Transformada de Laplace - Aula 2, 6ta Aula do Curso

- Primeiro Teorema da Translação

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e a for um número real qualquer, então

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

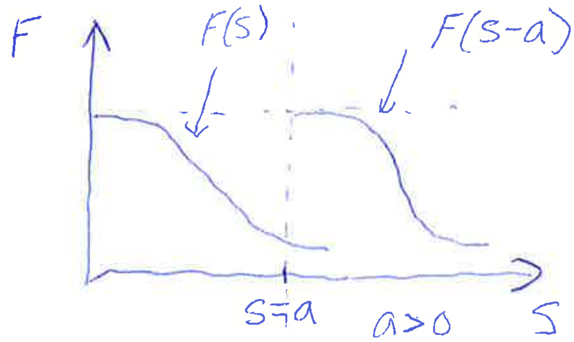
Prova: Usamos a definição de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a)$$

trocar $s \to s-a$

$$\int e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

- Considerando s uma variável real



- Se $a>0$ desloca para a direita

- Se $a<0$ desloca para a esquerda

- Ex. Calcule $\mathcal{L}\{e^{5t} t^3 - e^{-2t}\cos(4t)\}$.

Da tabela de transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0 \text{ e } n = \text{inteiro positivo}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} - \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(4t)\} =$$

$$= \mathcal{L}\{t^3\}\Big|_{s\to s-5} - \mathcal{L}\{\cos(4t)\}\Big|_{s\to s+2} =$$

$$= \frac{3!}{s^4}\Big|_{s\to s-5} - \frac{s}{s^2+4^2}\Big|_{s\to s+2} =$$

$$= \frac{3!}{(s-5)^4} - \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$

- Forma Inversa do Primeiro Teorema da Translação

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t)$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

- Ex. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2}$$ frações parciais

fatores lineares repetidos

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{A(s-3)+B}{(s-3)^2} \rightarrow$$

$2s+5 = As - 3A + B$

$\boxed{A=2}$

$-3A+B=5$

$B=5+3A$

$B=5+6$

$\boxed{B=11}$

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s}\right|_{s\to s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3}\right\}$$

Da tabela de Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

ou $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$

$n =$ inteiro positivo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3t}\cdot t$$

Ex. Resolva $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 17$.

Sol. $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 6\mathcal{L}\{y'(t)\} + 9\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = \mathcal{L}\{t^2|_{s\to s-3}\}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \left.\frac{2!}{s^3}\right|_{s\to s-3}$$

$$s^2 Y(s) - 2s - 17 - 6sY(s) + 12 + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2 Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2s+5}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

No exercício anterior encontramos que

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

Logo $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\Big|_{s\to s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\Big|_{s\to s-3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\Big|_{s\to s-3}\right\}$$

da tabela de transformadas de Laplace

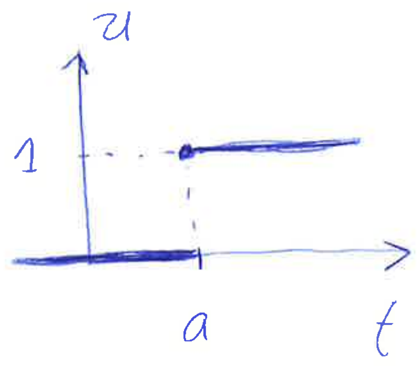
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n \quad , n = \text{inteiro positivo}$$

$$y(t) = 2e^{3t} + 11e^{3t}\cdot t + \frac{1}{12}e^{3t}\cdot t^4$$

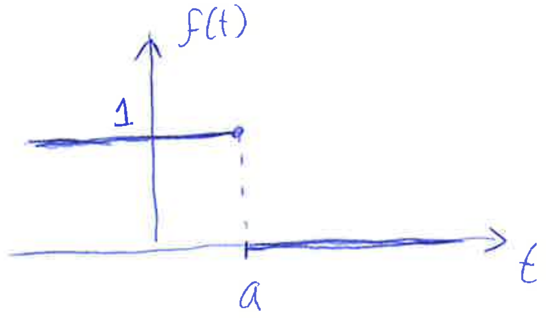
Algumas das aplicações elementares mais interessantes das transformadas de Laplace ocorrem na solução de eq. dif. lineares sob a ação de forças descontínuas.

Para tratar de funções com salto é definida a função degrau unitário ou função de Heaviside.

