Eq. de Laplace. Aula 12.

Em 2D $\rightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u(x,y) = ?$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

Em 3D $\rightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

$u(x,y,z) = ?$

- Nas equações de Laplace não aparece a variável t (tempo), somente as variáveis espaciais.
- Quando resolvemos a eq. dif. de condução do calor 2D

$$\alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_t$$

é proposta uma solução

$$u(x,y,t) = \underbrace{v(x,y)}_{\text{estacionária}} + \underbrace{w(x,y,t)}_{\text{transiente}}$$

A solução estacionária para a eq. do calor satisfaz a eq. de Laplace:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

- A equação ~~do calor~~ de Laplace também é chamada de eq. do Potencial, porque em determinadas condições o potencial eletrostático, ...

... o potencial gravitatório, a função potencial velocidade e a função potencial fluxo (mov. de fluidos) satisfazem a eq. de Laplace.

- Como não existe dependência no tempo na equação de Laplace não teremos condições iniciais. Porém, os problemas envolvendo a eq. de Laplace precisam satisfazer condições de contorno sobre uma curva (2D) de fronteira. Na versão 3D a fronteira é uma superfície.

- Existem 2 tipos de condições de contorno

1ro Tipo ou Problema de Dirichlet

$u(x(\lambda), y(\lambda)) = f(\lambda)$

$C = \begin{cases} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{cases}$

Conhecido

2do Tipo ou Problema de Neumann

$D_{\vec{n}} u(x(\lambda), y(\lambda)) = g(\lambda)$

Derivada de u na direção normal a curva C

$C = \begin{cases} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{cases}$

conhecida

Nos dois casos a curva C é a curva que define a fronteira do problema que estamos estudando.

- O equivalente destas condições de fronteira na eq. de condução do calor é

1ro Tipo: $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$ Se conhece a temperatura nos extremos da barra

2do Tipo: $u_x(0,t) = 0$, $u_x(L,t) = 0$ A barra está isolada termicamente nas tampas

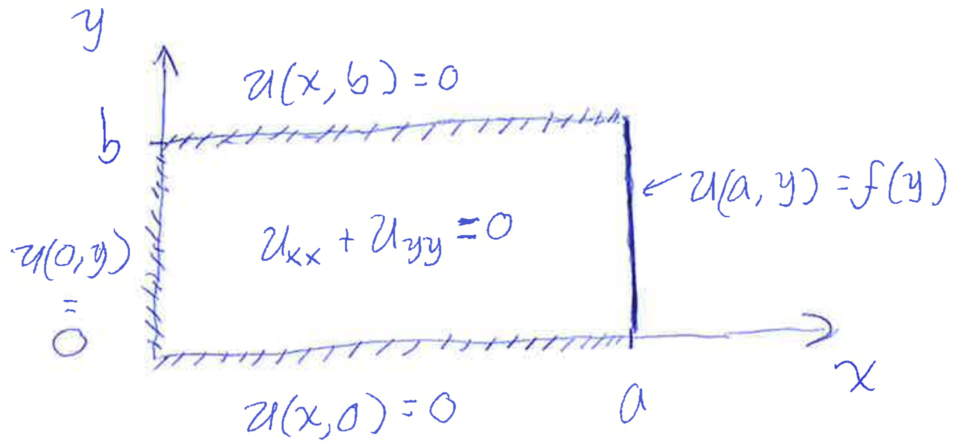
Problema de Dirichlet em um Retângulo

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \leftarrow \text{Eq. Dif.}$$

no retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$

condições de contorno $\begin{cases} u(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(x,b) = 0 & \text{se } 0 < x < a \\ u(0,y) = 0 \quad \text{e} \quad u(a,y) = \underbrace{f(y)}_{\text{conhecida}} & \text{se } 0 \le y \le b \end{cases}$

homogênea



Usando o Método de Separação de Variáveis

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Colocamos dentro da Eq. de Laplace

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$X''Y = -XY''$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \leftarrow \text{constante}$$

Se $\dfrac{X''}{X} = \lambda \Rightarrow X'' = \lambda X$ e

$$\boxed{X'' - \lambda X = 0}$$

Se $-\dfrac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow -Y'' = \lambda Y$ e

$$\boxed{Y'' + \lambda Y = 0}$$

Duas equações diferenciais ordinárias de 2da ordem acopladas por λ.

