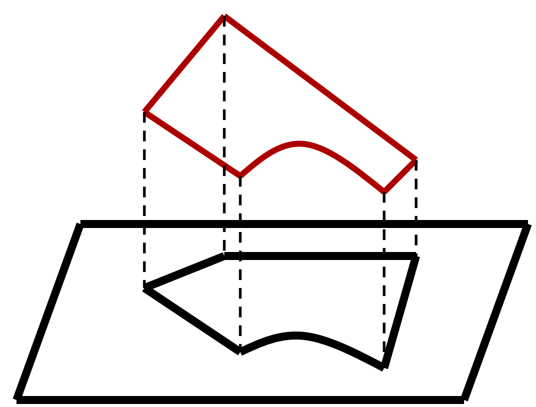
Cálculo de Áreas

Avaliação de Áreas

Fundamental para planejamentos de engenharia, agricultura, loteamentos, limites de preservação ambiental, levantamentos cadastrais para compra e venda, partilha, escrituras, etc.

As **áreas topográficas** são **projeções horizontais** das obras projetadas e executadas pela engenharia.



Avaliação de Áreas

O processo de cálculo de áreas pode ser:

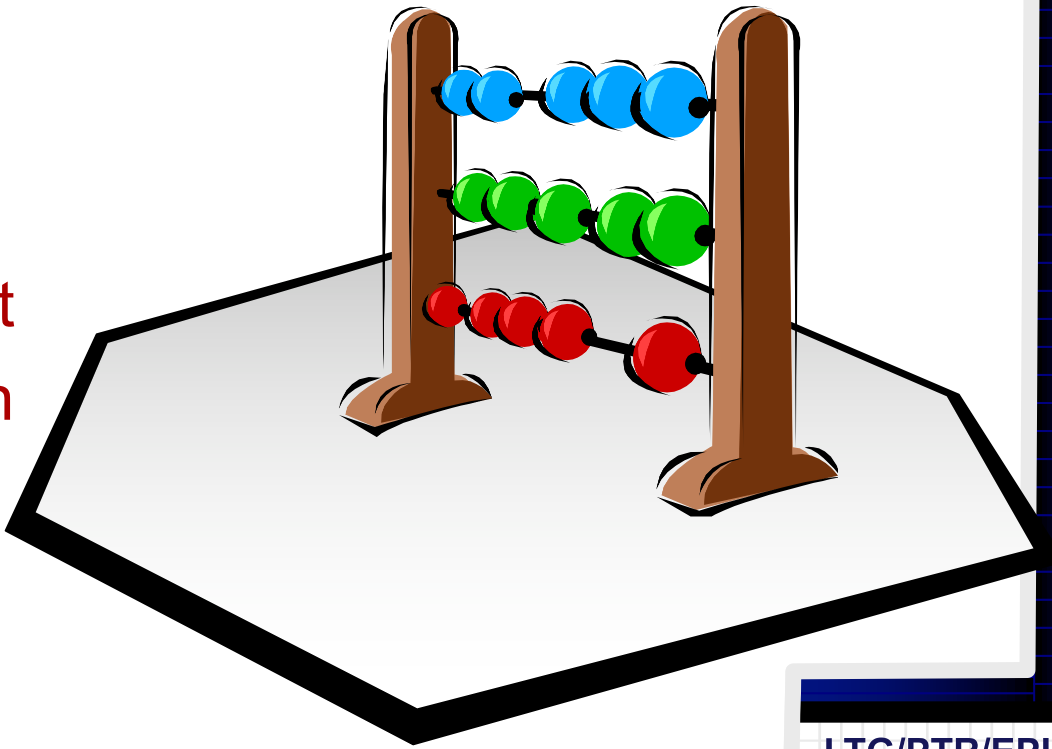
- Analítico;
- Computacional;
- Gráfico;
- Mecânico;
- Misto.

Avaliação de Áreas

Processos Analíticos

Foram os primeiros métodos desenvolvidos para o cálculo de área de poligonais. São baseados em fórmulas matemáticas, limitantes da figura.

- Fórmula de Gauss
- Método de Bezout
- Método de Poncelet
- Método de Simpson



Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

(Áreas delimitadas por poligonais regulares: triângulos, trapézios, etc)

Basea-se na soma e subtração da área de trapézios formados pelos vértices e projeções sobre os eixos N, E.

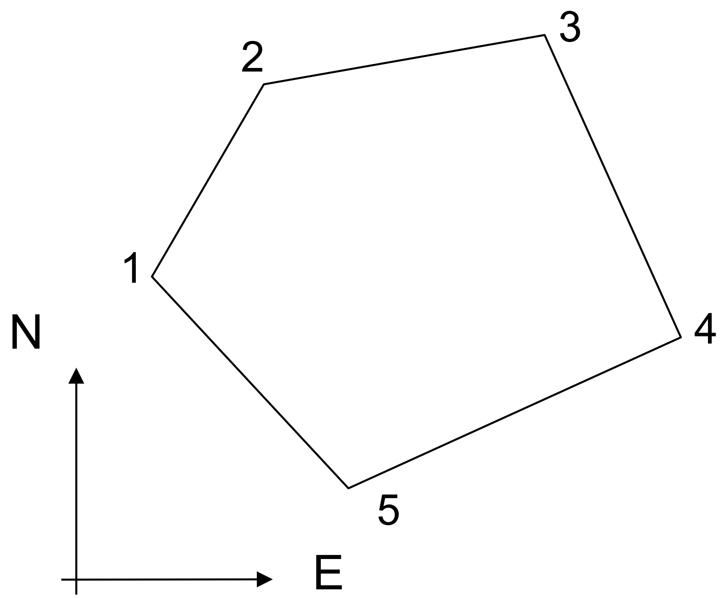
Essa operação pode ser expressa por diferentes equações, como a equação a seguir, que utiliza a propriedade distributiva.

