17.1 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. A equação auxiliar é $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$, então $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2. A equação auxiliar é $r^2 - r = r(r-1) = 0$, então $y = c_1 + c_2 e^x$.

3. A equação auxiliar é $3r^2 - 8r - 3 = (3r+1)(r-3) = 0$, então $y = c_1 e^{-x/3} + c_2 e^{3x}$.

4. A equação auxiliar é $r^2 + 9r + 20 = (r+4)(r+5) = 0$, então $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-5x}$.

5. A equação auxiliar é $r^2 + 2r + 10 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 3i$, então $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

6. A equação auxiliar é $r^2 + 10r + 41 = 0 \Rightarrow r = -5 \pm 4i$, então $y = e^{-5x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x)$.

7. A equação auxiliar é $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$, então $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

8. A equação auxiliar é $9r^2 - 30r + 25 = (3r-5)^2 = 0$, então $y = c_1 e^{5x/3} + c_2 x e^{5x/3}$.

9. A equação auxiliar é $r^2 + 25 = 0 \Rightarrow r = \pm 5i$, então $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$.

10. A equação auxiliar é $r^2 - 4r + 13 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm 3i$, então $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

11. A equação auxiliar é $2r^2 + r = r(2r+1) = 0$, então $y = c_1 + c_2 e^{-x/2}$.

12. A equação auxiliar é $r^2 - 2r - 4 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm \sqrt{5}$, então $y = c_1 e^{(1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{(1+\sqrt{5})x}$.

13. A equação auxiliar é $r^2 - r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{7}i)$, então $y = e^{x/2}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right]$.

14. A equação auxiliar é $r^2 + 5 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{5}i$, então $y = c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}x$.

15. A equação auxiliar é $r^2 + 2r - 1 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{2}$, então $y = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}$.

16. A equação auxiliar é $2r^2 + 5r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{17})$, então $y = c_1 e^{(-5+\sqrt{17})x/4} + c_2 e^{(-5-\sqrt{17})x/4}$.

17. A equação auxiliar é $2r^2 + r + 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{23}i)$, então $y = e^{-x/4}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)\right]$.

18. $r^2 + 3r - 4 = (r+4)(r-1) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$. Então $2 = y(0) = c_1 + c_2$ e $-3 = y'(0) = c_1 - 4c_2$, de modo que $c_1 = 1, c_2 = 1$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = e^x + e^{-4x}$.

19. $r^2 - 4 = (r+2)(r-2) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$. Então $1 = y(0) = c_1 + c_2$ e $0 = y'(0) = -2c_1 + 2c_2$, de modo que $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = \frac{1}{2}(e^{-2x} + e^{2x}) = \cosh 2x$.

20. $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i$ e a solução geral é $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$. Mas $1 = y(0) = c_1$ e $2 = y'(0) = c_1 + c_2$, de modo que a solução para o problema do valor inicial é $y = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.

21. $r^2 + 4r + 6 = 0 \Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{2}i$ e a solução geral é $y = e^{-2x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$. Mas $2 = y(0) = c_1$ e $4 = y'(0) = -2c_1 + \sqrt{2}c_2$, então a solução para o problema do valor inicial é $y = e^{-2x}(2 \cos \sqrt{2}x + 4\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}x)$.

22. $r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$. No entanto, as condições são dadas em $x = 1$, então reescreva a solução geral como $y = k_1 e^{-(x-1)} + k_2 e^{3(x-1)}$. Então $3 = y(1) = k_1 + k_2$ e $1 = y'(1) = -k_1 + 3k_2$, de modo que $k_1 = 2, k_2 = 1$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = 2e^{-(x-1)} + e^{3(x-1)}$.

23. $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$. No entanto, as condições são dadas em $x = 2$, então reescreva solução geral como $y = k_1 e^{x-2} + k_2 (x-2) e^{x-2}$. Então $0 = y(2) = k_1$ e $1 = y'(2) = k_1 + k_2$ ou $k_2 = 1$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = (x-2)e^{x-2}$.

24. $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$ e a solução geral é $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Mas $0 = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -c_1$ e $1 = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3c_2$, então a solução para o problema do valor inicial é $y = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$.

25. $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$ e a solução geral é $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$. Mas $1 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2$ e $0 = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -c_1\sqrt{3} + c_2$, de modo que $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = \frac{1}{2}(\cos 2x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x)$.
Solução Alternativa: Reescreva a solução geral como $y = k_1 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + k_2 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Então $1 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = k_1$ e $0 = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2k_2$, de modo que a solução para o problema do valor incial é $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Verifique que as respostas são iguais.

26. $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$. Então $0 = y(0) = c_1$, $3 = y(1) = c_2 e^{-2}$, de modo que $c_2 = 3e^2$ e a solução do problema de valor de fronteira é $y = 3xe^{-2x+2}$.

27. $r^2 + 5r - 6 = (r+6)(r-1) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^x + c_2 e^{-6x}$. Logo, $0 = y(0) = c_1 + c_2$ e $1 = y(2) = c_1 e^2 + c_2 e^{-12}$, então $c_2 = \left(e^{-12} - e^2\right)^{-1}$, $c_1 = -\left(e^{-12} - e^{-2}\right)^{-1}$.
A solução do problema de valor de fronteira é $y = \left(e^2 - e^{-12}\right)^{-1}\left(e^x - e^{-6x}\right)$.

28. $r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i$ e a solução geral é $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Mas $1 = y(0) = c_1$ e $0 = y(\pi) = -c_1$, de modo que não há solução.

29. $r^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 3i$ e a solução geral é $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Mas $1 = y(0) = c_1$ e $0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c_2$, então a solução para o problema de valor de fronteira $y = \cos 3x$.

30. $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$. Então $1 = y(-1) = c_1 e + c_2 e^{-2}$ e $0 = y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^2$ de modo que $c_1 = \dfrac{e^5}{e^6 - 1}$ e $c_2 = \dfrac{e^2}{1 - e^6}$, de modo que a solução para o problema de valor de fronteira é

$$y = \frac{e^5}{e^6 - 1} e^{-x} + \frac{e^2}{1 - e^6} e^{2x} = \frac{1}{e^6 - 1}\left[e^{5-x} - e^{2(1+x)}\right].$$

31. $r^2 + 4r + 3 = (r+3)(r+1) = 0$, de modo que a solução geral é $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$. Então $0 = y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-3}$ e $2 = y(3) = c_1 e^{-3} + c_2 e^{-9}$, de modo que $c_1 = \dfrac{2e^7}{e^4 - 1}$ e $c_2 = \dfrac{2e^9}{1 - e^4}$. Logo, a solução para o problema de valor de fronteira é $y = \dfrac{1}{e^4 - 1}\left(2e^{7-x} - 2e^{9-3x}\right)$.

32. $r^2 + 4r + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2 \pm 3i$ e a solução geral é $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$. Mas $2 = y(0) = c_1$ e $1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi}(-c_2)$, então a solução para o problema de valor de fronteira é $y = e^{-2x}(2\cos 3x - e^{\pi} \operatorname{sen} 3x)$.

33. $r^2 + 2r + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -1 \pm 2i$ e a solução geral é $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$. Mas $1 = y(0) = c_1$ e $2 = y(\pi) = e^{-\pi}(c_1)$, de modo que não há solução para o problema de valor de fronteira.