OPERADORES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE MAXWELL NA FORMA DIFERENCIAL

ABNER ELIEZER BORGES

MARCOS DE LIMA LEITE

COMPLEMENTOS DE ELETROMAGNETISMO – 2019

PROFESSORAS SUZANA SALÉM E VALÉRIA DIAS

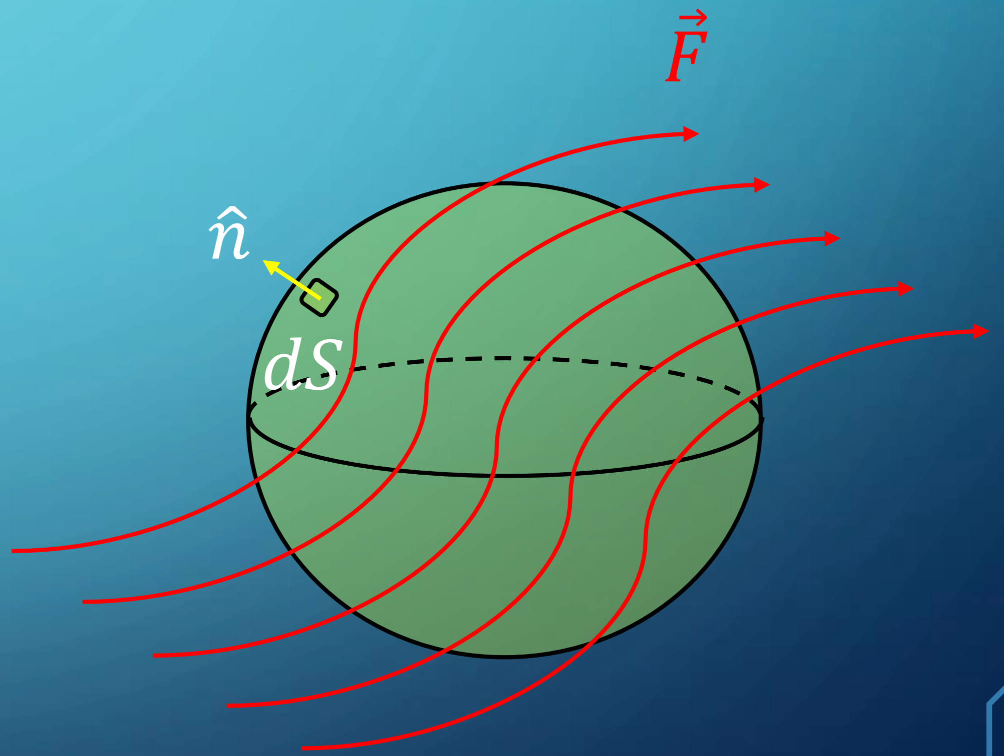
AGENDA

- Lembrete: Fluxo e Circuitação
- Equações de Maxwell na Forma Integral
- Operador Diferencial Vetorial
- Campos Escalares e Vetoriais
- Gradiente, Divergente e Rotacional
- Exercício Conceitual (Berkeley)
- Equações de Maxwell na Forma Diferencial

DOIS CONCEITOS PARA LEMBRAR

(1) <u>Fluxo total</u> de um campo vetorial $\vec{F}$ sobre uma superfície imaginária fechada arbitrária:

