ (Tipo I)

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x}$$

Agora podemos propor uma solução particular para a eq. não homogênea.

$$y'' - y' = \boxed{x^2} \leftarrow \text{Polinômio de Grau 2}$$

Logo, $y_p(x) = D_0 \cdot 1 + D_1 x + D_2 x^2 \leftarrow$ //

Veremos que essa proposta <u>não</u> funciona:

a função 1 é solução da eq. homogênea.

$$y_p'(x) = D_1 + 2D_2 x$$

$$y_p''(x) = 2D_2$$

Colocando em $y'' - y' = x^2$

$$2D_2 - [D_1 + 2D_2 x] = x^2$$

$$(2D_2 - D_1) - 2D_2 x = x^2$$

$$(2D_2 - D_1) - 2D_2 x = \underbrace{1x^2}_{} + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^0$$

? Esses dois polinômios nunca podem ser iguais

$$\begin{cases} 2D_2 - D_1 = 0 \\ -2D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$D_2 = 0 \text{ e } D_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y_p(x) = 0 \quad (\text{Absurdo})$$

Consequentemente, temos que modificar a proposta inicial:

← Polinômio de Grau 3

$$y_p(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3$$

$$y_p'(x) = D_1 + 2D_2 x + 3D_3 x^2$$

$$y_p''(x) = 2D_2 + 6D_3 x$$

Colocando em $y'' - y' = x^2$

$$2D_2 + 6D_3 x - (D_1 + 2D_2 x + 3D_3 x^2) = x^2$$

$$(2D_2 - D_1) + (6D_3 - 2D_2)x - 3D_3 x^2 = 1\cdot x^2 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^0$$

$$\begin{cases} 2D_2 - D_1 = 0 & (I) \\ 6D_3 - 2D_2 = 0 & (II) \\ -3D_3 = 1 & (III) \end{cases}$$

De (III) $\boxed{D_3 = -\frac{1}{3}}$ colocando em (II)

$$\overset{2}{\cancel{6}}\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 2D_2$$

$\boxed{D_2 = -1}$ → colocando em (I)

$z(-1) = D1$

$$\boxed{D_1 = -2}$$

logo $y_p(x) = \cancel{D_0} + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3$

o sistema não diz nada

Do multiplica 1, que é solução da homogênea

$$\boxed{y_p(x) = -2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x - 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

— Resolva $y'' = x^2$.

$y''(x) = 0$ ← Homogênea Correspondente

$r^2 = 0$ ← Polinômio Característica

(Tipo II) Solução dupla

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \underset{1}{\boxed{e^{0x}}} + C_2 x \underset{1}{\boxed{e^{0x}}}$$

$\boxed{y_{g.h}(x) = C_1 + C_2 x}$ ← (Caso Simples 1)

Temos que propor uma solução particular para $y'' = \boxed{x^2}$

1) $y_p(x) = \underbrace{D_0 + D_1 x}_{\text{Solução da Homogênea}} + D_2 x^2$ ← Não funciona

2) $y_p(x) = \underbrace{D_0 + D_1 x} + D_2 x^2 + D_3 x^3$ ← Não funciona

$y_p'(x) = 2D_2 x + 3D_3 x^2$

$y_p''(x) = 2D_2 + 6D_3 x$

$2D_2 + 6D_3x \neq x^2$

3) $y_p(x) = D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4$ ← Proposta Certa

$y_p'(x) = 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3$

$y_p''(x) = 2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2$

Colocando em $y'' = x^2$

$$2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 = 1\cdot x^2 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^0$$

$$\begin{cases} 2D_2 = 0 \\ 6D_3 = 0 \\ 12D_4 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{D_4 = \frac{1}{12},\ D_3 = 0 \text{ e } D_2 = 0}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{12}x^4}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 + C_2x + \frac{1}{12}x^4}$$

Coeficientes Indeterminados - 6
Termo não homogêneo: Produto
$e^{kx}\cos(mx)$, $e^{kx}P_n(x)$, $P_n(x)\,\text{sen}(mx)$.

Exemplo: Resolva $y''-4y=e^{x}\cos(x)$.

Primeiro resolvemos a eq. homogênea correspondente

$$y''-4y=0$$

$$r^2-4=0 \leftarrow \text{Eq. Caraterística}$$

$$r^2=4$$

$$r_1=-2 \quad r_2=2 \quad (\text{Tipo I})$$

$$\boxed{y_{gh}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}}$$

Agora vamos propor uma solução particular para ~~o termo~~ a eq. não homogênea $y''-4y=e^x\cos(x)$

$$y_p(x)=\underbrace{Ae^x}_{\text{proposta devida a } e^x}\underbrace{[D_1\cos(x)+D_2\,\text{sen}(x)]}_{\text{proposta devida a } \cos(x).}$$

$$y_p(x)=e^x[\underbrace{AD_1}_{E_1}\cos(x)+\underbrace{AD_2}_{E_2}\,\text{sen}(x)]$$