Usando as condições de contorno

1. $u(x,0) = 0$

   $X(x)\,Y(0) = 0$

   $X(x) \neq 0$ e $\boxed{Y(0) = 0}$

2. $u(x,b) = 0$

   $X(x)\,Y(b) = 0$

   $X(x) \neq 0$ e $\boxed{Y(b) = 0}$

3. $u(0,y) = 0$

   $X(0)\,Y(y) = 0$

   $\boxed{X(0) = 0}$ $Y(y) \neq 0$

Temos dois problemas de autovalores e autofunções: um para X e outro para Y:

Primeiro em $X(x)$
$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Segundo em $Y(y)$.
$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \ \text{e} \ Y(b) = 0 \end{cases}$$
→ Já estudado no contexto da Eq. Dif. de Condução do Calor

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \leftarrow n = 1, \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

positivos
autovalores

$$Y(y) = \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{b} y\right)$$

autofunções

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$r^2 - \lambda = 0$ Eq. Característica

$r^2 - \mu^2 = 0 \qquad \lambda = \mu^2 > 0$

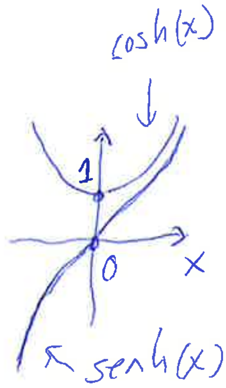
$r_1 = \mu$ e $r_2 = -\mu$ Tipo I

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$ ou

$$X(x) = k_1 \cosh(\mu x) + k_2 \operatorname{senh}(\mu x)$$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}[e^{x} + e^{-x}]$

$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}[e^{x} - e^{-x}]$



Usando a condição de contorno: $X(0) = 0$

$$X(0) = 0 = k_1 \underbrace{\cosh(0)}_{1} + k_2 \cancel{\operatorname{senh}(0)}^{0}$$

$$k_1 = 0$$

Consequentemente K_2 está livre para variar

e $X(x) = \operatorname{senh}(\mu x)$ são autofunções $\mu = \frac{n\pi}{b}$

Isto é, $X(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$

Para $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$u_n = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{b} y\right)$ ← Autofunções em $u(x,y)$.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y)$$ ← Combinação Linear

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(n\frac{\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{b} y\right)}$$ Solução Geral.

Usando a última condição de contorno: $u(a,y) = f(y)$

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n \operatorname{senh}\left(n\frac{\pi}{b} a\right)} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{b} y\right) = f(y)$$

Coeficientes da Série de Fourier em Senos da Extensão Periódica Ímpar de $f(y)$ com período $2b$.

$$\boxed{c_n \operatorname{senh}\left(n\frac{\pi}{b} a\right) = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{b} y\right) dy}$$

Resumindo,

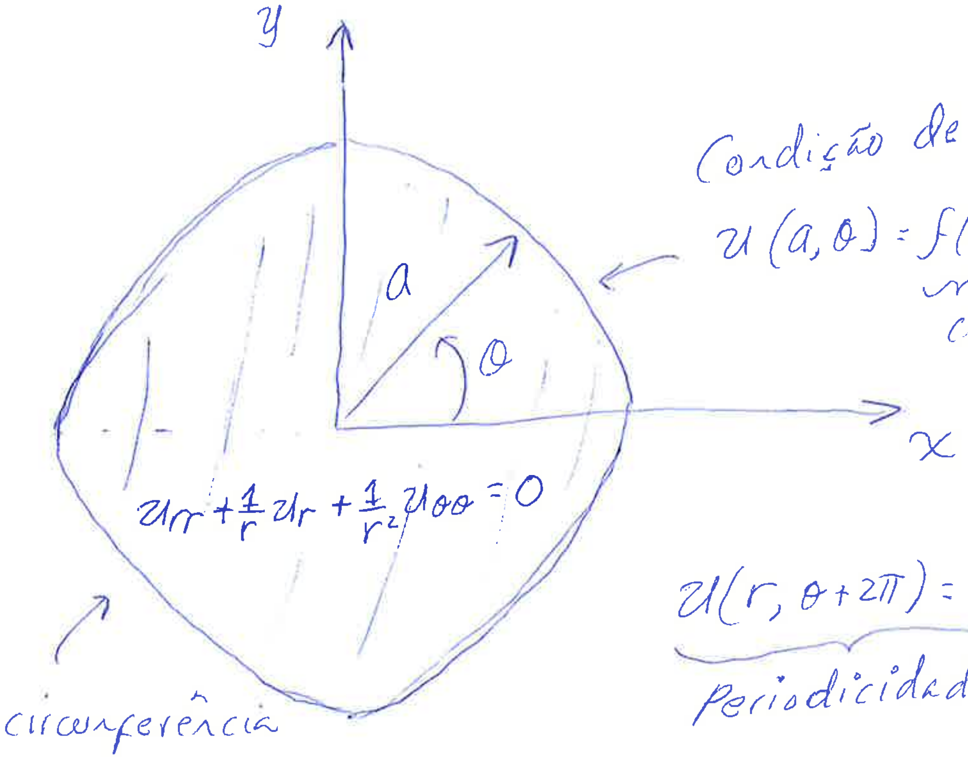
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = 0 \quad u(x,b) = 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < a \\ u(0,y) = 0 \quad u(a,y) = f(y) \quad \text{se} \quad 0 < y < b \end{cases}$$

tem como solução

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(n \frac{\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{b} y\right)$$

onde $c_n \operatorname{senh}\left(n \frac{\pi}{b} a\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{b} y\right) dy$

