17

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

17.1

Equações Lineares de Segunda Ordem

Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma **equação diferencial linear de segunda ordem** tem a forma

$$\boxed{1} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

onde *P*, *Q*, *R* e *G* são funções contínuas.

Nesta seção, estudaremos o caso onde $G(x) = 0$ para todo x na Equação 1. Tais equações são chamadas equações lineares **homogêneas** .

Equações Lineares de Segunda Ordem

Assim, a forma de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem é

$$\boxed{2} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Se $G(x) \neq 0$ para um x, a Equação 1 é **não homogênea**.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Dois fatos básicos permitem-nos resolver equações lineares homogêneas. O primeiro é que, se conhecermos duas soluções y_1 e y_2 de tal equação, então a **combinação linear** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é uma solução.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são ambas soluções da equação linear homogênea $\boxed{2}$ e c_1 e c_2 são constantes quaisquer, então a função

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

é também uma solução da Equação 2.

O outro fato de que precisamos é dado pelo seguinte teorema, demonstrado em cursos mais avançados. Ele diz que a solução geral é uma combinação linear de duas soluções **linearmente independentes** y_1 e y_2.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Isso significa que nem y_1 nem y_2 são múltiplos por constantes um do outro. Por exemplo: as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x^2$ são linearmente dependentes, mas $f(x) = e^x$ e $g(x) = xe^x$ são linearmente independentes.

4 Teorema Se y_1 e y_2 forem soluções linearmente independentes da Equação 2 em um intervalo, e $P(x)$ nunca for 0, então a solução geral será dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O Teorema 4 é muito útil, pois diz que, se conhecermos *duas* soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos *todas as* soluções.

Em geral, não é fácil descobrir soluções particulares de uma equação linear de segunda ordem.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Mas é sempre possível fazer isso se as funções coeficientes P, Q e R forem funções constantes, isto é, se a equação diferencial tiver a forma

$$\boxed{5} \qquad \boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$.
Não é difícil pensar em alguns prováveis candidatos para as soluções particulares da Equação 5 se a enunciarmos verbalmente.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Estamos procurando uma função y tal que uma constante vezes sua segunda derivada y'' mais outra constante vezes y' mais uma terceira constante vezes y é igual a 0. Sabemos que a função exponencial $y = e^{rx}$ (onde r é uma constante) tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma: $y' = re^{rx}$. Além disso, $y'' = r^2e^{rx}$. Se substituirmos essas expressões na Equação 5, veremos que $y = e^{rx}$ é uma solução se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ou

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Equações Lineares de Segunda Ordem

Mas e^{rx} nunca é 0. Assim, $y = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5 se r é uma raiz da equação

$$\boxed{6} \qquad ar^2 + br + c = 0$$

A Equação 6 é denominada **equação auxiliar** (ou **equação característica**) da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Observe que ela é uma equação algébrica que pode ser obtida da equação diferencial substituindo-se y'' por r^2, y' por r, e y por 1.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Algumas vezes as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

$$\boxed{7} \qquad r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Separamos em três casos, de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - 4ac$.

Equações Lineares de Segunda Ordem

CASO I **$b^2 - 4ac > 0$**

Nesse caso as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são reais e distintas, logo $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$ são duas soluções linearmente independentes da Equação 5. (Observe que $e^{r_2 x}$ não é múltipla por constante de $e^{r_1 x}$.) Portanto, pelo Teorema 4, temos o seguinte fato:

8 Se as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem reais e distintas, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Exemplo 1

Resolva a equação $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cujas raízes são $r = 2, -3$. Portanto, por $\boxed{8}$, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Poderíamos verificar que isso é de fato uma solução derivando e substituindo na equação diferencial.

Equações Lineares de Segunda Ordem

CASO II $b^2 - 4ac = 0$

Neste caso $r_1 = r_2$; isto é, as raízes da equação auxiliar são reais e iguais. Vamos denotar por r o valor comum de r_1 e r_2. Então, das Equações 7, temos

$$\boxed{9} \qquad r = -\frac{b}{2a} \quad \text{então} \quad 2ar + b = 0$$

Sabemos que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da Equação 5. Agora verifiquemos que $y_2 = xe^{rx}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

Equações Lineares de Segunda Ordem

O primeiro termo é 0, pela Equação 9; o segundo termo é 0, pois r é uma raiz da equação auxiliar. Uma vez que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são soluções linearmente independentes, o Teorema 4 nos fornece a solução geral.

10 Se a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem apenas uma raiz real r, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

Exemplo 3

Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $4r^2 + 12r + 9 = 0$ pode ser fatorada como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

de modo que a única raiz é $r = -\frac{3}{2}$. Por $\boxed{10}$, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$

Equações Lineares de Segunda Ordem

CASO III **$b^2 - 4ac < 0$**

Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos. Podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad\qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais. [Na verdade, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Então, usando a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Equações Lineares de Segunda Ordem

Escrevemos a solução da equação diferencial como

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \text{ sen } \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \text{ sen } \beta x)$$

$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \text{ sen } \beta x]$$

$$= e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \text{ sen } \beta x)$$

onde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$.

Equações Lineares de Segunda Ordem

Isso nos dá todas as soluções (reais ou complexas) da equação diferencial. As soluções serão reais quando as constantes c_1 e c_2 forem reais. Resumiremos a discussão da seguinte forma:

11 Se as raízes da equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ forem os números complexos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, então a solução geral de $ay'' + by' + cy = 0$ será

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

Exemplo 4

Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por $\boxed{11}$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$

Problemas de Valores Iniciais e Valores de Contorno

Problemas de Valores Iniciais e Valores de Contorno

Um **problema de valor inicial** para a Equação 1 ou 2 de segunda ordem consiste em determinar uma solução *y* da equação diferencial que satisfaça às condições iniciais da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

onde y_0 e y_1 são constantes. Se *P*, *Q*, *R* e *G* forem contínuas em um intervalo onde $P(x) \neq 0$, então um teorema encontrado em livros mais avançados garante a existência e a unicidade de uma solução para esse problema de valor inicial. Os Exemplos 5 e 6 mostram como resolver tal problema.

Exemplo 5

Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUÇÃO: Do Exemplo 1, sabemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

Derivando essa solução, obtemos

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Para satisfazer às condições iniciais exigimos que

$\boxed{12}$ $$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$\boxed{13}$ $$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De $\boxed{13}$, temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$, logo, $\boxed{12}$ resulta em

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Assim, a solução pedida do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$

Problemas de Valores Iniciais e Valores de Contorno

Um **problema de valor de limite** para a Equação 1 ou 2 consiste em determinar uma solução *y* da equação diferencial que também satisfaça às condições de contorno da forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y(x_1) = y_1$$

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de valor de contorno nem sempre tem uma solução. O método está ilustrado no Exemplo 7.

Exemplo 7

Resolva o problema de valor de contorno

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUÇÃO: A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuja única raiz é $r = -1$. Além disso, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

As condições de contorno são satisfeitas se

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

A primeira condição resulta em $c_1 = 1$, de modo que a segunda condição torna-se

$$e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Isolando c_2 nessa equação, primeiro multiplicando ambos os membros por e, obtém-se

$$1 + c_2 = 3e \quad \text{logo} \quad c_2 = 3e - 1$$

Assim, a solução do problema de contorno é

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$