$$\boxed{y_p(x)=e^x[E_1\cos(x)+E_2\,\text{sen}(x)]}$$

$$y_p'(x)=e^x[E_1\cos(x)+E_2\,\text{sen}(x)]+e^x[-E_1\,\text{sen}(x)+E_2\cos(x)$$

$$\boxed{y_p'(x)=e^x[(E_1+E_2)\cos(x)+(E_2-E_1)\,\text{sen}(x)]}$$

$$y_p''(x)=e^x[(E_1+E_2)\cos(x)+(E_2-E_1)\,\text{sen}(x)]+e^x[-(E_1+E_2)\,\text{sen}(x)+(E_2-E_1$$
$$\cdot\cos x$$

$$\boxed{y_p''(x)=e^x\left[2E_2\cos(x)-2E_1\,\text{sen}(x)\right]}$$

Colocando na eq. dif. não homogênea: $y''-4y=e^x\cos(x)$

$$\cancel{e^x}\left[2E_2\cos(x)-2E_1\,\text{sen}(x)\right]-4\cancel{e^x}\left[E_1\cos(x)+E_2\,\text{sen}(x)\right]=\cancel{e^x}\cos(x$$

igualdade dos monômios sen(x) e cos(x).

$$\begin{cases} 2E_2-4E_1=1 & (I) \\ -2E_1-4E_2=0 & (II) \end{cases}$$

De (II) $-2E_1=4E_2$

$$\boxed{E_2=-\frac{E_1}{2}}$$

Colocando E_2 em (I)

$$\cancel{2}\left(\frac{-E_1}{\cancel{2}}\right)-4E_1=1$$

$$-5E_1=1$$

$$\boxed{E_1=-\frac{1}{5}} \qquad \boxed{E_2=\frac{1}{10}}$$

$$\boxed{y_p(x)=-\frac{1}{5}\cos(x)+\frac{1}{10}\,\text{sen}(x)}$$

$$\boxed{y_{g.n.h}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{5}\cos(x)+\frac{1}{10}\,\text{sen}(x)}$$

Coeficientes Indeterminados - 7

Princípio de superposição: Soma de dois termos não homogêneos

$$A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=\underbrace{D_1(x)+D_2(x)}_{\text{Soma.}}$$

Usando a notação de operador diferencial linear de segunda ordem escrevemos a eq. anterior como

$$L_2[y(x)]=D_1(x)+D_2(x).$$

Para achar a solução particular desta equação vamos propor que existam outras duas soluções particulares

$$y_p(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x).$$

onde $L_2[y_p(x)]=D_1(x)+D_2(x)$

$$L_2[y_{p1}(x)]=D_1(x)$$

$$L_2[y_{p2}(x)]=D_2(x)$$

Isto é, separamos em dois problemas:

$$① \begin{cases} A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=D_1(x) \\ \downarrow \\ y_{p1}(x) \end{cases}$$

$$② \begin{cases} A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)=D_2(x) \\ \downarrow \\ y_{p2}(x) \end{cases}$$

Como $L_2[y_p(x)] = L_2[y_{p1}(x) + y_{p2}(x)] \xrightarrow{} = L_2[y_{p1}(x)] + L_2[y_{p2}(x)]$

$$L_2[y_p(x)] = L_2[y_{p1}(x) + y_{p2}(x)] = \underbrace{L_2[y_{p1}(x)]}_{D_1(x)} + \underbrace{L_2[y_{p2}(x)]}_{D_2(x)}$$

o operador é linear

$$L_2[y_p(x)] = D_1(x) + D_2(x).$$

Exemplo: Resolva $y'' - 2y' - 3y = \underbrace{4x-5}_{D_1(x)} + \underbrace{6xe^{2x}}_{D_2(x)}$.

Resolvemos primeiro a eq. homogênea correspondente.

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$r^2 - 2r - 3 = 0$ Eq. Caraterística

$$r = \frac{2 \pm \boxed{\sqrt{4+12}}\;4}{2}$$

$r_1 = -1$ $r_2 = 3$ (Tipo I)

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}}$$

Agora vamos encontrar uma solução particular para a eq. não homogênea.

$$y_p(x) = \underbrace{y_{p1}(x)} + \underbrace{y_{p2}(x)}$$

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

$\boxed{\text{Problema 1}}$

$$y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

$\boxed{\text{Problema 2}}$

Problema - 1

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

$$\begin{cases} y_{p1}(x) = A_0 + A_1 x \\ y'_{p1}(x) = A_1 \\ y''_{p1}(x) = 0 \end{cases}$$

$$0 - 2[A_1] - 3[A_0 + A_1 x] = 4x - 5$$

$$(-2A_1 - 3A_0) - 3A_1 x = 4x - 5$$

$$\begin{cases} -2A_1 - 3A_0 = \text{[illegible]} 5 \\ -3A_1 = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{A_1 = -\frac{4}{3}}$$

$$-2\left(-\frac{4}{3}\right) + 5 = 3A_0$$

$$\frac{8}{3} + \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{23}{3} = 3A_0$$