Problema de Dirichlet em um Círculo



Condição de Contorno

$u(a,\theta) = f(\theta)$ conhecida

$$\underbrace{u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)}_{\text{Periodicidade em } \theta}$$

$$\underbrace{u(r,\theta) \leq M \quad \text{para} \quad r \leq a}_{u \text{ é limitada}}$$

Em coordenadas polares a equação de Laplace se transforma em

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad \leftarrow \text{Eq. Dif. de Laplace}$$

$$u(r,\theta) = ?$$

A demostração encontram em
www.mat.ufrgs.br/~brietzke/textos/aula20.pdf

Problema de Dirichlet em um Círculo

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & \leftarrow \text{Eq. Dif.}, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi, \text{ Condição de Contorno} \\ u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta) & \rightarrow \text{Periodicidade em } \theta \\ u(r,\theta) \le M, \; \forall r,\theta & \rightarrow \text{Limitada} \end{cases}$$

Usando o Método De Separação De Variáveis

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$u_r = R'\Theta \qquad u_\theta = R\Theta'$$

$$u_{rr} = R''\Theta \qquad u_{\theta\theta} = R\Theta''$$

Colocando as derivadas anteriores na eq. de Laplace

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0$$

$$\left(R'' + \frac{1}{r} R'\right)\Theta = -\frac{1}{r^2} R\Theta''$$

$$\frac{r^2}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$ ← constante a ser determinada

$$\begin{cases} \dfrac{r^2}{R}\left(R'' + \dfrac{1}{r}R'\right) = \lambda \\ -\dfrac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$ → Conjunto de Duas Eq. Dif. Ordinárias Acopladas (por λ)

Vamos estudar primeiro a eq. dif. $\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$.

E vamos considerar três casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(1) Se $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = \Theta''(\theta) - \mu^2\Theta(\theta) = 0$$

$k^2 - \mu^2 = 0 \rightarrow$ Eq. Característica

$k_1 = \mu$ e $k_2 = -\mu$ Tipo I

$$\Theta_{gh}(\theta) = C_1 e^{\mu\theta} + C_2 e^{-\mu\theta}$$

mas $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$

$R(r)\Theta(\theta + 2\pi) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$$ ← periodicidade

$$\Theta(\theta+2\pi) = C_1 e^{\mu(\theta+2\pi)} + C_2 e^{-\mu(\theta+2\pi)}$$

$$= C_1 e^{\mu\theta} e^{2\mu\pi} + C_2 e^{-\mu\theta} e^{-2\mu\pi}$$

e

$$C_1 e^{\mu\theta} e^{2\pi\mu} + C_2 e^{-\mu\theta} e^{-2\pi\mu} = C_1 e^{\mu\theta} + C_2 e^{-\mu\theta}$$

A igualdade somente será válida se $C_1 = C_2 = 0$

Consequentemente NÃO existem para $\lambda < 0$ outras soluções além da trivial.

② Se $\lambda = 0$

$$\Theta''(\theta) + \cancel{\lambda \Theta(\theta)}^{0} = 0$$

$$\Theta''(\theta) = 0$$

$$\Theta(\theta) = C_1 \theta + C_2$$

Usando que $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$

$$C_1(\theta+2\pi) + \cancel{C_2} = C_1\theta + \cancel{C_2}$$

$$C_1 = 0$$

Logo, existem soluções do tipo $\Theta(\theta) = C_2$. Isto é, $\Theta(\theta) = 1$ é uma autofunção, correspondente ao autovalor $\lambda = 0$.