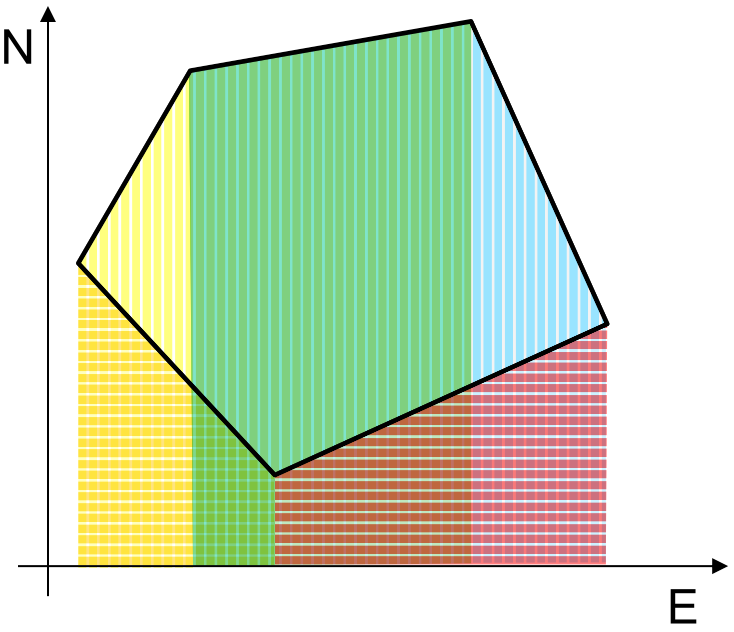
$$S = 0,5 \times \left(\sum_{i=1}^{n} N_i \times E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} E_i \times N_{i+1} \right)$$

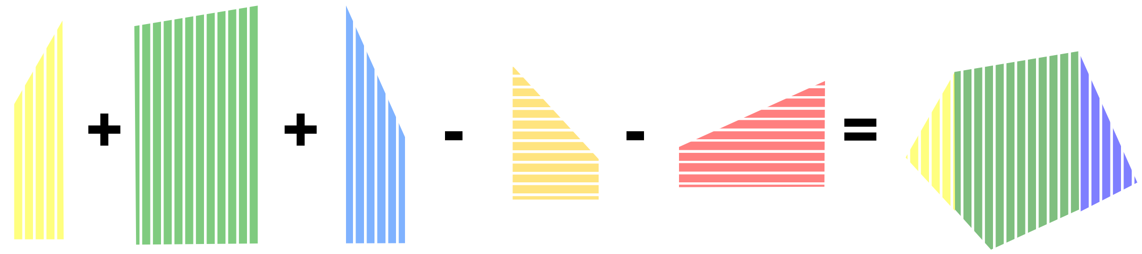
Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

Exemplo: Base dos trapézios no eixo “E”







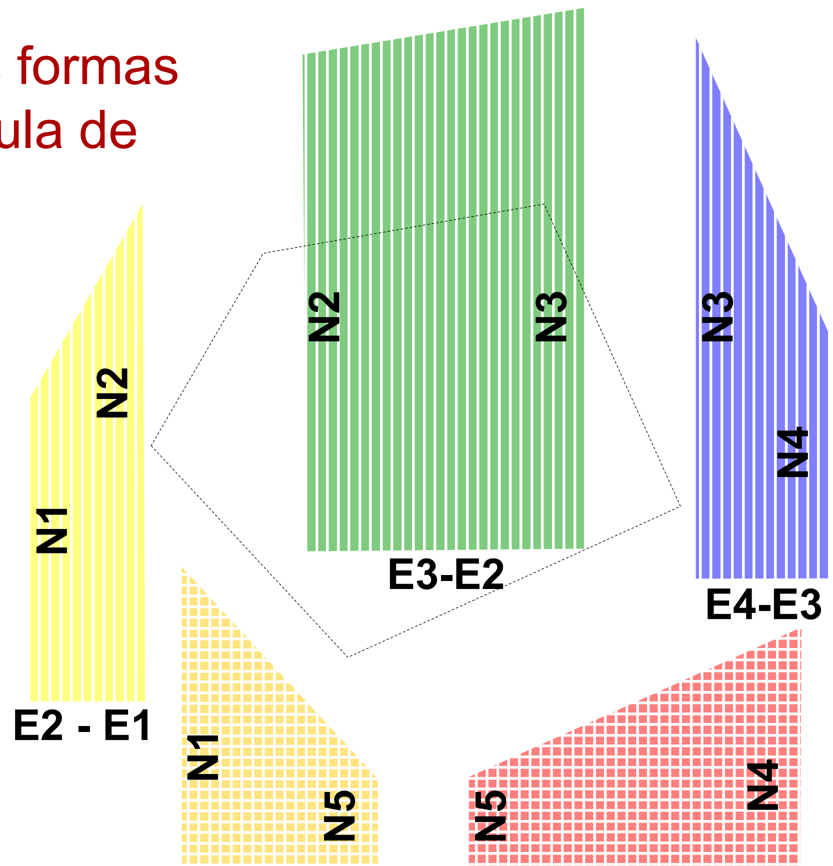
Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

Exemplo: Base dos trapézios no eixo "E"

S = 0,5 x [(E2-E1) x (N1+N2) + (E3-E2) x (N3+N2) + (E4-E3) x (N4+N3) + (E5-E4) x (N5+N4) + (E1-E5) x (N1+N5)]

(essa é uma das formas de usar a fórmula de Gauss)

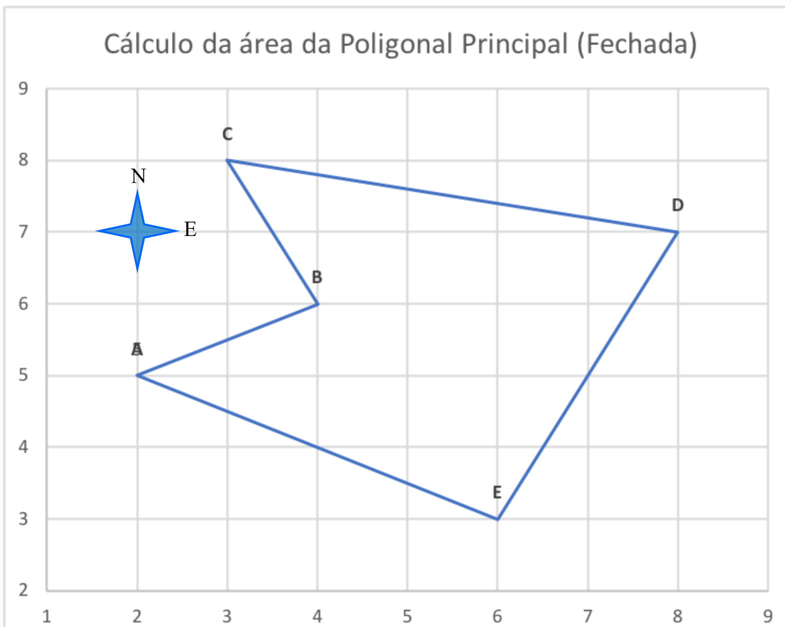


Exemplo de aplicação do método de Gauss

Est	Coordenadas	
	N(m)	E(m)
A	N_A	E_A
B	N_B	E_B
C	N_C	E_C
D	N_D	E_D
E	N_E	E_E
A	N_A	E_A

Est	Coordenadas	
	N(m)	E(m)
A	5	2
B	6	4
C	8	3
D	7	8
E	3	6
A	5	2

$N_i \times E_{i+1}$	$E_i \times N_{i+1}$
Σ+	Σ-
5 x 4 = 20	
6 x 3 = 18	2 x 6 = 12
8 x 8 = 64	4 x 8 = 32
7 x 6 = 42	3 x 7 = 21
3 x 2 = 6	8 x 3 = 24
	6 x 5 = 30