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & , \text{se } t < a \\ 1 & , \text{se } t \geq a \end{cases}$$

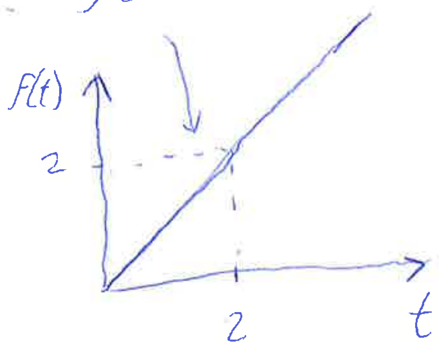


$$f(t) = 1 - u(t-a)$$

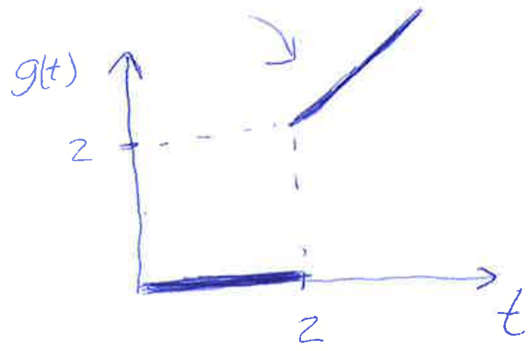


-- A função degrau unitário quando multiplicada por outra função liga (se $u=1$) ou desliga (se $u=0$) essa função.

Ex. $f(t) = t$

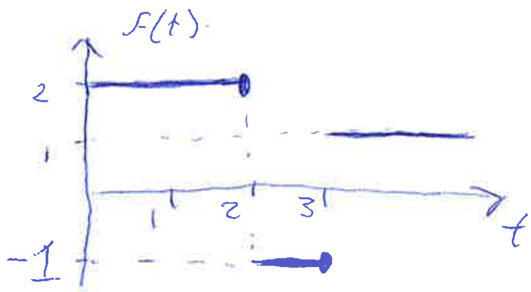


$$g(t) = f(t)\, u(t-2) = t\, u(t-2)$$



- A função degrau unitário também pode ser usada para escrever funções definidas por partes em uma forma compacta.

Ex. $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \\ -1 & \text{se} \quad 2 < t \le 3 \\ 1 & \text{se} \quad 3 < t \end{cases}$



$$f(t) = 2 - 3u(t-2) + 2u(t-3)$$

- Uma função do tipo

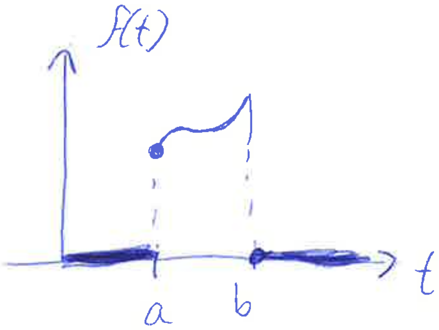
$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t < a \\ h(t), & t \ge a \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f(t) = g(t) - g(t)\,u(t-a) + h(t)\,u(t-a)$$

e

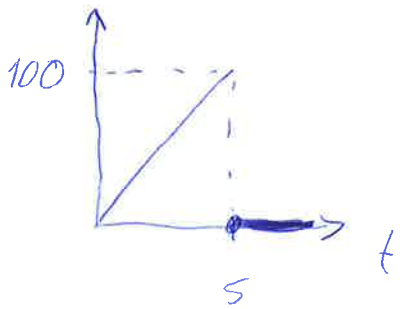
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ g(t), & a \le t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases}$$



pode ser escrita como

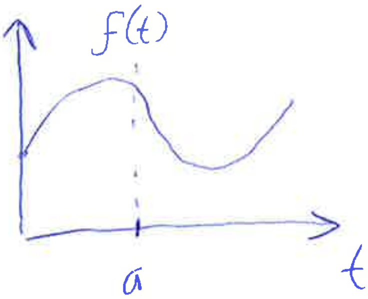
$$f(t) = g(t)\left[u(t-a) - u(t-b)\right]$$

Ex. Expresse $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ em termos da função degrau unitário. Faça o gráfico.

