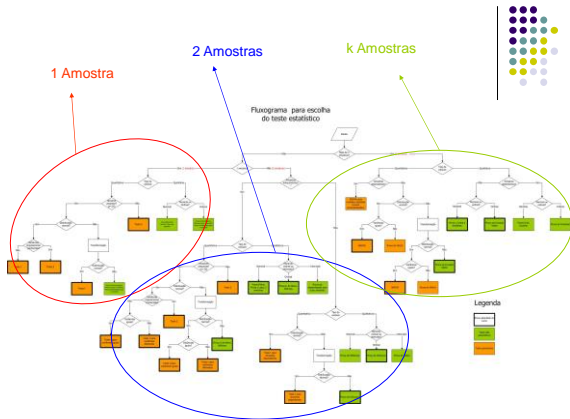


# Análise de Variância (ANOVA) de 1 via

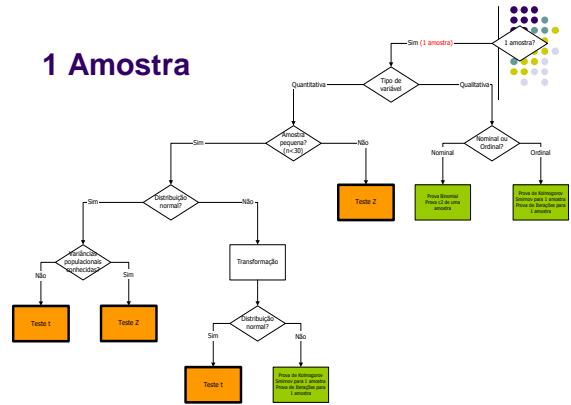
Comparação de  $k$  médias ( $k > 2$ )

## Aula de hoje

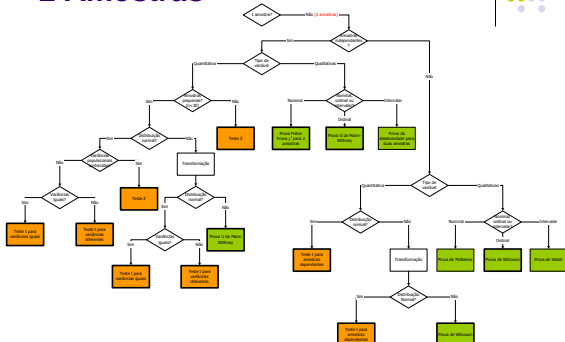
Teste de Hipótese Central (média, mediana, proporção)	Classificação	Variável 1	Variável 2	Núm. de Grupos	Dependência	Pressupostos
Teste Z	Paramétrico	Quantitativa	-	1	-	Variancia pop. conhecida
Teste t	Paramétrico	Quantitativa	-	1	-	Distribuição normal
Wilcoxon (teste dos sinais, Wilcoxon p/ 1 amostra)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	-	1	-	-
Teste p/ 2 amostras	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal, variâncias iguais
Teste p/ 2 amostras com variâncias diferentes	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal, variâncias diferentes
ANOVA	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Independentes	Distribuição normal, variâncias iguais
ANOVA para dados dependentes	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Dependentes	Estericidade
Mann-Whitney (Wilcoxon não-pareado)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Independentes	-
Wilcoxon-Wilcoxon (pareado, teste dos sinais)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Dependentes	-
Kruskal-Wallis	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Independentes	-
Friedman	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Dependentes	-
Teste p/ 1 proporção	Paramétrico	Nominal	-	1	-	-
Teste p/ 2 proporções	Paramétrico	Nominal	Nominal	2	Independentes	-



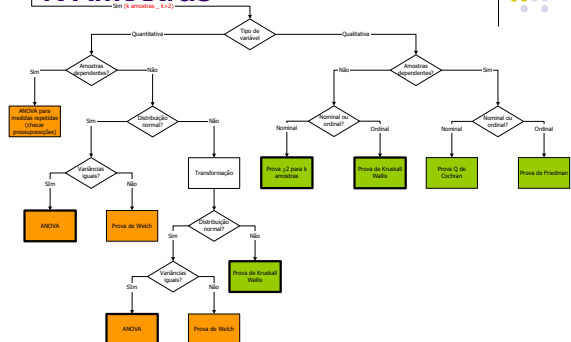
## 1 Amostra



## 2 Amostras



## K Amostras



## Princípios

- 1 Amostra

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

- 2 Amostras

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$
$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$



## Análise de Variância

- Considere que há  $k$  populações de interesse. O método de análise de variância permite testar a hipótese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$
$$H_1 : \text{As médias não são iguais}$$



## Por que não comparar as médias 2 a 2?

- A cada comparação temos a possibilidade de cometer um erro. A chance de cometer pelo menos um erro quando conduzimos todos os testes é normalmente inaceitavelmente grande.