Σ+ = 150	Σ- = 119
2S = 150 – 119 = 31	
S = 15,5 m²	

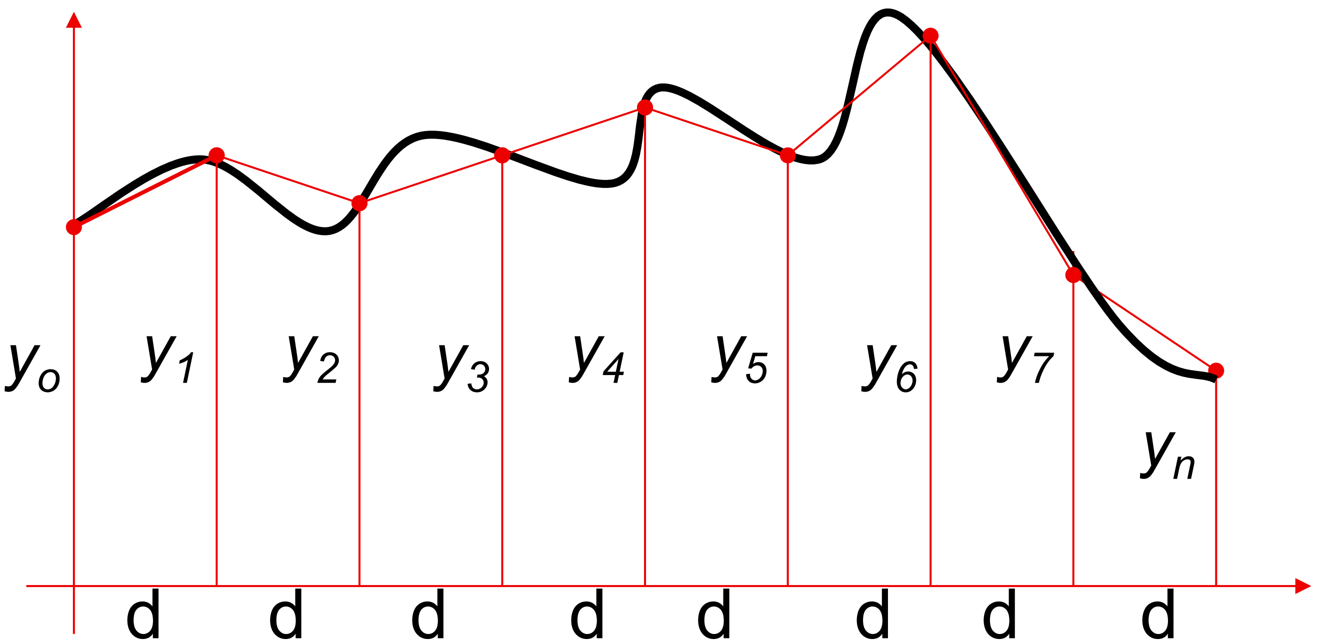
$$S = 0{,}5 \times \left(\sum_{i=1}^{n} N_i \times E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} E_i \times N_{i+1} \right)$$

Processos Analíticos

MÉTODO DE BEZOUT

(Áreas com limites irregulares)

Para $\boldsymbol{y_n}$ qualquer (par ou ímpar) esse método interpreta a curva com uma série de trapézios de altura ***d***.



Processos Analíticos

MÉTODO DE BEZOUT

O $\boldsymbol{y_n}$ pode ser par ou ímpar

$$S = d \times \left(\frac{y_o + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Onde:

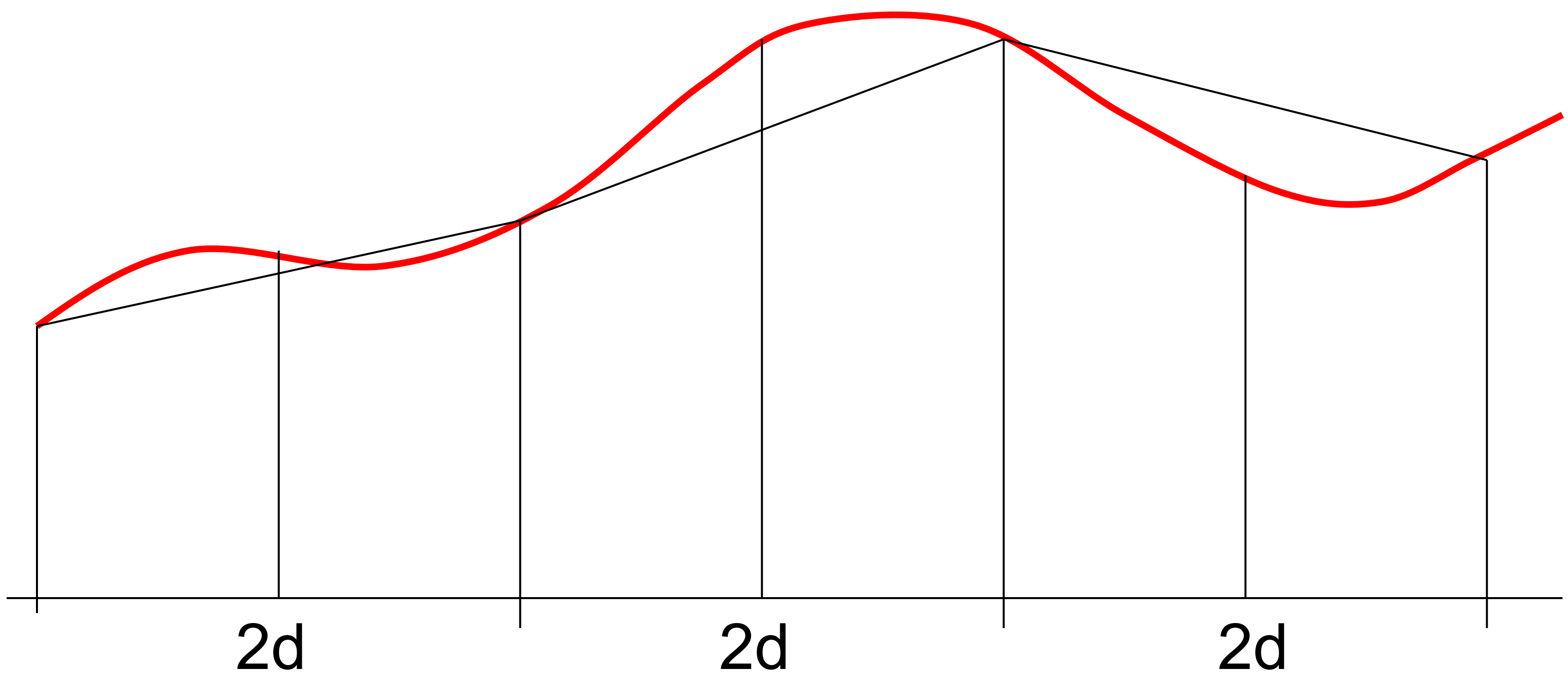
$$\sum y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}$$

OBS: $\sum y_i$ = somatório das ordenadas (***y***) internas.
Estão excluídas a primeira ($\boldsymbol{y_o}$) e a última ($\boldsymbol{y_n}$)

MÉTODO DE PONCELET

(Áreas com limites irregulares)

Para y_n par, interpreta a curva como uma série de trapézios de altura ***2d***.