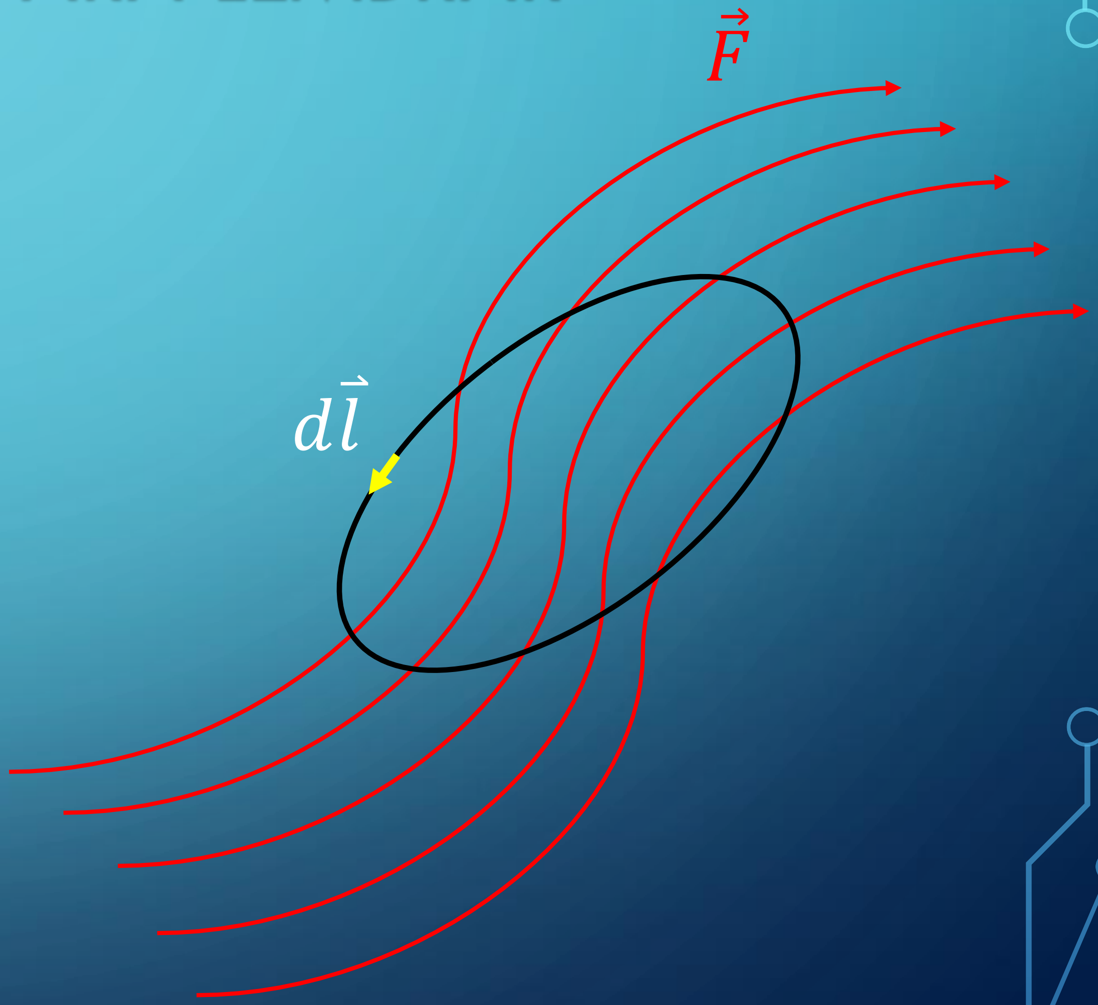
$$fluxo = \oiint_{superfície} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$



DOIS CONCEITOS PARA LEMBRAR

(2) **<u>Circuitação</u> de um campo vetorial $\vec{F}$ ao redor de uma curva imaginária fechada arbitrária:**

$$circuitação = \oint_{circuito} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



EQUAÇÕES DE MAXWELL (FORMA INTEGRAL)

Fluxo dos campos!

- Lei de Gauss Elétrica: $\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$
- Lei de Gauss Magnética: $\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS} = 0$
- Lei de Faraday: $\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, dS$
- Lei de Ampère-Maxwell: $\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS$

Circuitação dos campos!

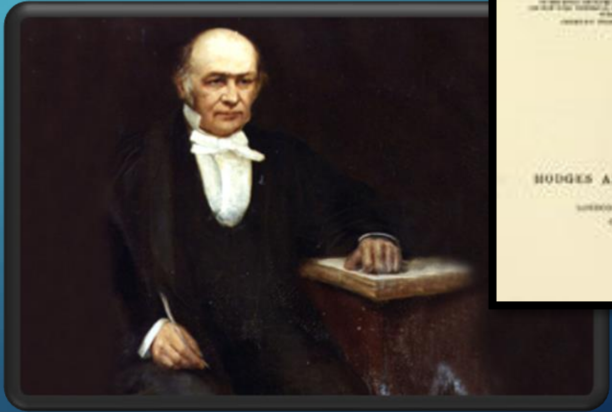
OPERADOR NABLA (OPERADOR DIFERENCIAL VETORIAL)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Criador: William Rowan Hamilton

Obra: *Lectures on Quaternions* (1853)

Objetivo: estudos sobre o cálculo vetorial




LECTURES

QUATERNIONS:

THE ROYAL IRISH ACADEMY,

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., M.R.I.A.

DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

OPERADOR NABLA
(OPERADOR DIFERENCIAL VETORIAL)

610 ON QUATERNIONS.

peculiar application of the fundamental symbols, *i*, *j*, *k*, of this calculus, which seems likely to become, at some future time, extensively useful in many important *physical* researches. Introducing, for abridgment, as a new *characteristic of operation*, a symbol defined by the formula,

$$\triangleleft = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

(HAMILTON, 1853, p. 610)

CAMPOS ESCALARES vs CAMPOS VETORIAIS

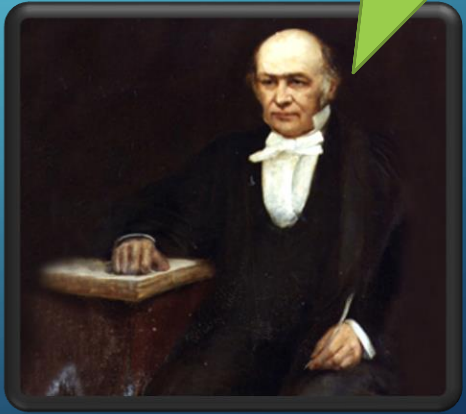
- **Campo Escalar** é uma função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$
  - Exemplos: temperatura, pressão
  - Para cada ponto do espaço, a função f define um **número**