Com $\lambda = 0$ a eq. para $R(r)$ fica

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \cancel{\lambda R(r)}^{0} = 0$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0 \leftarrow \text{Eq. de Cauchy-Euler}$$

Propomos $R(r) = r^m$

$R'(r) = m r^{m-1}$

$R''(r) = m(m-1) r^{m-2}$

$$r^2 m(m-1) r^{m-2} + r m r^{m-1} = 0$$

$$m(m-1) r^m + m r^m = 0$$

$$r^m [m(m-1) + m] = 0$$

$r \neq 0 \quad r^m \neq 0$

$$m(m-1) + m = 0$$

$$m^2 - \cancel{m} + \cancel{m} = 0$$

$\boxed{m = 0}$ Solução Dupla
Tipo II

$$R(r) = C_1 r^0 + C_2 r^0 \ln(r)$$

$$R(r) = C_1 + C_2 \ln(r)$$

Como $R(r)$ precisa ser limitada $C_2 = 0$

$u(r,\theta) \leq M$. Limitada

$R(r)\,\Theta(\theta) \leq M$. "

$R(r) \leq m$ "

Porém, se $r \to 0 \Rightarrow \ln(r) \to -\infty$

Então, se $\lambda = 0$ autovalor $\Rightarrow R(r) = 1$ é autofunção correspondente

Para $u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) = 1 \cdot 1$

$u(r,\theta) = 1 \leftarrow$ Autofunção Correspondente ao autovalor $\lambda = 0$.

3 Se $\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \mu^2$, $\mu > 0$. As eq. dif. ordinárias se transformam em

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \mu^2 R = 0 \\ \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0 \end{cases}$$

$\Theta''(\theta) + \mu^2 \Theta(\theta) = 0$

$k^2 + \mu^2 = 0$ Eq. Característica

$k_{1,2} = \pm i\mu$ Tipo III.

$\Theta(\theta) = C_1 \cos(\mu\theta) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\theta)$

$\Theta(\theta + 2\pi) = C_1 \cos(\mu(\theta + 2\pi)) + C_2 \operatorname{sen}(\mu(\theta + 2\pi))$

$= C_1 \cos(\mu\theta + 2\pi\mu) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\theta + 2\pi\mu)$

Como $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$

$\boxed{\mu = n} \longrightarrow n \in \mathbb{N}$, $n = 1, \ldots$

$r^2 R''(r) + rR'(r) - \mu^2 R(r) = 0 \leftarrow$ Eq. de Cauchy-Euler

Propomos $R(r) = r^m$

$R'(r) = m r^{m-1}$

$R''(r) = m(m-1) r^{m-2}$

$m(m-1) r^m + m r^m - \mu^2 r^m = 0$

$r^m \left(m(m-1) + m - \mu^2 \right) = 0$

$r \neq 0$ e $m^2 - \mu^2 = 0$

$m = \pm \mu$ Tipo I

$R(r) = C_1 r^{\mu} + C_2 r^{-\mu}$

Quando $r \to 0$ temos que $r^{-\mu} \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$ (u é limitada)

Nesto caso os autovalores são $\lambda = \mu^2 = n^2$

$$\boxed{\lambda_n = n^2} \quad n = 1, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$$

Autovalores

e as autofunções correspondentes

Em $\Theta(\theta)$
$$\begin{cases} \Theta_n(\theta) = \cos(n\theta) \text{ e} \\ \Theta_n(\theta) = \operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

Em $R(r)$
$$\{ R_n(r) = r^n$$

Em $u(r,\theta)$
$$\begin{cases} u_n(r,\theta) = r^n \cos(n\theta) \text{ e} \\ u_n(r,\theta) = r^n \operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

A solução geral para $u(r,\theta)$ será uma combinação linear de todas as autofunções (s. fundamentais)

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[C_n \cos(n\theta) + K_n \operatorname{sen}(n\theta) \right]$$

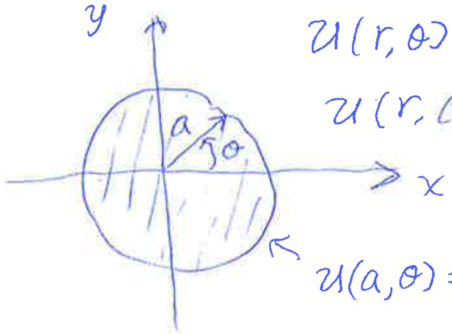
Usando a condição de contorno; $u(a,\theta) = f(\theta)$

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[C_n \cos(na) + K_n \operatorname{sen}(na) \right]$$

Essa é uma expansão de $f(\theta)$ em serie de fourier, Periodo 2π.
Onde se assume $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$.

coeficientes das series
$$\begin{cases} a^n C_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \\[2ex] a^n K_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(\theta) d\theta \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Resumindo, se



$u(r,\theta) \leq M\,, \quad M \in \mathbb{R}$

$u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$

$u(a,\theta) = f(\theta)$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0\,, & 0 < r < a\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta)\,, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)\,, & \forall r,\theta \\ u(r,\theta) \leq M\,, \quad M \in \mathbb{R}\,, & \forall r,\theta \end{cases}$$

A solução é

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[C_n \cos(n\theta) + k_n \operatorname{sen}(n\theta) \right]$$

onde $\quad a^n C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \,, \quad n = 0, 1, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$

e $\quad a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta \,, \quad n = 1, 2, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$