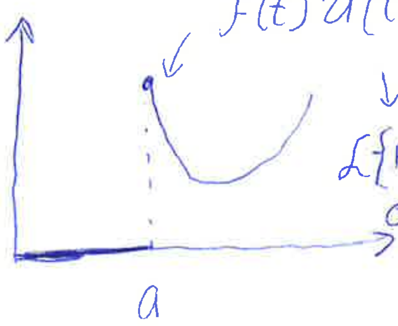


Sol.

$$f(t) = 20t - 20t\,u(t-5)$$



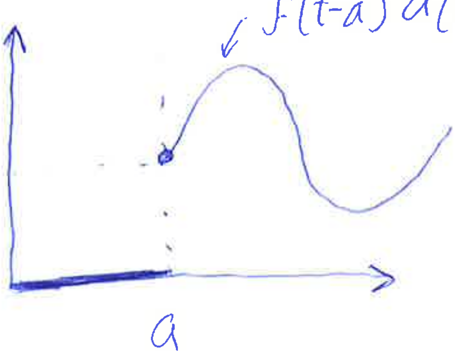
$f(t)\,u(t-a)$



$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$f(t-a)\,u(t-a)$



$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Segundo Teorema da Translação

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $a>0$, então

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Prova: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt = \int_0^a e^{-st} f(t-a)\cdot 0\cdot dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\cdot 1\cdot dt$

$\nu = t-a$ $\quad t=\nu+a$

$d\nu = dt$

Se $t=a \rightarrow \nu=0$

$t=\infty \rightarrow \nu=\infty$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(\nu+a)} f(\nu)\,d\nu$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\nu} f(\nu)\,d\nu$$

$\nu = t$ variável de integração muda.

$$= e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$

$$= e^{-as}F(s) \qquad \blacksquare$$

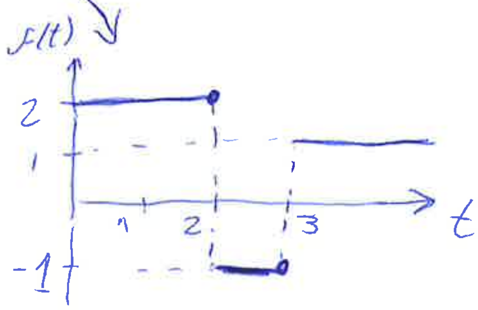
- Se $f(t) = 1 \Rightarrow f(t-a) = 1$ e $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = F(s)$

então usando o segundo teorema da translação

$$\mathcal{L}\{1\cdot u(t-a)\} = \boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}}$$

← Transformada de Laplace da função degrau unitário.

- Exemplo: $f(t) = 2 - 3u(t-2) + 2u(t-3)$



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{u(t-2)\} + 2\mathcal{L}\{u(t-3)\}$$

$$= \frac{2}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s}$$

Forma Inversa do Segundo Teorema da Translação

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

Ex. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s} + \frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{1}{s-4}}\,\underbrace{e^{-2s}}_{a=2}\Big\} + \mathcal{L}^{-1}\Big\{\underbrace{\frac{s}{s^2+9}}\,\underbrace{e^{-\pi s/2}}_{a=\pi/2}\Big\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos(3t)$$

$$= e^{4(t-2)}u(t-2) + \cos(3(t-\pi/2))\,u(t-\pi/2) \quad ▨$$

Forma Alternativa do Segundo Teorema da Translação

$$\mathcal{L}\{f(t)\,u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\} = e^{-as}F(s+a)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Segundo Teorema da Translação

Prova: $\mathcal{L}\{f(t)\,u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t)\,dt$

trocamos $u = t-a$, $du = dt$, $t = u+a$, se $t=a \to u=0$, se $t=\infty \to u=\infty$

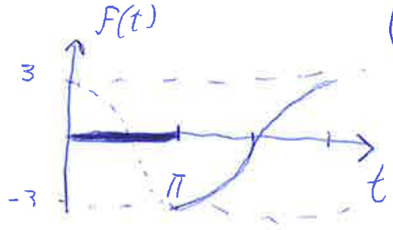
$$\mathcal{L}\{f(t)\,u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u+a)\,du = \mathcal{L}\{f(t+a)\}\cdot e^{-sa}$$

$(t=u)$ ← nova troca

$$\int_0^\infty e^{-su}f(u+a)\,du = \mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Ex. Resolva $y'+y=f(t)$, $y(0)=5$ e

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ 3\cos(t), & t\ge\pi.\end{cases}$$