$$\boxed{A_0 = \frac{23}{9}}$$

$$\boxed{y_{p1}(x) = \frac{23}{9} - \frac{4}{3}x}$$

Problema-2

$$y''-2y'-3y=6xe^{2x}$$

$$\boxed{y_{p2}(x)=(A_0+A_1x)e^{2x}}$$

$$y'_{p2}(x)=A_1e^{2x}+2(A_0+A_1x)e^{2x}$$

$$\boxed{y'_{p2}(x)=e^{2x}[(2A_0+A_1)+2A_1x]}$$

$$y''_{p2}(x)=2e^{2x}[(2A_0+A_1)+2A_1x]+e^{2x}[2A_1]$$

$$\boxed{y''_{p2}(x)=e^{2x}[4(A_0+A_1)+2A_1x]}$$

~~$y_p(x)$~~ ~~$=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)$~~

~~$y_p(x)=\frac{23}{9}-\frac{4}{3}x+e^{2x}[A_1$~~

Colocando na eq. $y''-2y'-3y=6xe^{2x}$

$$\cancel{e^{2x}}[4(A_0+A_1)+2A_1x]-2[(2A_0+A_1)+2A_1x]\cancel{e^{2x}}-3[A_0+A_1x]\cancel{e^{2x}}=$$

$$=6x\cancel{e^{2x}}$$

A exponencial (e^{2x}) não se anula

$$(-3A_0+2A_1)+(-5A_1)x=6x$$

$$\begin{cases}-5A_1=6 & \longrightarrow \boxed{A_1=-6/5} \\ -3A_0+2A_1=0 & \longrightarrow +3A_0=2\left(-\frac{6}{5}\right)\end{cases}$$

$$\boxed{A_0=-\frac{4}{5}}$$

$$\boxed{y_{p2}(x) = \left(-\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right)e^{2x}}$$

$$y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = y_p(x)$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{23}{9} - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right)e^{2x}}$$

$$\boxed{y_{g.n.h}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{23}{9} - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right)e^{2x}}$$

Método da Variação dos Parâmetros

$$A(x)\,y''(x) + B(x)\,y'(x) + C(x)\,y(x) = D(x).$$ ← Não homogênea

Resolvemos a homogênea correspondente

$$A(x)\,y''(x) + B(x)\,y'(x) + C(x)\,y(x) = 0$$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x).}$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções L.I da eq. homogênea

Isto é:

$$A(x)\,y_1''(x) + B(x)\,y_1'(x) + C(x)\,y_1(x) = 0$$

e

$$A(x)\,y_2''(x) + B(x)\,y_2'(x) + C(x)\,y_2(x) = 0$$

Adicionalmente, $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$

no intervalo aberto I onde existe solução.

- Agora vamos propor uma solução particular para a eq. não homogênea usando o método da variação dos parâmetros:

$$\rightarrow\; y_p(x) = \underbrace{E_1(x)}\,y_1(x) + \underbrace{E_2(x)}\,y_2(x)$$

Trocamos o C_1 da Eq. homogênea por $E_1(x)$

Trocamos o C_2 da Eq. homogênia por $E_2(x)$

$\longleftrightarrow$ funções de x (O que era parâmetro, agora varia, muda com x)

Queremos encontrar as funções $E_1(x)$ e $E_2(x)$ tais que $y_p(x)$ satifaz a eq. não homogênea.

- Vamos derivar para encontrar $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$.

$$y_p(x) = E_1(x)y_1(x) + E_2(x)y_2(x)$$

$$y_p'(x) = \underline{E_1'(x)y_1(x)} + E_1(x)y_1'(x) + \underline{E_2'(x)y_2(x)} + E_2(x)y_2'(x)$$

Para evitar segundas derivadas de $E_1(x)$ e $E_2(x)$

vamos impor que

$$\boxed{E_1'(x)y_1(x) + E_2'(x)y_2(x) = 0} \quad (I).$$

$$y_p'(x) = E_1(x)y_1'(x) + E_2(x)y_2'(x)$$

$$y_p''(x) = E_1'(x)y_1'(x) + E_1(x)y_1''(x) + E_2'(x)y_2'(x) + E_2(x)y_2''(x)$$

Colocando y_p, y_p' e y_p'' na eq. dif. não homogênea

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} A(x)\left[E_1'(x)y_1'(x) + \underline{E_1(x)y_1''(x)} + E_2'(x)y_2'(x) + \overline{E_2(x)y_2''(x)}\right] + \\ + B(x)\left[\underline{E_1(x)y_1'(x)} + \overline{E_2(x)y_2'(x)}\right] + C(x)\left[\underline{E_1(x)y_1(x)} + \overline{E_2(x)y_2(x)}\right] = D(x) \end{array}\right.$$

Reagrupando, lembre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da eq. h.