## Comparações 2 a 2

- 1 comparação:
  - Probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira (Erro tipo I) 5%
- 3 comparações (3 grupos)
  - Probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira (Erro tipo I)  $(1-0,95^3)=0,14$
- 15 comparações (6 grupos)
  - Probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira (Erro tipo I)  $(1-0,95^{15})=0,54$



## Princípio da Análise de Variância

- Consiste em comparar a variabilidade entre as médias dos grupos e a variabilidade dentro dos grupos
- Se a variabilidade entre as médias dos grupos for muito maior que a variabilidade dentro dos grupos temos elementos para supor que as médias dos grupos não são iguais
- Comparação das variâncias é realizada por meio da razão das variâncias que segue a distribuição F



## Pressuposições da ANOVA de 1 via

- As distribuições populacionais devem ser normais
- As variâncias devem ser iguais (homocedasticidade)



## Funcionamento do ANOVA

- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:

- Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras

$$\text{Estimativa 1} = \frac{\sum s_i^2}{n}$$

- Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central

## Estimativa da Variância entre as Amostras

- Se  $H_0$  for verdadeira, é possível estimar a variância populacional pelo Teorema do Limite Central:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

logo

$$\sigma^2 = n \cdot \sigma_{\bar{x}}^2$$

$n$  é o tamanho de cada amostra

$$\text{podemos estimar } \sigma_{\bar{x}}^2 \text{ por } s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$

$k$  é o número de grupos

## Funcionamento do ANOVA

- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:

- Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras

$$\text{Estimativa 1} = \frac{\sum s_i^2}{n}$$

- Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central

$$\text{Estimativa 2} = n \cdot s_{\bar{x}}^2 = n \cdot \frac{\sum (\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$

- Se  $H_0$  for verdadeira, as duas estimativas devem ser estatisticamente iguais

## Funcionamento do ANOVA

- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:

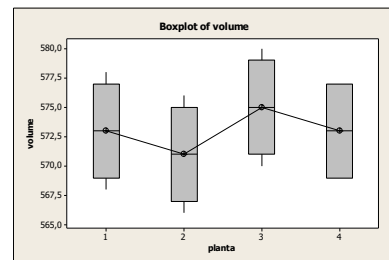
- Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras
- Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central
- Se  $H_0$  for verdadeira, as duas estimativas devem ser estatisticamente iguais
- É possível fazer um teste F (teste entre variâncias), para testar se as variâncias são iguais

## Exemplo

- Considere o volume de fertilizante produzido em 4 linhas de produção (plantas) durante 7 semanas

Planta	1	2	3	4
	574	566	580	573
	578	576	570	570
	573	569	577	569
Produção Semanal	568	571	575	577
	572	573	573	576
	577	575	579	577
	569	567	571	569
Média	573	571	575	573
Variância	14,0	15,0	15,0	13,67

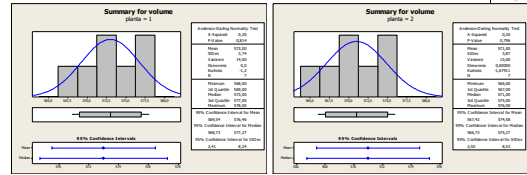
## Boxplot



## Checando as premissas

- Normalidade
- Variâncias

## Teste de Normalidade

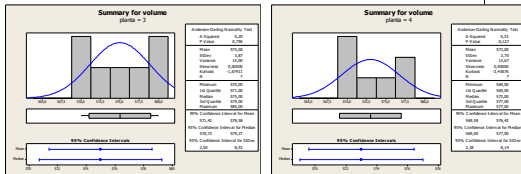


Teste de Normalidade de Anderson-Darling:  
 $H_0$ : Dados seguem a distribuição Normal  
 $H_1$ : Dados não seguem a distribuição Normal

Planta 1:  $p=0,814$   
 Planta 2:  $p=0,796$

$p>5\%$ : Dados das plantas 1 e 2 seguem a distribuição Normal

## Teste de Normalidade



Planta 3:  $p=0,796$   
 Planta 4:  $p=0,127$

$p>5\%$ : Dados das plantas 3 e 4 seguem a distribuição Normal

## Teste de comparação de variâncias (mais de 2 amostras)

Teste de comparação de variâncias  
 (teste de Bartlett)

$H_0$ : As variâncias são iguais  
 $H_1$ : As variâncias não são iguais

## Teste de comparação de variâncias

Test for Equal Variances: volume versus planta				
95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations				
planta	N	Lower	StDev	Upper
1	7	2,16067	3,74166	10,7047
2	7	2,23651	3,87298	11,0804
3	7	2,23651	3,87298	11,0804
4	7	2,13480	3,69685	10,5765

Bartlett's Test (Normal Distribution)  
 Test statistic = 0,02; p-value = 0,999

Levene's Test (Any Continuous Distribution)  
 Test statistic = 0,04; p-value = 0,988

Teste de Bartlett ( $p=99,9\%$ ):  $p>5\%$ , podemos considerar as variâncias iguais.