Processos Analíticos

MÉTODO DE PONCELET

O $\boldsymbol{y_n}$ deve, obrigatoriamente, ser par.

$$S = d \times \left(2 \times \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{(y_o + y_n) - (y_1 + y_{n-1})}{4} \right)$$

Onde:

$$\sum y_i = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}$$

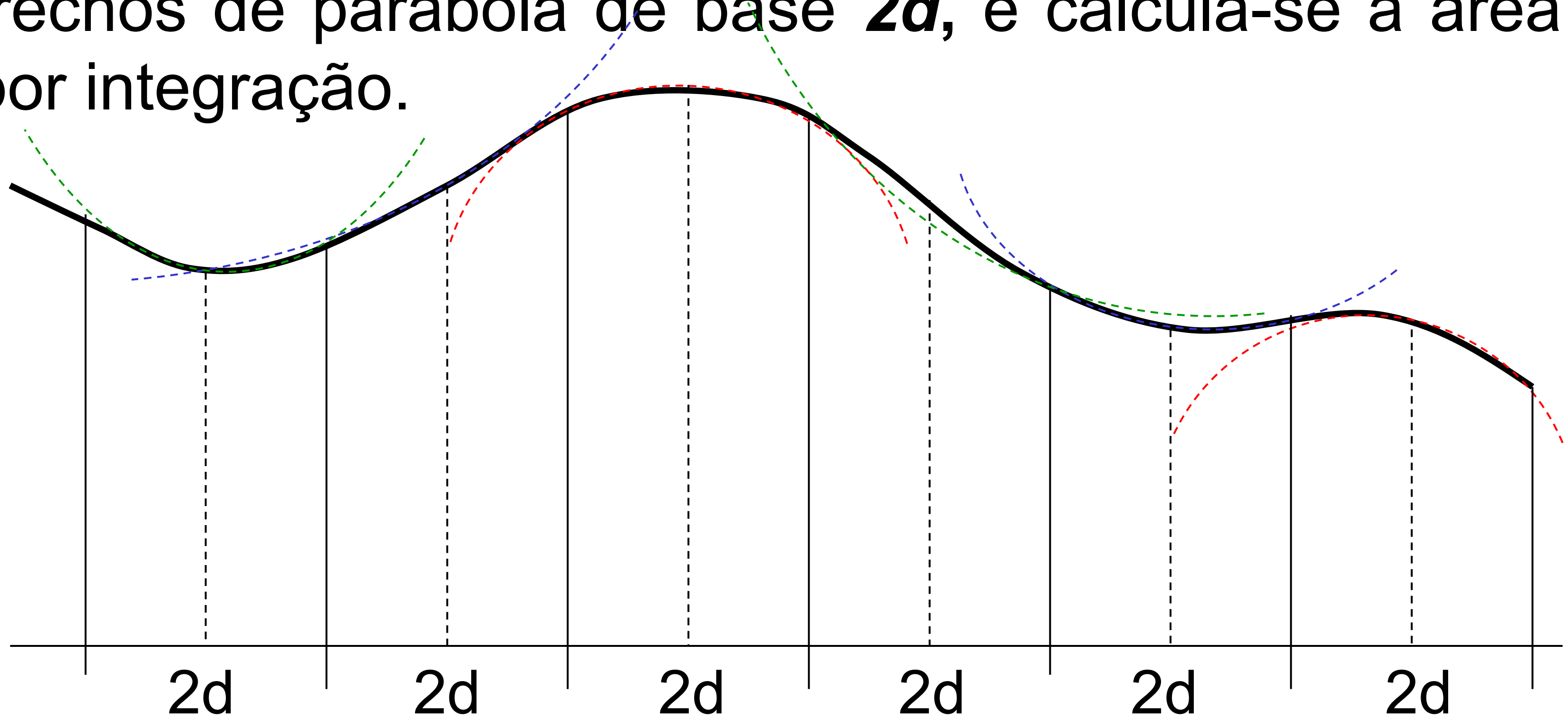
OBS: $\sum y_i$ = somatório das ordenadas ($\boldsymbol{y}$) ímpares

Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON

(Áreas com limites irregulares)

Para y_n par, interpreta a curva como uma série de trechos de parábola de base ***2d***, e calcula-se a área por integração.



Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON

O $\boldsymbol{y_n}$ deve, obrigatoriamente, ser par.

$$S = \frac{d}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \cdot \sum y_p + 4 \cdot \sum y_i \right)$$

Onde:

$$\sum y_p = y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2}$$

OBS: $\sum y_p$ = somatório das ordenadas internas (***y***) pares

$$\sum y_i = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}$$

OBS: $\sum y_i$ = somatório das ordenadas internas (***y***) ímpares

Exemplo de cálculo pelos Processos Analíticos

Supondo que uma superfície extrapoligonal tenha sido dividida em alturas conforme relacionadas abaixo e que ***d*** = 2,0 metros.
Pede-se calcular a área extrapoligonal pelos três métodos analíticos apresentados.

y_o = 3,0 m
y_1 = 3,5 m
y_2 = 3,8 m
y_3 = 3,2 m
y_4 = 2,6 m
y_5 = 2,6 m
y_6 = 2,4 m
y_7 = 2,0 m
y_8 = 1,8 m

Exemplo de cálculo pelos Processos Analíticos

$$S = d \times \left(\frac{y_o + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Soluções:

a) Usando a fórmula de **BEZOUT**

$$\sum y = 3{,}5 + 3{,}8 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}6 + 2{,}4 + 2{,}0 = 20{,}1\ m$$

$$S = 2{,}0 \times \left[\frac{3{,}0 + 1{,}8}{2} + 20{,}1 \right] = 45{,}00\ m^2$$

$y_o = 3{,}0$ m
$y_1 = 3{,}5$ m
$y_2 = 3{,}8$ m
$y_3 = 3{,}2$ m
$y_4 = 2{,}6$ m
$y_5 = 2{,}6$ m
$y_6 = 2{,}4$ m
$y_7 = 2{,}0$ m
$y_8 = 1{,}8$ m