$$E_1(x)\underbrace{\left[A(x)y_1''(x) + B(x)y_1'(x) + C(x)y_1(x)\right]}_{0} + E_2(x)\underbrace{\left[A(x)y_2''(x) + B(x)y_2'(x) + C(x)y_2(x)\right]}_{0} +$$

$$+ A(x)\left[E_1'(x)y_1'(x) + E_2'(x)y_2'(x)\right] = D(x)$$

$$\overset{A(x)\neq 0}{\boxed{E_1'(x)\, y_1'(x) + E_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{D(x)}{A(x)}}} \quad (II).$$

Logo, temos um sistema de equações para $E_1'(x)$ e $E_2'(x)$:

$$\begin{cases} E_1'(x) y_1(x) + E_2'(x) y_2(x) = 0 & (I) \\ E_1'(x)\, y_1'(x) + E_2'(x)\, y_2'(x) = \dfrac{D(x)}{A(x)} & (II) \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito em forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} E_1'(x) \\ E_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{D(x)}{A(x)} \end{pmatrix}$$

O determinante de essa matriz é o Wronskiano, que sabemos ser diferente de zero ($y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções L.I. da eq. h.)

Então, existe a matriz inversa. Vamos usar a regra de Cramer para resolver o sistema.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \qquad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{D(x)}{A(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{D(x)}{A(x)} \end{vmatrix}$$

$E_1'(x) = \underbrace{\boxed{\frac{W_1(x)}{W(x)}}}_{f(x)}$ e $E_2'(x) = \underbrace{\boxed{\frac{W_2(x)}{W(x)}}}_{g(x)}$

As equações diferenciais resultantes são de primeira ordem.

$E_1'(x) = f(x)$

$\frac{dE_1(x)}{dx} = f(x)$

$dE_1(x) = f(x)dx$

$\int dE_1(x) = \int f(x)dx$

$\boxed{E_1(x) = \int f(x)dx + C_1}$

$E_2'(x) = g(x)$

$\frac{dE_2(x)}{dx} = g(x)$

$dE_2(x) = g(x)dx$

$\int dE_2(x) = \int g(x)dx$

$\boxed{E_2(x) = \int g(x)dx + C_2}$

Uma vez encontradas $E_1(x)$ e $E_2(x)$, teremos

$y_p(x) = E_1(x)y_1(x) + E_2(x)y_2(x)$.

A seguir discutiremos um exemplo.

Note que o Método da Variação dos Parâmetros é válido sempre, independentemente da forma do termo não homogêneo ($D(x)$).

Exemplo de uso do Método de Variação dos Parâmetros para encontrar a solução particular da eq. não homogênea. (I)

- Resolva a eq. dif. $4y'' + 36y = \boxed{\dfrac{1}{\text{sen}(3x)}}$. ← Não é possive usar "Coef. Indeter- minad

Primeiro escrevemos a eq. homogênea correspondente

$$4y'' + 36y = 0$$

Trocamos $y'' \rightarrow r^2$ e $y \rightarrow 1$

$$4r^2 + 36 = 0$$

$$r^2 = -9 = 9i^2 \quad (\text{Tipo III})$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$\alpha = 0 \text{ e } \beta = 3$$

$$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{\cos(3x)}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\text{sen}(3x)}_{y_2(x)}.$$

A proposta de solução ~~será~~ particular será

$$y_p(x) = E_1(x)\cos(3x) + E_2(x)\,\text{sen}(3x)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \text{sen}(3x) \\ -3\,\text{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3$$

Lembrando que partimos de uma eq. genérica do tipo

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x) .$$

No nosso problema

$$4y''(x) + 36y = \frac{1}{sen(3x)}$$

Identificamos $A(x) = 4$ e $D(x) = \frac{1}{sen(3X)}$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2^*(x) \\ \frac{D(x)}{A(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & sen(3x) \\ \frac{1}{4sen(3x)} & 3cos(3X) \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{D(x)}{A(x)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos(3x) & 0 \\ -3sen(3X) & \frac{1}{4sen(3X)} \end{vmatrix} = \frac{cos(3x)}{4sen(3X)}$$

$$E_1'(X) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{-1/4}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{dE_1(x)}{dx} = -\frac{1}{12}$$

$$dE_1(x) = -\frac{1}{12}dx$$

$$\int dE_1(x) = -\frac{1}{12}\int dx$$

$$\boxed{E_1(x) = -\frac{1}{12}x} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{C}$$

$$E_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{\cos(3x)}{4\operatorname{sen}(3x)\cdot 3}$$

$$\frac{dE_2(x)}{dx} = \frac{\cos(3x)}{12\operatorname{sen}(3x)}$$

$$E_2(x) = \frac{1}{12}\int \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)}\,dx$$

$$u(x) = \operatorname{sen}(3x)$$

$$du = 3\cos(3x)\,dx$$

$$E_2(x) = \frac{1}{12}\int \frac{du/3}{u} = \frac{1}{36}\int\frac{du}{u}$$

$$E_2(x) = \frac{1}{36}\ln|u| + C = 0$$

$$\boxed{E_2(x) = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen}(3x)|}$$

Voltamos em $y_p(x) = E_1(x)\cos(3x) + E_2\operatorname{sen}(3x)$

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen}(3x)|\operatorname{sen}(3x)}$$

$$y_{g.n.h}(x) = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12}x\cos(3x) + \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen}(3x)|\operatorname{sen}(3x$$

Método de Variação dos Parâmetros

Exemplo - II

- Resolva a eq. dif. $y'' - y = \boxed{\frac{1}{x}}$.