- **Campo Vetorial** é uma função $\vec{\boldsymbol{F}}: \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, tal que $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$
  - Exemplos: campo gravitacional, campo elétrico, campo magnético
  - Para cada ponto do espaço, a função $\vec{F}$ define um **vetor**

OPERADOR NABLA (OPERADOR DIFERENCIAL VETORIAL)

- Por definição, $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$
- Nabla pode operar diretamente...
  - sobre campos escalares:
    - $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{f} \longrightarrow$ ***Gradiente***
  - sobre campos vetoriais:
    - $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \longrightarrow$ ***Divergente***
    - $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \longrightarrow$ ***Rotacional***

Olhemos com mais detalhe para cada operação!



GRADIENTE DE UM CAMPO ESCALAR

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

O **gradiente** do campo escalar <u>em certo ponto</u> é um vetor...

- Que indica a direção e o sentido de máxima variação do campo naquele ponto;
- Cujas componentes informam, para tal ponto, a taxa de variação do campo em cada direção.

DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right)$$

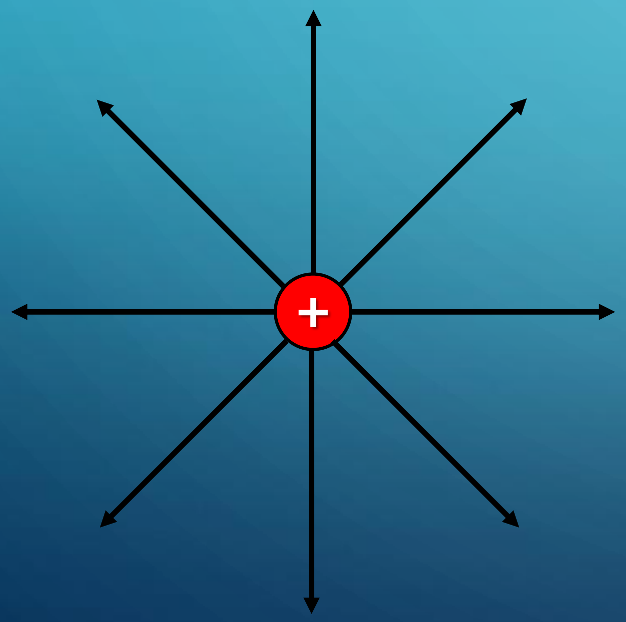
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$$

O **divergente** do campo vetorial <u>em certo ponto</u> corresponde ao fluxo por unidade de volume:

$$div\,\vec{F} = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}\, dS}{dV}$$

DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$$



Para $r = 0$, temos o ponto do espaço onde está a carga.
As linhas de campo divergem desse ponto, portanto $div\,\vec{E} \neq 0$

Para $r > 0$, temos pontos do espaço sem cargas.
As linhas de campo simplesmente atravessam esses pontos.
Portanto, $div\,\vec{E} = 0$

ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

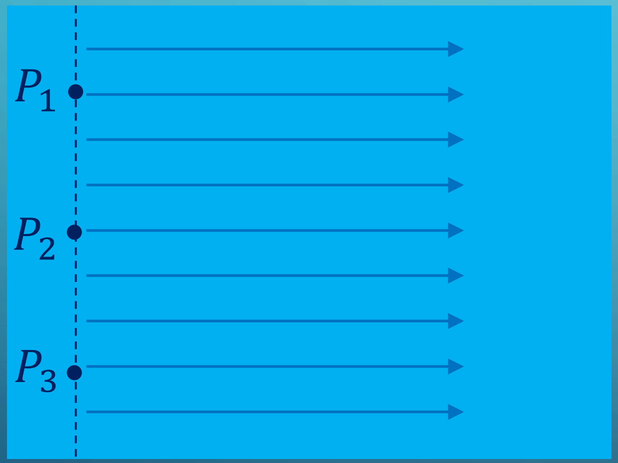
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

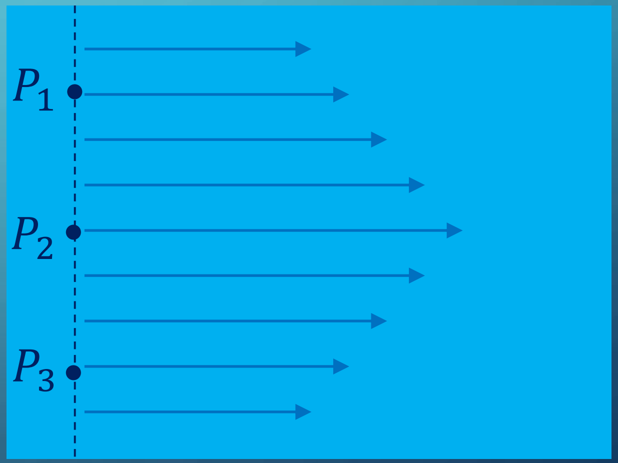
O **rotacional** do campo vetorial em certo ponto corresponde à circuitação desenvolvida por unidade de área:

$$\left|rot\, \vec{F}\right| = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dS}$$

ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL

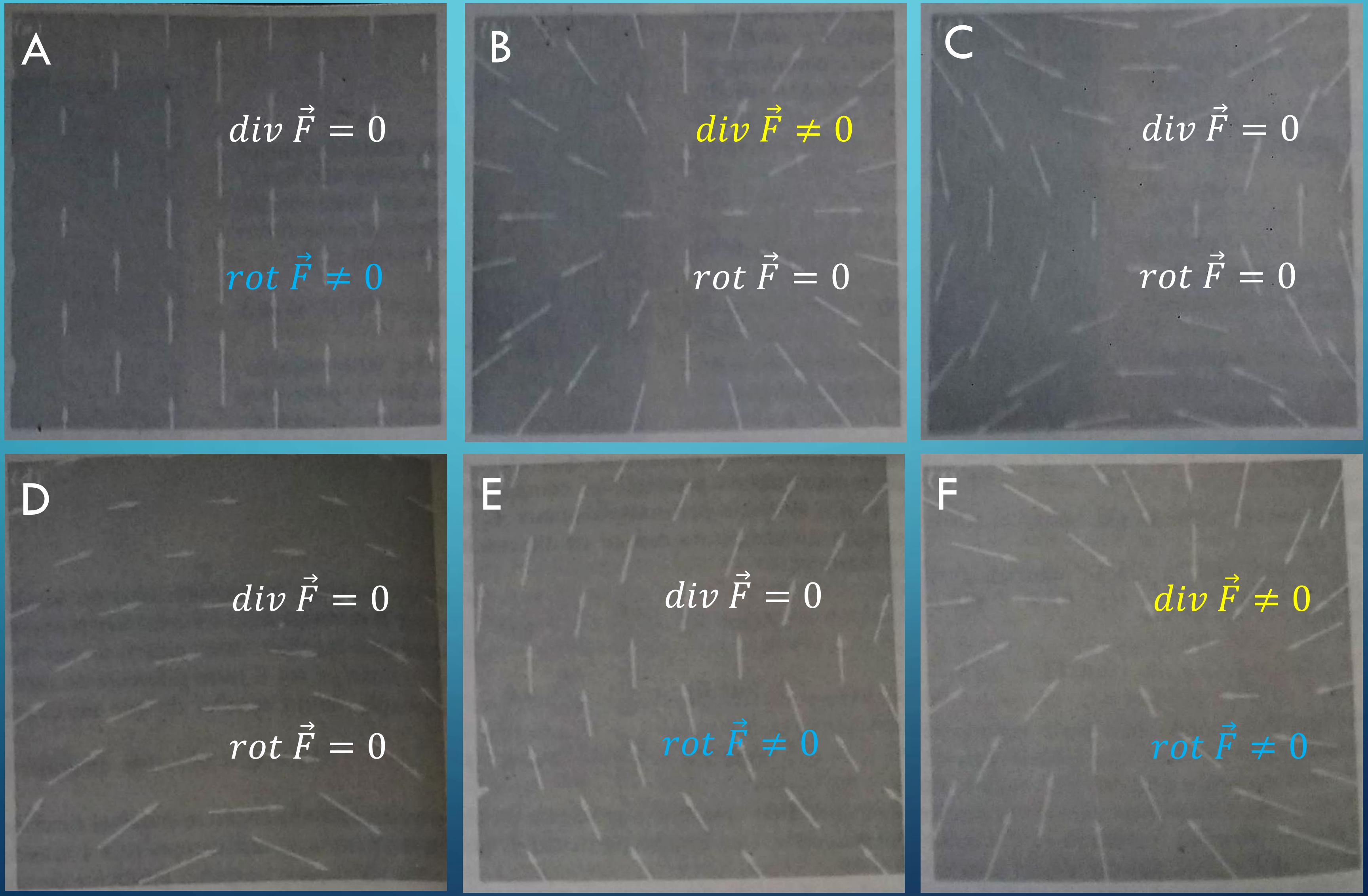
- Exemplo: campo vetorial de velocidade das águas de um rio





EXERCÍCIO DO BERKELEY:

QUATRO DOS CAMPOS POSSUEM DIVERGENTE NULO.
TRÊS POSSUEM ROTACIONAL NULO. LOCALIZE-OS!