Exemplo de cálculo pelos Processos Analíticos

Soluções:

$$S = d \times \left(2 \times \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{(y_o + y_n) - (y_1 + y_{n-1})}{4} \right)$$

b) Usando a fórmula de **PONCELET**

$$\sum y_i = 3{,}5 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 = 11{,}3\ m$$

$$S = 2{,}0 \times \left[2 \times 11{,}3 + \frac{(3{,}0 + 1{,}8) - (3{,}5 + 2{,}0)}{4} \right] = 44{,}85\ m^2$$

$y_o = 3{,}0$ m
$y_1 = 3{,}5$ m
$y_2 = 3{,}8$ m
$y_3 = 3{,}2$ m
$y_4 = 2{,}6$ m
$y_5 = 2{,}6$ m
$y_6 = 2{,}4$ m
$y_7 = 2{,}0$ m
$y_8 = 1{,}8$ m

Exemplo de cálculo pelos Processos Analíticos

Soluções:

$$S = \frac{d}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \cdot \sum y_p + 4 \cdot \sum y_i \right)$$

a) Usando a fórmula de **SIMPSON**

$$\sum y_i = 3{,}5 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 = 11{,}3\ m$$

$$\sum y_p = 3{,}8 + 2{,}6 + 2{,}4 = 8{,}8\ m$$

$y_o = 3{,}0$ m
$y_1 = 3{,}5$ m
$y_2 = 3{,}8$ m
$y_3 = 3{,}2$ m
$y_4 = 2{,}6$ m
$y_5 = 2{,}6$ m
$y_6 = 2{,}4$ m
$y_7 = 2{,}0$ m
$y_8 = 1{,}8$ m

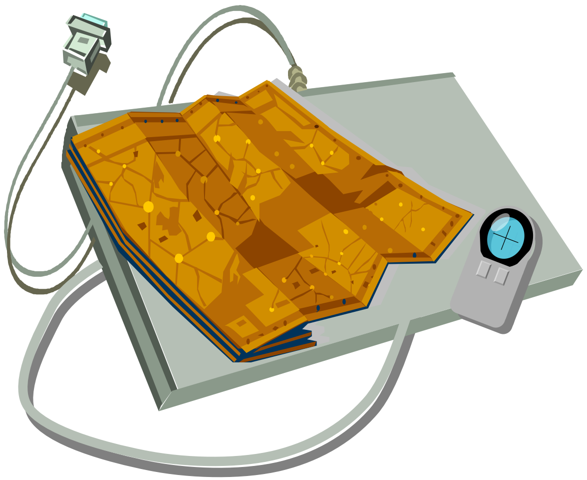
$$S = \frac{2{,}0}{3} \times [3{,}0 + 1{,}8 + 2\times 8{,}8 + 4\times 11{,}3] = 45{,}07\ m^2$$

Como se pode verificar, os resultados são semelhantes. No caso mais desfavorável, a diferença é menor que 0,5%.

Processos Computacionais

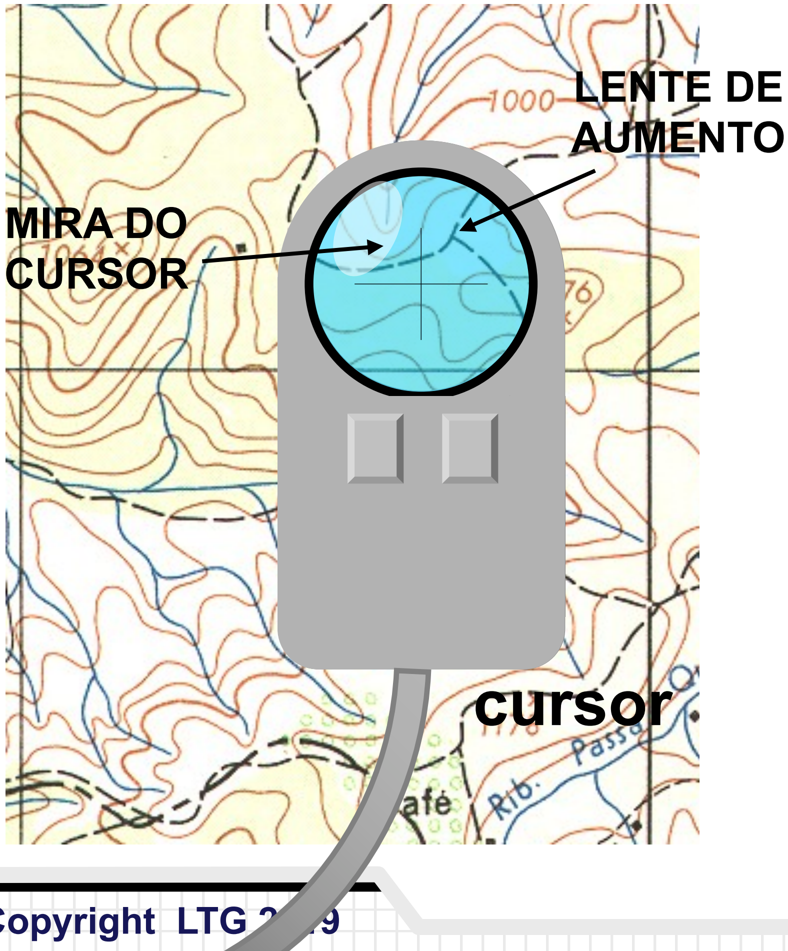
A partir de uma mesa digitalizadora acoplada a um computador que disponha de um editor de desenho (AutoCAD ou similar), fornece-se as coordenadas (x,y) de pelo menos dois pontos. O cursor passa a fornecer coordenadas reais.

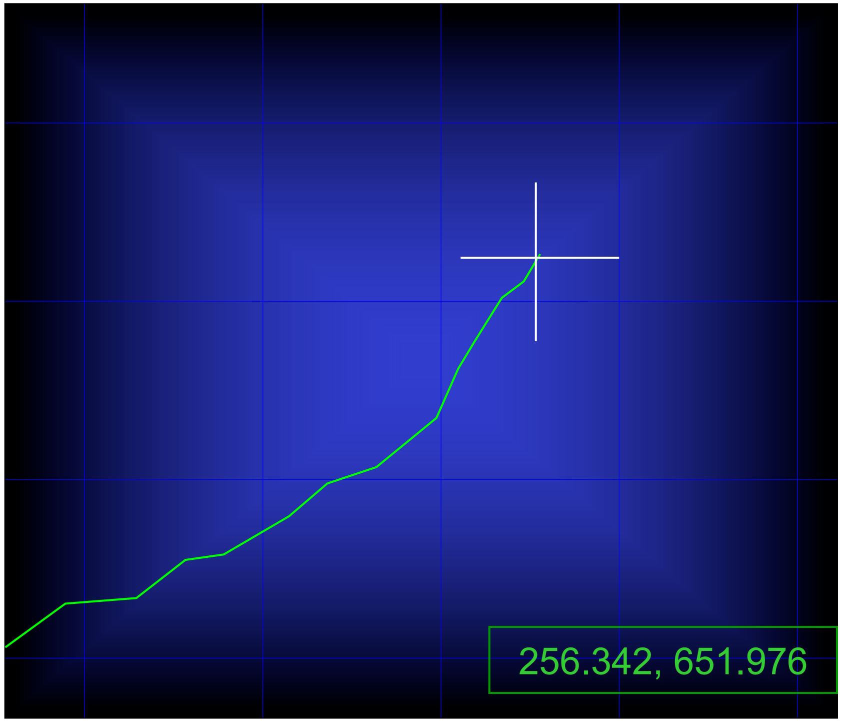
Atuamente, se utiliza o mapa na propria tela do computador com base em uma ferramenta de mapeameno.