$\rightarrow$ Não é possível usar o método dos coeficientes indeterminados

Primeiro escrevemos a eq. homogênea correspondente

$y'' - y = 0$

Trocamos $y'' \rightarrow r^2$ e $y \rightarrow 1$

$r^2 - 1 = 0$

$r^2 = 1$ (Tipo I)

$r_1 = -1$ $r_2 = 1$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{x}}_{y_2(x)}}$$

Proposta de solução particular pelo método de variação dos parâmetros:

$y_p(x) = C_1(x)\, e^{-x} + C_2(x)\, e^{x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{x} e^{-x}}_{1} + \underbrace{e^{x} e^{-x}}_{1} = 2$$

Lembrando

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

agora

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{x}$$

Logo: $\boxed{A(x) = 1}$ e $\boxed{D(x) = \frac{1}{x}}$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{D(x)}{A(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{1}{x} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{e^x}{x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{D(x)}{A(x)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}e^{-x}$$

$$E_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{-\frac{e^x}{x}}{2}$$

$$E_1'(x) = \frac{dE_1(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x}$$

$$\boxed{E_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}\,dx}$$

← Não existe uma fórmula simples para essa integral

$$E_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{\frac{e^{-x}}{x}}{2}$$

$$E_2'(x) = \frac{e^{-x}}{2x}$$

$$\boxed{E_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx}$$

Voltando na proposta de $y_p(x)$:

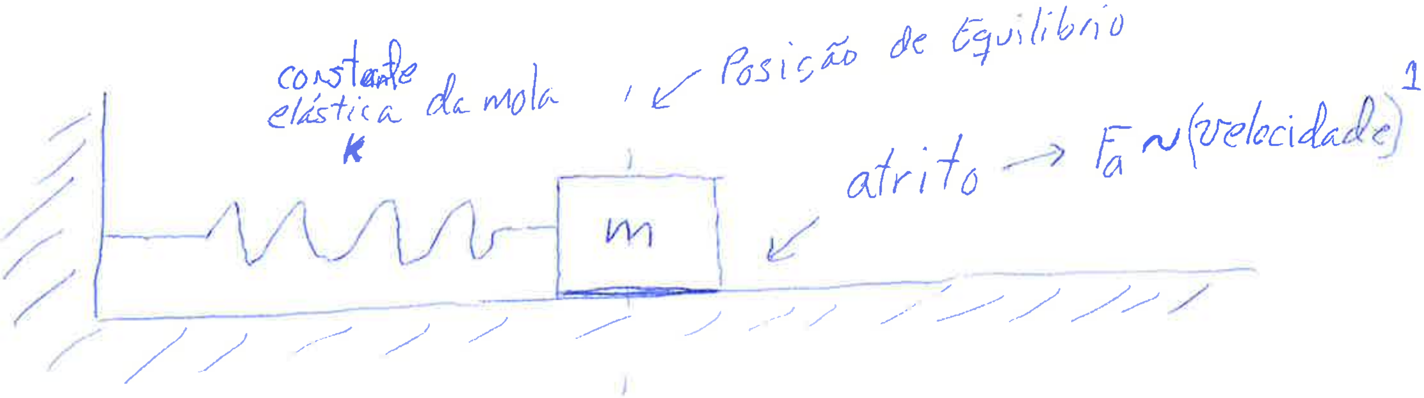
$$y_p(x) = E_1(x)e^{-x} + E_2(x)e^{x}$$

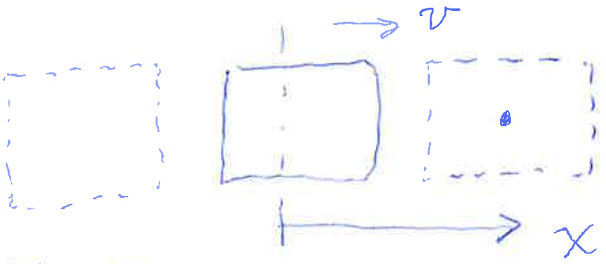
$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{e^{x}}{x}dx\right)e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^{-x}}{x}dx\right)e^{x}}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^{x}}{x}dx\right)e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^{-x}}{x}dx\right)e^{x}}$$

Usando o método da variação dos parâmetros nem sempre é possivel calcular as integrais. Por isso, sempre que possivel prefira o método dos coeficientes indeterminados.

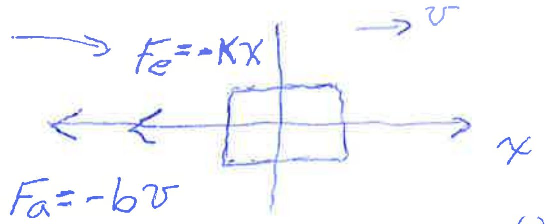
Oscilador Amortecido





Mola Linear

Lei de Hooke.