TEOREMAS PARA O OPERADOR APLICADO A CAMPOS VETORIAIS

- Teorema de **Gauss**: *relaciona* o **fluxo** ao **divergente**!

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$$

- Teorema de **Stokes**: *relaciona* a **circuitação** ao **rotacional**!

$$\oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F}\, dS$$

TEOREMA DE GAUSS APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Lei de Gauss Elétrica:

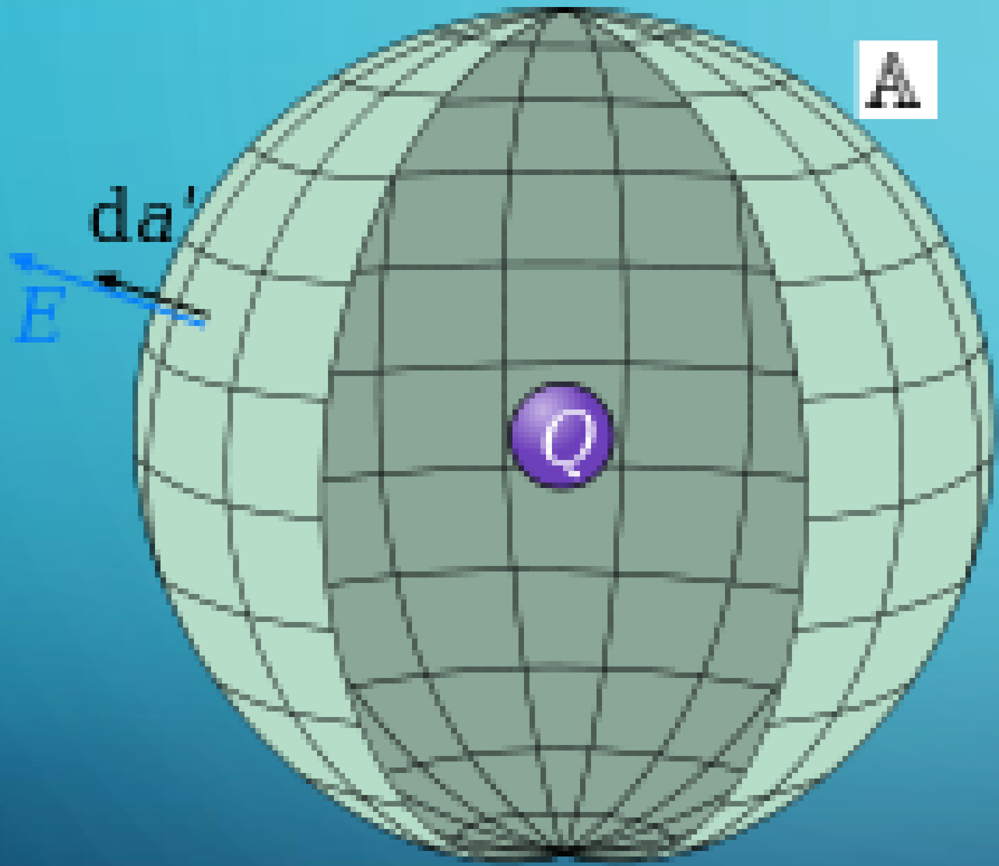
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

Pelo Teorema de Gauss,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

Portanto,

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$



$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

TEOREMA DE GAUSS APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Lei de Gauss Magnética:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