## Amostras de Mesmo Tamanho

- Estimativa 1 (Variância dentro das amostras)
- As 4 variâncias podem ser consideradas como estimativas de uma variância comum

$$\text{Estimativa 1} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2}{4}$$

$$= \frac{14 + 15 + 15 + 13,67}{4} = 14,4$$

## Estimativa da Variância entre as Amostras



- Considere, por um momento, que a  $H_0$  é verdadeira. Podemos então pensar as 4 plantas como sendo amostras de tamanho 7 de uma mesma população. As quatro médias amostrais são 4 valores da variável aleatória  $\bar{x}$ . Lembrando do Teorema do Limite Central temos:

## Estimativa da Variância entre as Amostras



$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

logo

$$\sigma^2 = n \cdot \sigma_{\bar{x}}^2$$

$n$  é o tamanho de cada amostra

podemos estimar  $\sigma_{\bar{x}}^2$  por  $s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$

$k$  é o número de grupos

## Estimativa da Variância entre as Amostras



Média	Média-média das médias	(Média-média das médias) <sup>2</sup>
573	0	0
571	-2	4
575	2	4
573	0	0
573	8	8

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\sum (\bar{x} - 573)^2}{4-1} = \frac{(573-573)^2 + (571-573)^2 + (575-573)^2 + (573-573)^2}{4-1} = \frac{8}{3}$$

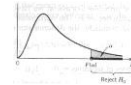
## Amostras de Mesmo Tamanho



- Estimativa 2 (Variância entre as amostras)

$$\text{Estimativa 2} = n \cdot s_{\bar{x}}^2 = n \cdot \frac{\sum (\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = (7) \cdot \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3} = 18,7$$

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{n \cdot s_{\bar{x}}^2}{\frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2)}{4}} = \frac{18,7}{14,4} = 1,29$$



## Saída do Minitab



```

One-way ANOVA: volume versus planta
Source   DF    SS    MS      F      P
planta   3    56,0  18,7    1,29   0,299
Error    24   346,0  14,4
Total    27   402,0

S = 3,797   R-Sq = 13,93%   R-Sq(adj) = 3,17%

Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev
Level  N   Mean  StDev  +-----+
1      7   573,00  3,74  (------*-----)
2      7   571,00  3,87  (------*-----)
3      7   575,00  3,87  (------*-----)
4      7   573,00  3,70  (------*-----)
+-----+
                    570,0    572,5    575,0    577,5

Pooled StDev = 3,80
    
```

## Tomada de decisão



- $p=0,299=29,9\%$ . Para um nível de significância de 5%, não rejeitamos a hipótese nula de médias iguais. Assim, não foi observada uma diferença estatística significativa entre os volumes médios de fertilizante produzidos nas 4 linhas de produção.

## Amostras de Mesmo Tamanho

- Suponha que temos amostras aleatórias de tamanho  $n$  de cada  $k$  população normal que tenham a mesma variância. Então, se a hipótese de nulidade de médias iguais estiver correta, a variável aleatória

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{n \cdot s_{\bar{x}}^2}{(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2) / k}$$

tem uma distribuição F. O número de graus de liberdade do numerador é  $k-1$  e do denominador é  $N-k$ , onde  $N$  é o número total de observações em todas as amostras

## Amostras de Tamanhos Diferentes

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 / (N-k)}$$

## Tabela de ANOVA

Soma dos quadrados entre os grupos :

$$SQE = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

Quadrados médios entre os grupos :

$$QME = \frac{SQE}{k-1}$$

Soma dos quadrados dentro dos grupos :

$$SQD = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2$$

Quadrados médios dentro dos grupos :

$$QMD = \frac{SQD}{N-k}$$

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{QME}{QMD} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 / (N-k)}$$

## Tabela de ANOVA

Fonte	Graus de liberdade	Soma dos quadrados (SQ)	Quadrados médios (QM)	F
Entre grupos	k-1	SQE	QME	QME/QMD
Dentro dos grupos	N-k	SQD	QMD	
Total	N-1	SQE+SQD		