↖ quanto maior ⓑ maior o atrito

Pela Segunda Lei de Newton

$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$-bv - kx = m\, a_x$$

$$-b\frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

ou

$$\boxed{m x''(t) + b x'(t) + k x(t) = 0}$$

Eq. Dif. de 2ª ordem, linear, homogênea com coeficientes constantes e positivos.

- Vamos propor que exista uma solução do tipo exponencial: $x(t) = e^{rt}$

$$x'(t) = re^{rt}$$

$$x''(t) = r^2e^{rt}$$

$$mr^2e^{rt} + bre^{rt} + ke^{kt} = 0$$

$$e^{rt}\left[mr^2 + br + k\right] = 0$$

$$e^{rt} \neq 0$$

$$mr^2 + br + k = 0 \leftarrow \text{Eq. Caraterística}$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Temos três casos

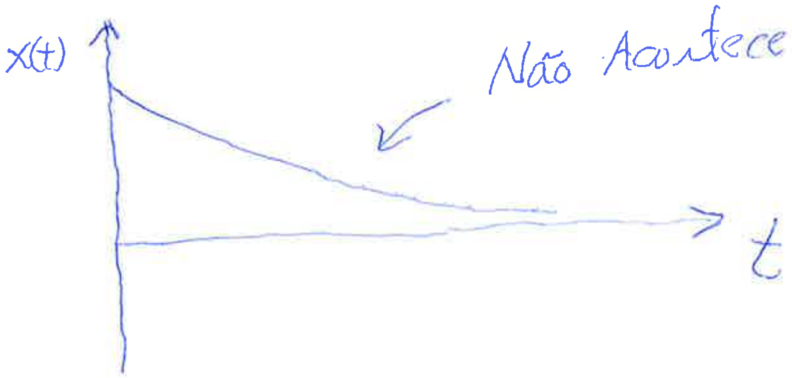
(I) Se $b^2 > 4mk \rightarrow$ Superamortecido (o atrito é grande)

$r_1 \neq r_2$ e $\boxed{r_1 < 0 \text{ e } r_2 < 0}$

$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

$$\boxed{x(t) = C_1e^{-|r_1|t} + C_2e^{-|r_2|t}}$$

Duas exponenciais decrescentes



Não Acontece Oscilação

(II) Se $b^2 = 4mk \rightarrow$ Criticamente Amortecido

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2m} < 0$$

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + C_2 t \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}$$

← exponencial decrescente

$$\boxed{x(t) = [C_1 + C_2 \cdot t]\, e^{-\frac{b}{2m}t}}$$

$$\lim_{t \to +\infty} [t e^{-\frac{b}{2m}t}] = 0.$$

(Use L'Hôpital) visto em uma aula anterior

$$\lim_{t \to +\infty} [x(t)] = 0.$$

Passa uma única vez pela posição de equilíbrio.

(III) Se $b^2 < 4mk \rightarrow$ Subamortecido (pouco atrito)

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{4mk - b^2}\, i}{2m} = \underbrace{\frac{-b}{2m}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}}_{\beta}\, i$$

Se $b^2 << 4mk \rightarrow \beta \approx \frac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{4mk}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

atrito muito pequeno

$$\boxed{\beta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

← frequência própria de oscilação do sistema sem atrito

Mov. Harmônico Simples

Em geral, no tipo (III)

$\beta < \beta_0$.

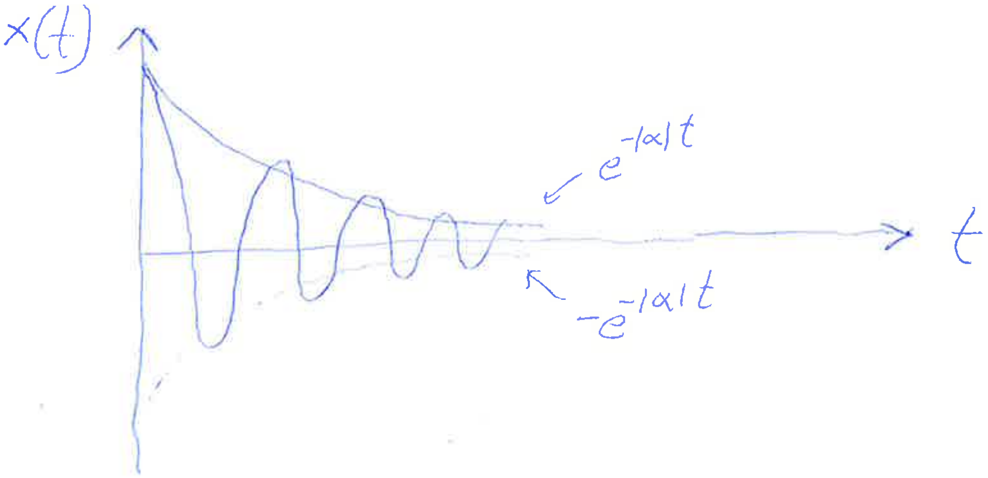
$\beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ e $\beta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