Pelo Teorema de Gauss,

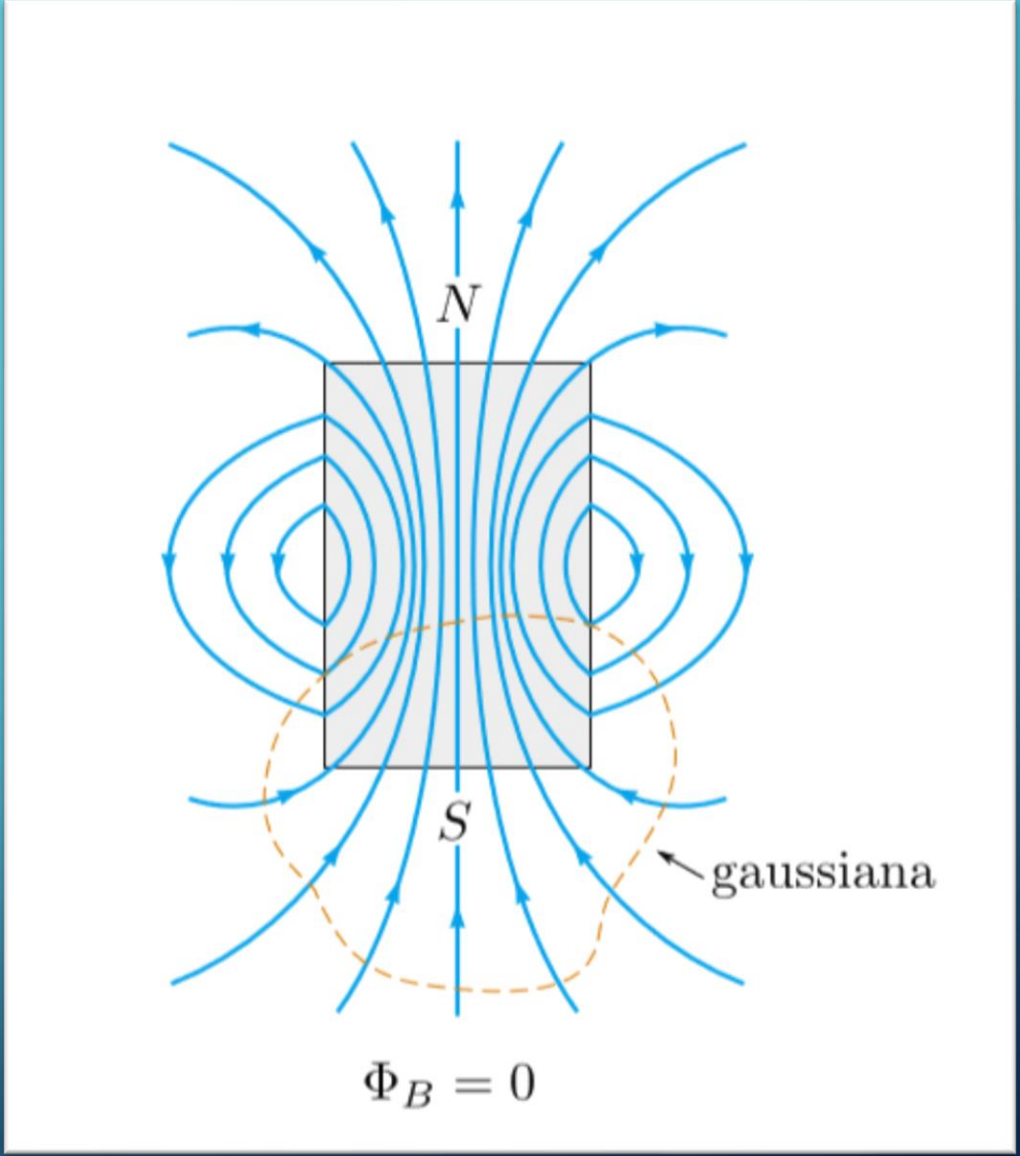
$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dV$$

Portanto,

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dV = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$