Processos Computacionais

O programa utiliza a **fórmula de Gauss**, já que o contorno da figura é na realidade uma poligonal de muitos lados.





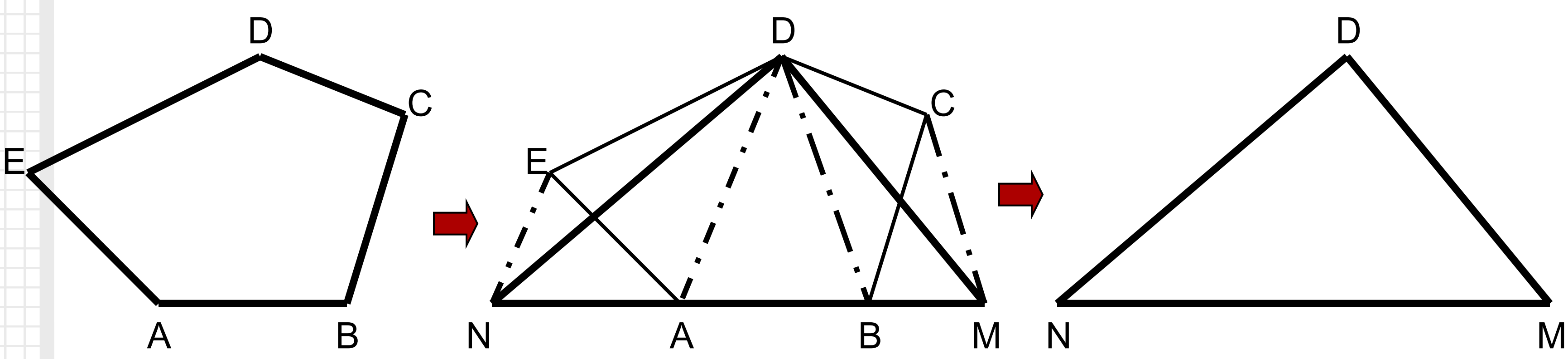
Processos Gráficos

- Transformação Geométrica
- Faixas de Igual Espessura
- Divisão de Quadrículas
- Figuras Geométricas Equivalentes

Processos Gráficos

TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

Consiste em transformar as poligonais regulares em um triângulo de área equivalente.



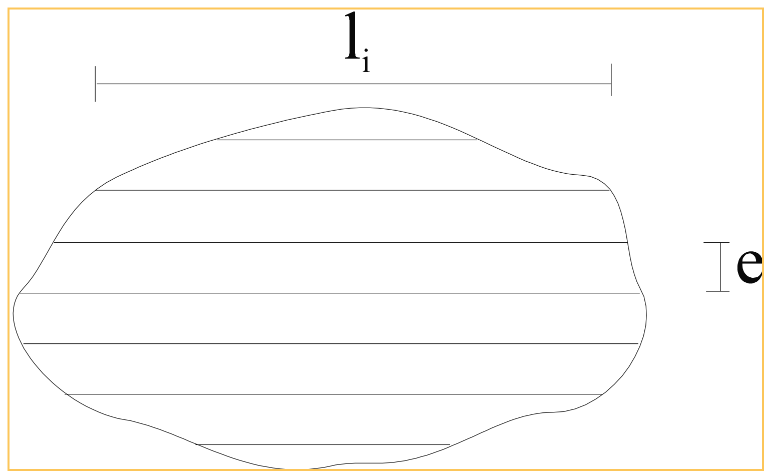
Processos Gráficos

FAIXAS DE IGUAL ESPESSURA

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em efetuar a divisão da figura em faixas de espessura constante (e), medindo-se as larguras (l_i) dessas faixas.

$$S = e \cdot \sum_i l_i$$



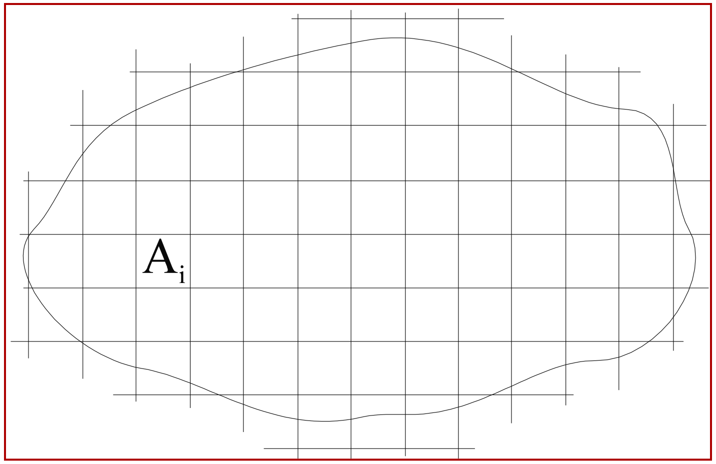
Processos Gráficos

DIVISÃO EM QUADRÍCULAS

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste na contagem direta dos quadrados mutiplicados pela área deles. Pode-se utilizar milimetrado para facilitar a tarefa.

$$S = \sum_{i} A_i$$



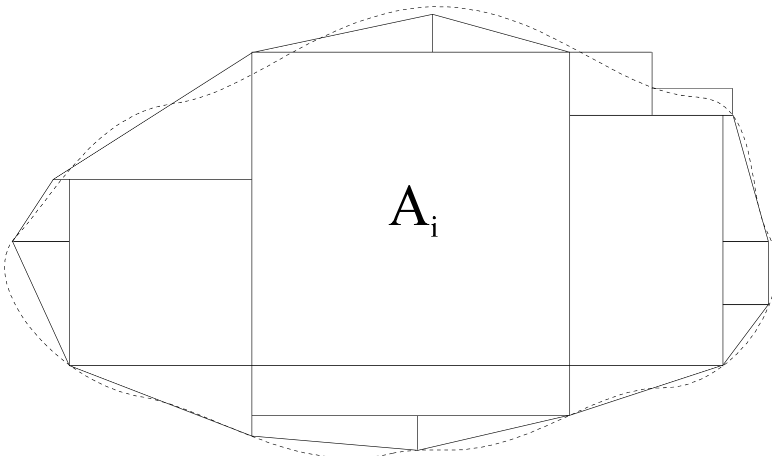
Processos Gráficos

FIGURAS GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em dividir a área em figuras geométricas equivalentes: retângulos, triângulos e trapézios, de modo a compensar as áreas que ficaram dentro e fora da figura geométrica.