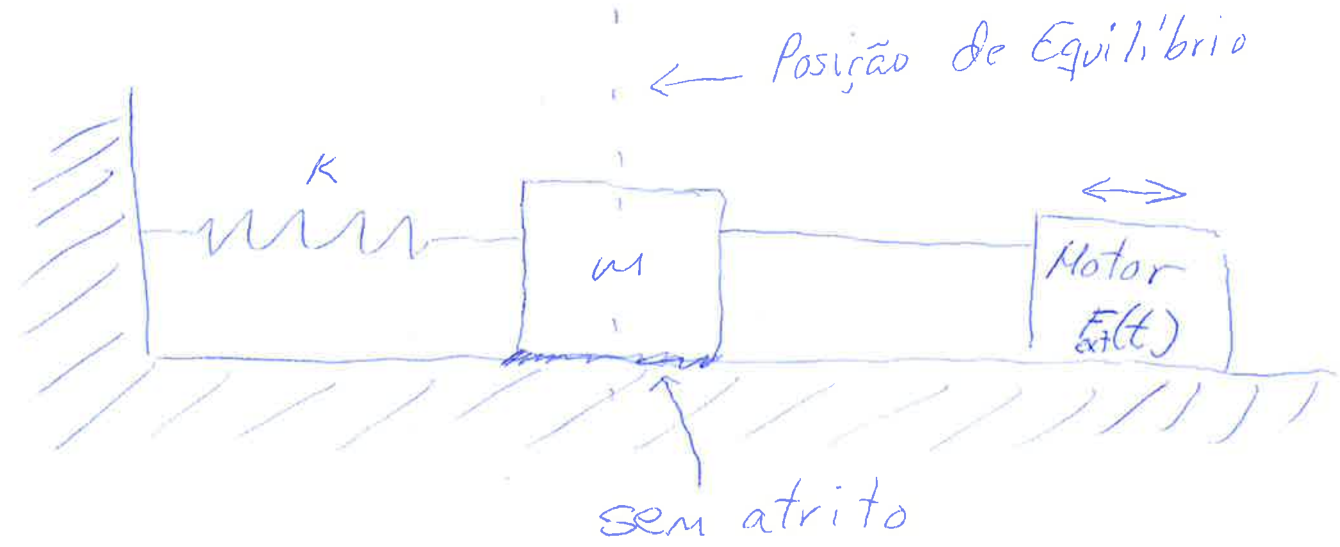
$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

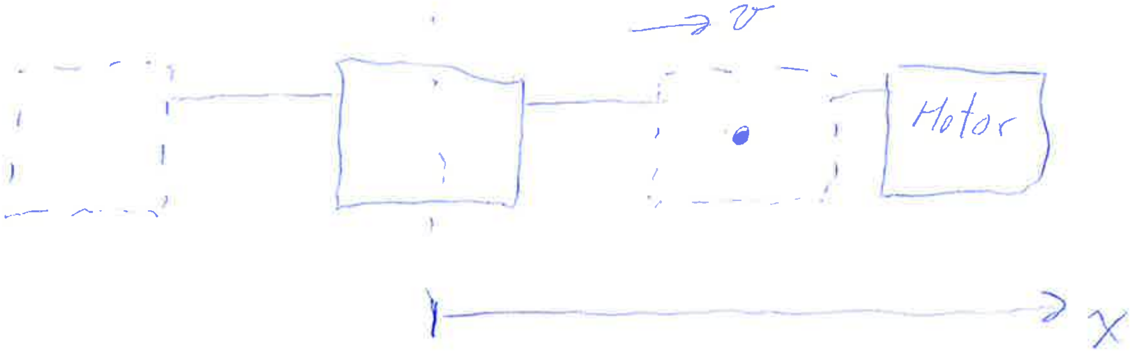
$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \alpha^2}$$

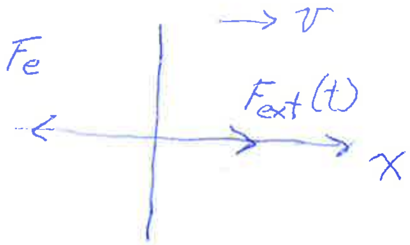
$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{exponencial decrescente } (\alpha<0)} \overbrace{\left[C_1 \cos(\beta t) + C_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right]}^{\text{parte oscilatória}}}$$



Oscilações Forçadas. Ressonância







Segunda Lei de Newton.

$$\sum F_x = m a_x$$

$$-F_e + F_{ext}(t) = m a_x$$

$$-k x(t) + F_{ext}(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\boxed{m x''(t) + k x(t) = F_{ext}(t).}$$

Eq. não homogênea, 2ª ordem, linear, coeficientes constantes e positivos.

Resolvemos primeiro a eq. homogênea correspondente

$m x''(t) + k x(t) = 0$ (Trocamos $x'' \to r^2$ e $x \to 1$)

$m r^2 + k = 0$ ← Eq. Caraterística

$r^2 = -\frac{k}{m} = \frac{k}{m} i^2$ (Tipo III)

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$\alpha = 0$ e $\beta = \boxed{\sqrt{\frac{k}{m}} = \beta_0}$ Frequência Angular do Oscilador Harmônico Simples.