TEOREMA DE GAUSS APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Lei de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS$$

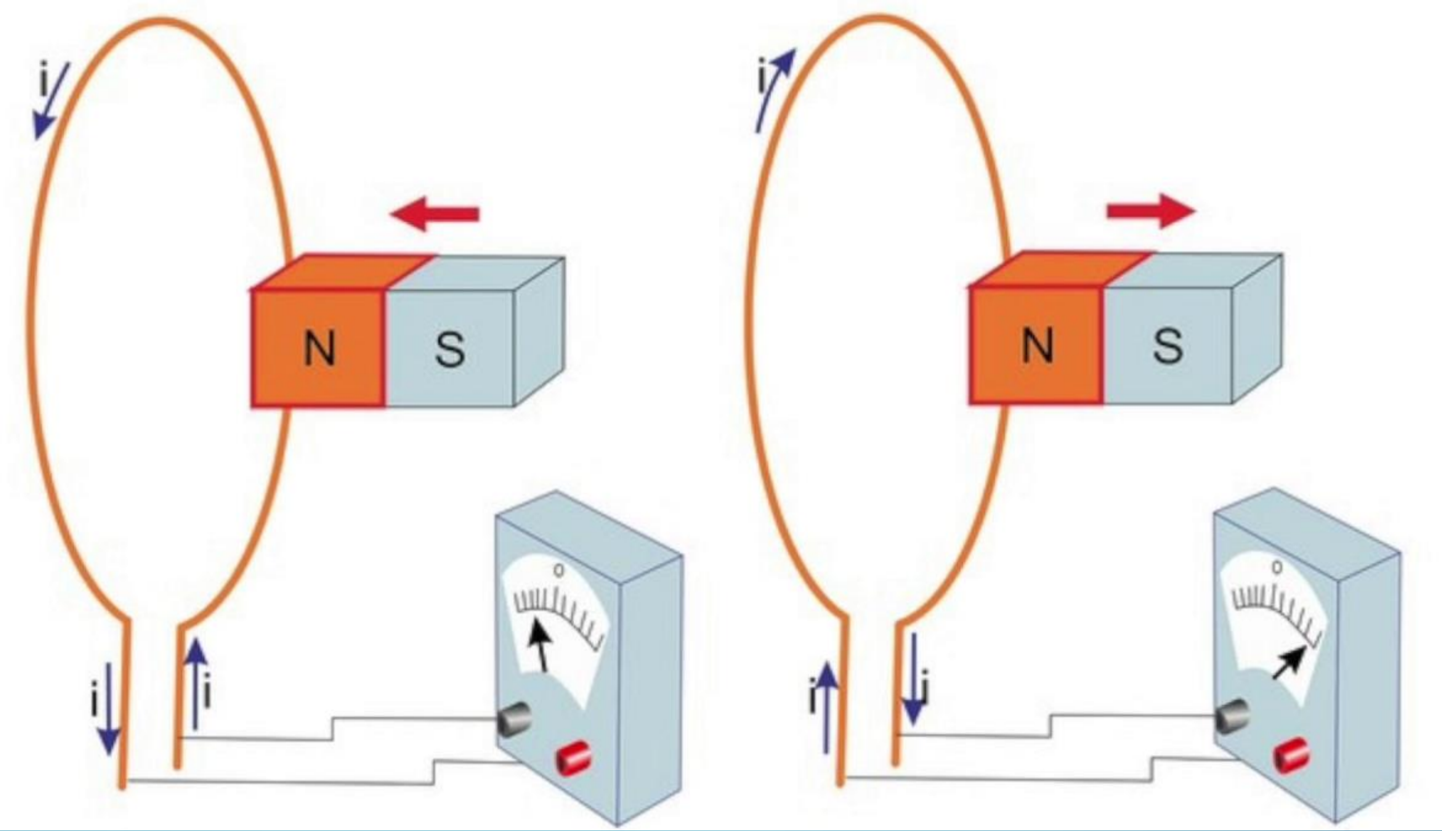
Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E}\, dS$$