Sol. $f(t)$ pode ser escrita como

$$f(t)=3\cos(t)\,u(t-\pi)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados da eq. dif.

$$\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \mathcal{L}\{y\}=Y(s)$$

$$sY(s)-y(0)+Y(s)=\mathcal{L}\{3\cos(t)\,u(t-\pi)\} \qquad a=\pi$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\,u(t-a)\}=e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

$$\cos(t+a)=\cos(t+\pi)=-\cos(t)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(t+a)\}=-\mathcal{L}\{\cos(t)\}=-\frac{s}{s^2+1}$$

$$sY(s)-5+Y(s)=-\frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$Y(s)(s+1)=5-\frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$$Y(s)=\frac{5}{s+1}-\underbrace{\frac{3s\,e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+1)}}_{\text{separar na soma de frações parciais}}$$

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{As^2+A+Bs^2+Cs+Bs+C}{(s+1)(s^2+1)}$$

Segundo Grau, sem soluções reais

$$s = (A+B)s^2 + (C+B)s + (A+C)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \xrightarrow{I} B=-A \\ C+B=1 \xrightarrow{III} C-A=1 \\ A+C=0 \xrightarrow{IV} C+A=0 \end{cases}$$

$$2C = 1$$

$$C = 1/2 \xrightarrow{VI} A = -1/2 \xrightarrow{VIII} B = 1/2$$

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\}$$

$a=\pi$ $a=\pi$ $a=\pi$

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}u(t-\pi) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi) - \frac{3}{2}\cos(t-\pi)u(t-\pi)$$

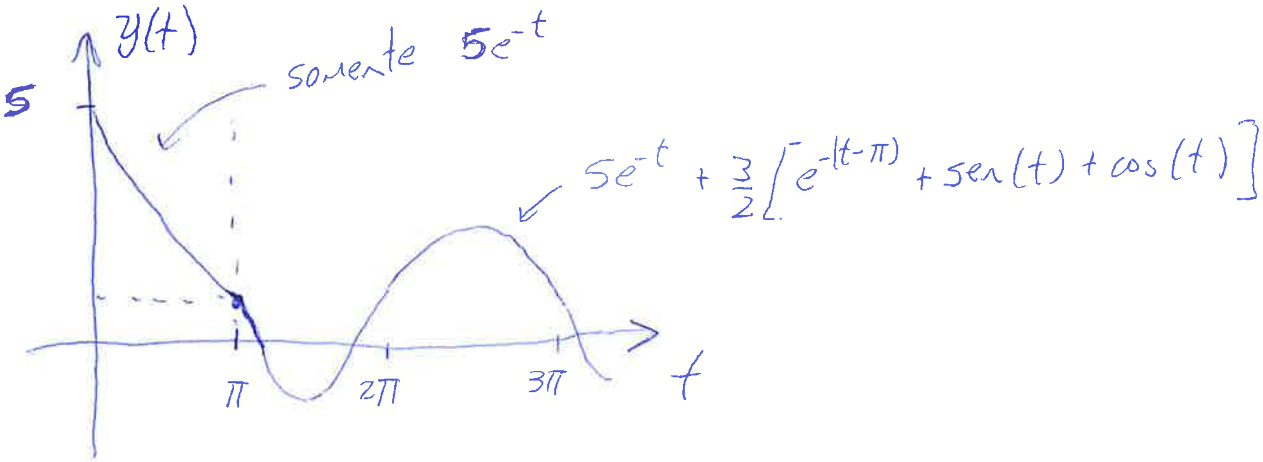
usamos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{at}$, $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-as}\} = f(t-a)u(t-a)}$ segundo teorema da translação

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \operatorname{sen}(at)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$

Mas $\operatorname{sen}(t-\pi) = -\operatorname{sen}(t)$ e $\cos(t-\pi) = -\cos(t)$

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}u(t-\pi) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}(t)u(t-\pi) + \frac{3}{2}\cos(t)u(t-\pi)$$

$$y(t) = \begin{cases} 5e^{-t}, & \text{se } 0 \le t < \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)} + \operatorname{sen}(t) + \cos(t)\right], & \text{se } t \ge \pi \end{cases}$$


y(t)
somente 5e^-t
5
5e^-t + 3/2 [e^-(t-π) + sen(t) + cos(t)]
π
2π
3π
t