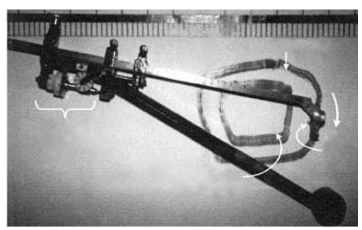
$$S = \sum_{i} A_i$$

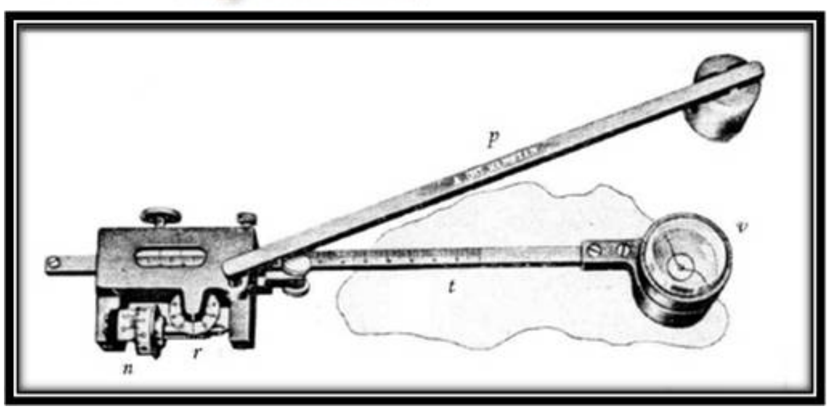


Processo Mecânico

PLANÍMETRO

O planímetro é um equipamento que possui dois braços articulados com um pólo numa extremidade, que deve permanecer fixo, e um cursor na outra, devendo percorrer todo o contorno da área, retornando ao ponto inicial.