## Exemplo com amostras de tamanhos diferentes

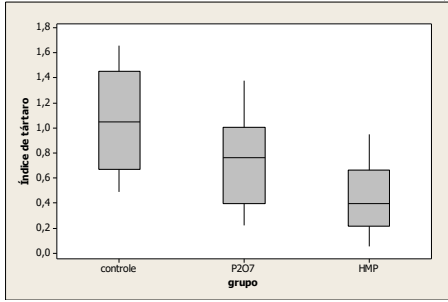
- Cães foram alimentados com ração cujos peletes estavam recobertos com agentes que, acredita-se, tenham efeito na formação do tártaro. O acúmulo de cálculo foi medido por um índice que combinou estimativas da proporção coberta do dente e espessura do depósito. Vinte e seis animais foram aleatoriamente alocados em um de três grupos. O primeiro grupo é o controle ( $n_1=9$ ), que receberia ração sem adição de qualquer agente, o segundo ( $n_2=9$ ) receberia ração com pirofosfato ( $P_2O_7$ ) e o terceiro ( $n_3=8$ ) hexametáfosfato de sódio (HMP). O índice de acúmulo de tártaro foi medido em cada animal após 4 semanas do início do tratamento. Pergunta-se se há diferença na intensidade de formação de tártaro entre os grupos (Petri e Watson, 1999).

## Teste de hipóteses

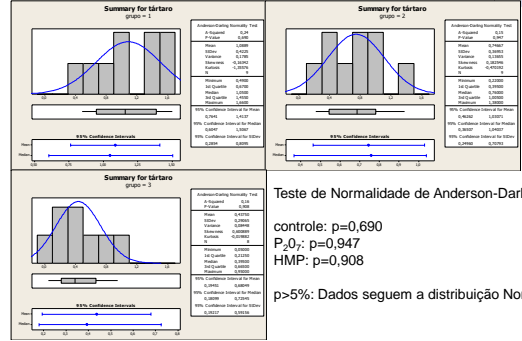
$$H_0 : \mu_{\text{controle}} = \mu_{P_2O_7} = \mu_{HMP}$$

$$H_1 : \text{As médias não são iguais}$$

## Índice de cálculo nos 3 grupos



## Verificando a Normalidade



Teste de Normalidade de Anderson-Darling  
 controle:  $p=0,690$   
 $P_{207}$ :  $p=0,947$   
 HMP:  $p=0,908$   
 $p>5\%$ : Dados seguem a distribuição Normal

## Teste de comparação de variâncias

Test for Equal Variances: tártaro versus grupo

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

grupo	N	Lower	StDev	Upper
1	9	0,263406	0,422535	0,956864
2	9	0,230361	0,369527	0,836822
3	8	0,176634	0,290652	0,711843

Bartlett's Test (Normal Distribution)  
 Test statistic = 0,95; p-value = 0,622

Levene's Test (Any Continuous Distribution)  
 Test statistic = 0,74; p-value = 0,486

Teste de Bartlett ( $p=62,2\%$ ):  $p>5\%$ , podemos considerar as variâncias iguais.

## Teste de ANOVA

One-way ANOVA: tártaro versus grupo

Source	DF	SS	MS	F	P
grupo	2	1,805	0,902	6,67	0,005
Error	23	3,112	0,135		
Total	25	4,917			

S = 0,3678 R-Sq = 36,70% R-Sq(adj) = 31,20%

Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev

Level	N	Mean	StDev
1	9	1,0889	0,4225
2	9	0,7467	0,3695
3	8	0,4375	0,2907

Pooled StDev = 0,3678

$p=0,005=0,5\%$ . Portanto, como  $p<5\%$ , rejeitamos a hipótese nula de médias iguais

## Comparações Múltiplas (testes post hoc). Quem é diferente de quem?

- Teste de Tukey (nível de significância para o conjunto de comparações)
- Fisher (nível de significância para cada comparação individual)
- Dunnett (Contra grupo controle; nível de significância para o conjunto de comparações)

## Teste Post Hoc

Grouping Information Using Tukey Method

grupo	N	Mean	Grouping
1	9	1,0889	A
2	9	0,7467	A B
3	8	0,4375	B

Means that do not share a letter are significantly different.

Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals  
 All Pairwise Comparisons among Levels of grupo

Individual confidence level = 98,01%

grupo = 1 subtracted from:

grupo	Lower	Center	Upper
2	-0,7763	-0,3422	0,0918
3	-1,0988	-0,6514	-0,2040

grupo = 2 subtracted from:

grupo	Lower	Center	Upper
3	-0,7566	-0,3092	0,1382

## Tomada de decisão



- Pelo teste de ANOVA, há uma diferença significativa entre as médias ( $p=0,005=0,5\%$ ).
- No teste de comparações múltiplas, foi identificada uma diferença entre o grupo 1 (controle) e o grupo 3 (HMP), indicando que o índice de cálculo é significativamente maior no grupo controle do que no grupo que recebeu HMP.

## Referências



- Petrie A, Watson P. Statistics for Veterinary and Animal Science. Blackwell Science, Oxford, 1999.
- Chase W, Bown F. General Statistics. 2.ed., Wiley, New York, 1992.
- Shott S. Statistics for Health Professionals. Saunders, Philadelphia, 1990.