Em Física, em lugar de β_0 é usada a letra ω_0.

$$\boxed{x_{gh}(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)}$$ C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$.

Agora voltamos para a eq. não homogênea e vamos estudar dois casos:

a) $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ com $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

b) $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados

$\boxed{\text{Caso a) } \omega \neq \omega_0}$: $x_p(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \operatorname{sen}(\omega t)$

$$\underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{Eq. Não Homogênea}} \text{ é L.I com } \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{Eq. Homogênea}}$$

$x_p'(t) = -\omega D_1 \operatorname{sen}(\omega t) + D_2 \omega \cos(\omega t)$

$x_p''(t) = -\omega^2 D_1 \cos(\omega t) - \omega^2 D_2 \operatorname{sen}(\omega t)$

Colocando x_p, x_p' e x_p'' em $mx'' + Kx = F_0 \cos(wt)$

$$m\left[-w^2 D_1 \cos(wt) - w^2 D_2 \, sen(wt)\right] + K\left[D_1 \cos(wt) + D_2 \, sen(wt)\right] =$$

$$= F_0 \cos(wt) + 0 \cdot sen(wt)$$

$$(KD_1 - D_1 m w^2)\cos(wt) + (KD_2 - w^2 m D_2)\, sen(wt) = F_0 \cos(wt) + 0.sen(wt$$

$$\begin{cases} D_1 (K - mw^2) = F_0 \\ D_2 (K - mw^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_2 = 0} \text{ pois } \frac{K}{m} \neq w^2$$

$$\boxed{D_1 = \frac{F_0}{K - mw^2}}$$

logo $\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{K - mw^2} \cos(wt)}$ $w \neq \sqrt{\frac{K}{m}} = w_0.$

$$\boxed{x_{g.n.h.}(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) + C_2 \, sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t\right) + \frac{F_0}{K - mw^2} \cos(wt)}$$

Em Física, $x_p(t) = \dfrac{F_0}{\frac{m}{m}(K - mw^2)} \cos(wt)$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos(wt)}$$

Note que quando $w \to w_0$ a amplitude de oscilação aumenta e essa função não está definida em $w = w_0$.

Esse aumento de amplitude perto de w_0 é conhecido como RESSONÂNCIA.

Caso b) $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ (Ressonância)

$$m x''(t) + K x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x_{gh}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

~~$x_p(t) = D_1 \cos(\omega_0 t) + D_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$~~ não funciona

$$\boxed{x_p(t) = D_1 t \cos(\omega_0 t) + D_2 t \operatorname{sen}(\omega_0 t)}$$

$$x_p'(t) = D_1\left[\cos(\omega_0 t) - t\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right] + D_2\left[\operatorname{sen}(\omega_0 t) + t\omega_0 \cos(\omega_0\right.$$

$$x_p''(t) = D_1\left[-\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\right] +$$

$$+ D_2\left[\omega_0 \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right].$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_p''(t) = {} & D_1\left[-2\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\right] + \\ & + D_2\left[2\omega_0 \cos(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right] \end{aligned}}$$

Colocando $x_p''(t)$ e $x_p(t)$ na eq. não homogênea

$$m D_1\left[-2\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \underline{t\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)}\right] + m D_2\left[2\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \overline{t\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}\right] +$$

$$+ \underline{K D_1 t \cos(\omega_0 t)} + \overline{K D_2 t \operatorname{sen}(\omega_0 t)} = F_0 \cos(\omega_0 t).$$

Temos quatro tipos de funções

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ t \operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ t \cos(\omega_0 t) \end{array}\right\}$$

Os coeficientes correspondentes devem ser iguais

$$\begin{cases} -2D_1 m\omega_0 = 0 & \leftarrow \text{Para } \operatorname{sen}(\omega_0 t). \\ 2mD_2\omega_0 = F_0 & \leftarrow \text{Para } \cos(\omega_0 t) \\ D_1(\underbrace{-m\omega_0^2 + K}_{0}) = 0 & \leftarrow \text{ " } t\cos(\omega_0 t) \\ D_2(\underbrace{-m\omega_0^2 + K}_{0}) = 0 & \leftarrow \text{ " } t\operatorname{sen}(\omega_0 t). \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$\rightarrow D_1 = 0$$

$$\rightarrow D_2 = \frac{F_0}{2m\omega_0}$$

Voltando na proposta $x_p(t)$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)}$$

Logo,

$$\boxed{x_{gn-h}(t) = \underbrace{C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\operatorname{sen}(\omega_0 t)}_{\text{oscilatorio limitado}} + \frac{F_0}{2m\omega_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{crescente no tempo}}}{t} \operatorname{sen}(\omega_0 t)}$$

A amplitude de oscilação cresce com o passar do tempo. Na prática, esse crescimento não pode ser ilimitado e o sistema quebra.