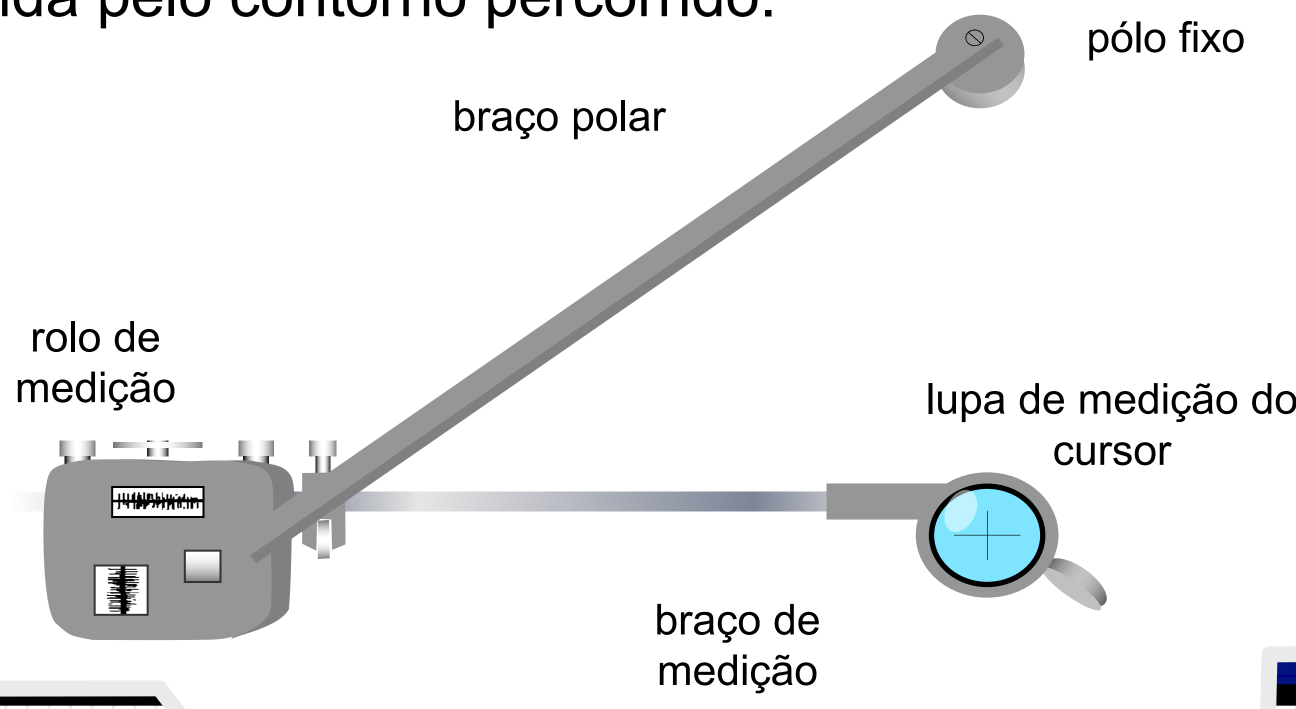




Processo Mecânico

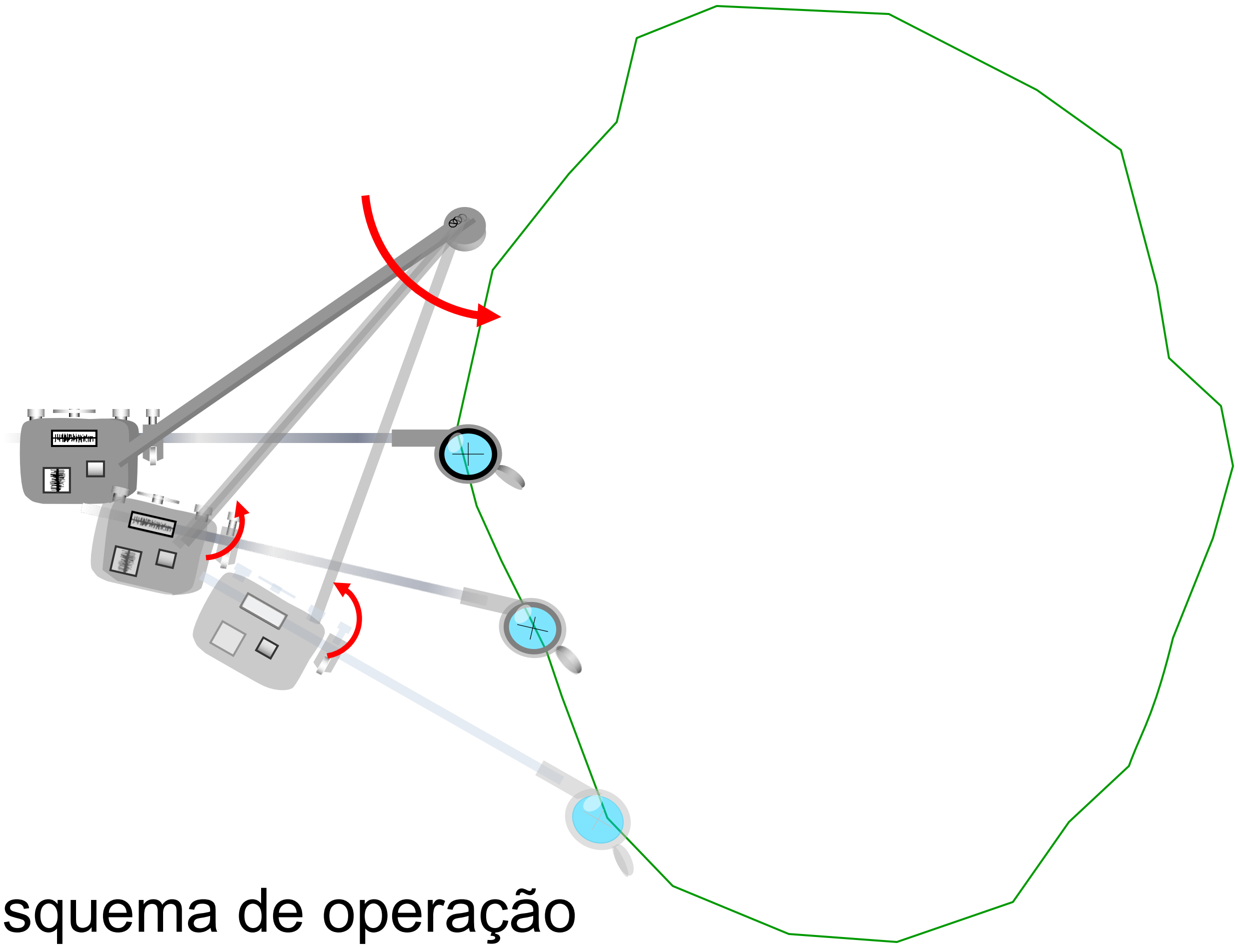
PLANÍMETRO

Um tambor giratório no mesmo braço do cursor, situado na extremidade oposta, faz girar um ponteiro sobre o círculo de leitura. Pode-se demonstrar que o giro do tambor, e portanto a diferença de leituras, é proporcional à área envolvida pelo contorno percorrido.



Processo Mecânico

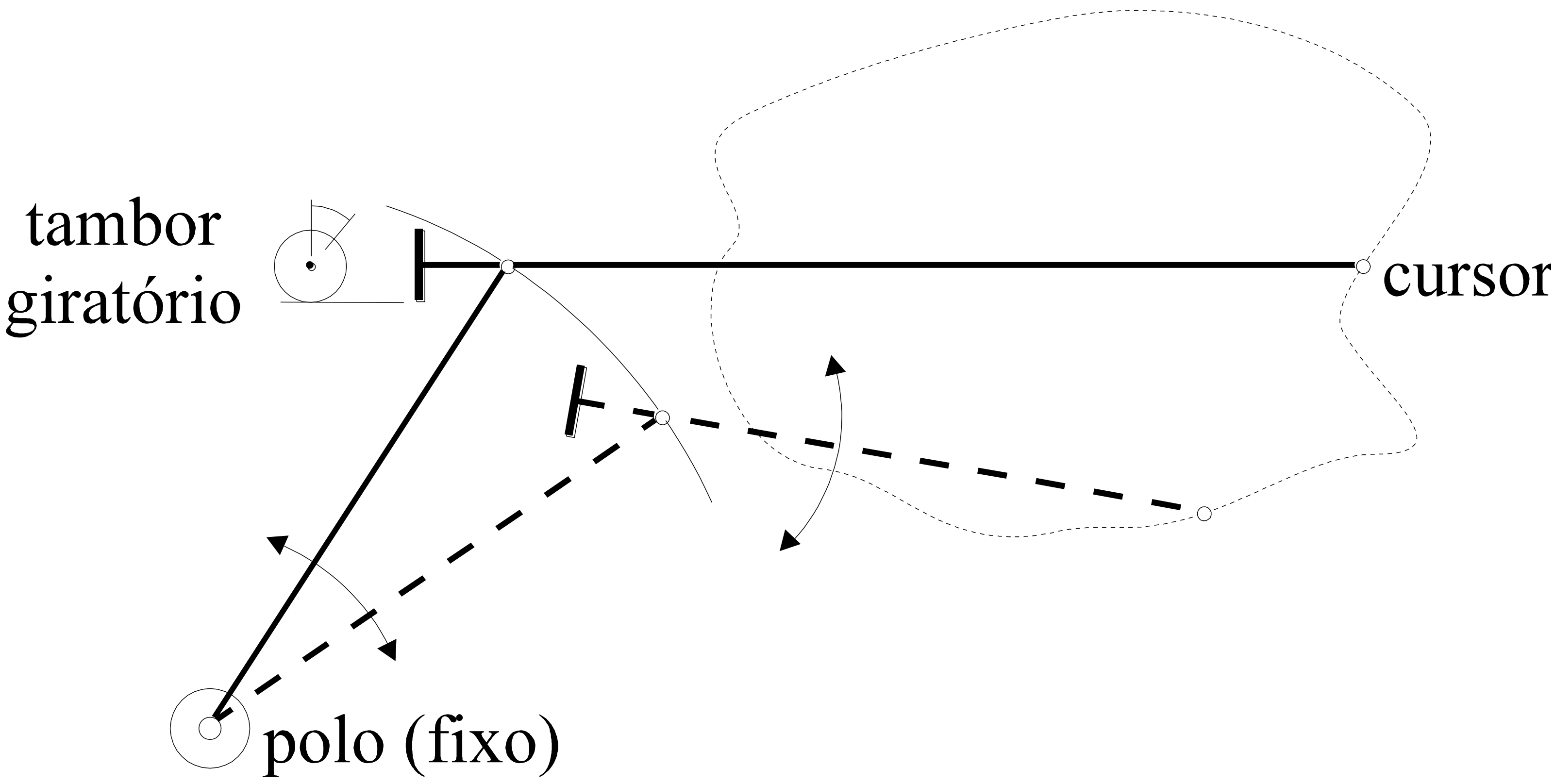
PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO

$$S = k \cdot (L_f - L_i)$$

S - área
$\boldsymbol{L_f}$ - leitura final
$\boldsymbol{L_i}$ - leitura inicial
k - constante do aparelho

Para determinar o valor de ***k***, sugere-se planimetrar ***n*** vezes uma área ***S*** conhecida.