Portanto,

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E}\, dS = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

TEOREMA DE GAUSS APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS$$

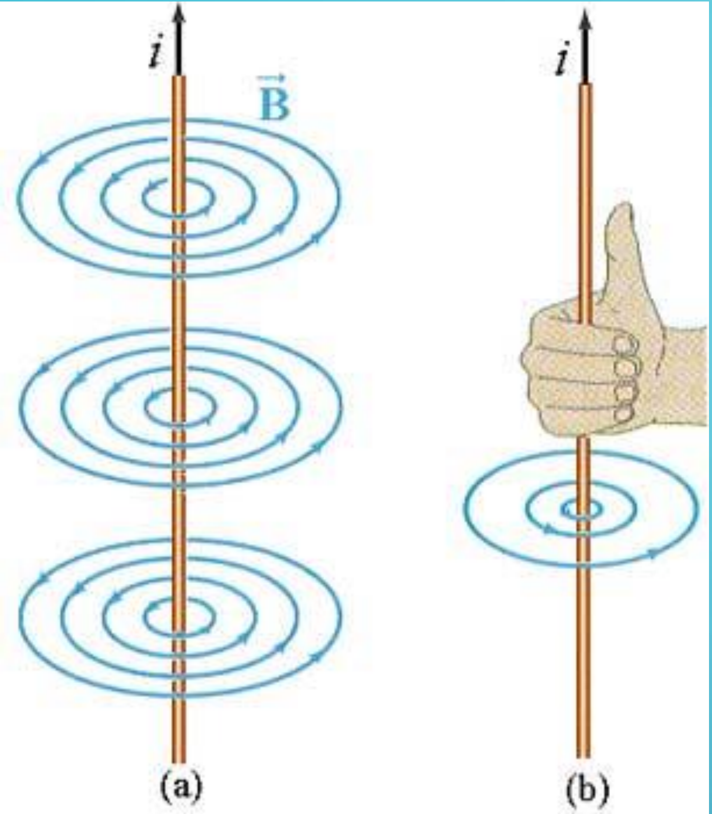
Pelo Teorema de Stokes,

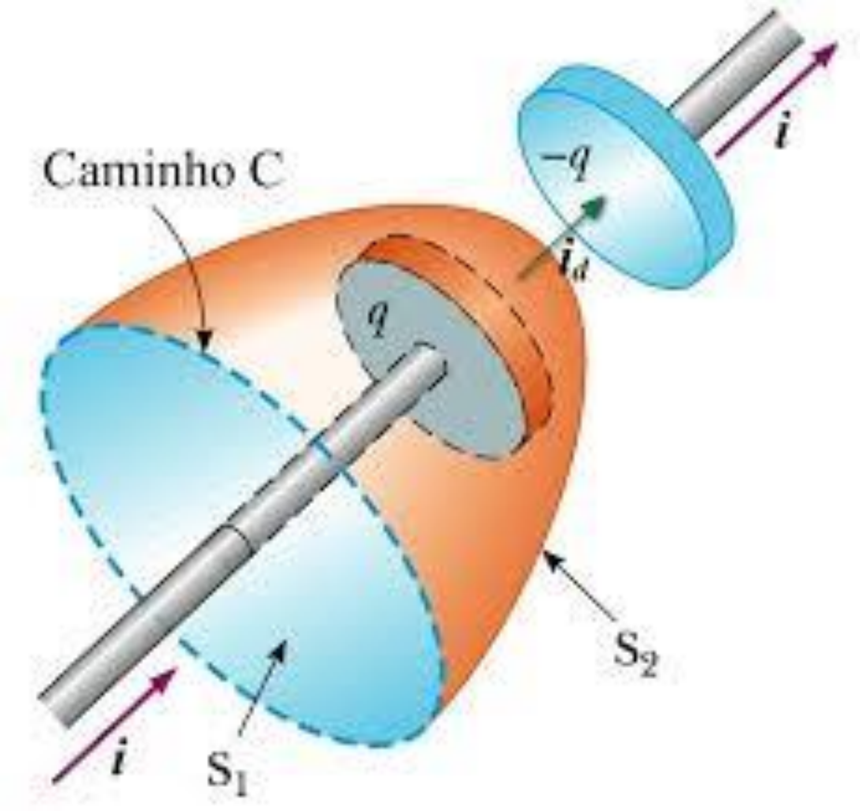
$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B}\, dS$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Portanto,

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B}\, dS = \iint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n}\, dS$$





$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, dS$$

SÍNTESE DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Lei	Forma Integral	Forma Diferencial
Gauss Elétrica	$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Gauss Magnética	$\oiint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
Faraday	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\hat{n}\,dS$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Ampère-Maxwell	$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\hat{n}\,dS$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

RECOMENDAÇÃO DE LEITURA

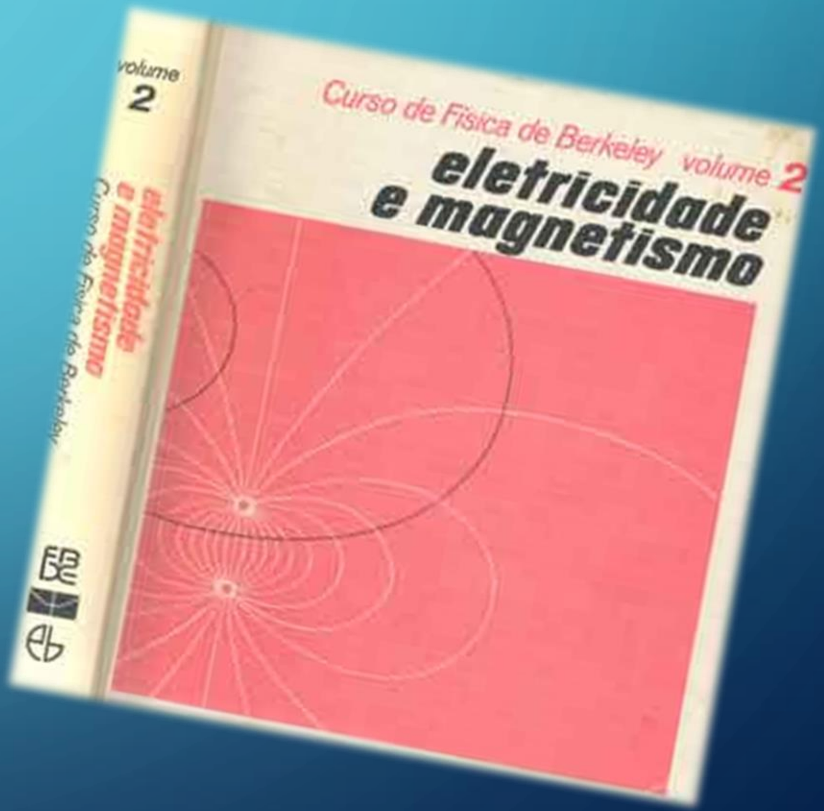
- Curso de Física de Berkeley, volume 2

  Eletricidade e Magnetismo

  Edward M. Purcell

  Ed. Edgard Blücher Ltda

  - Capítulo 2
    - 2.3 **Gradiente** de uma função escalar
    - 2.9 **Divergência** de uma função vetorial
    - 2.10 Teorema de **Gauss** e a forma diferencial da Lei de Gauss
    - 2.11 O **divergente** em coordenadas cartesianas
    - 2.15 O **rotacional** de uma função vetorial
    - 2.16 O teorema de **Stokes**
    - 2.17 O **rotacional** em coordenadas cartesianas



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Curso de Física de Berkeley, vol. 2, Eletricidade e Magnetismo, Edward M. Purcell, Edgard Blücher
- The Feynman Lectures on Physics, vol. 2, Feynman, Leighton e Sands, Bookman
- Introduction to Electrodynamics, David J. Griffiths, 3rd edition, Prentice Hall
- http://sites.if.ufrj.br/esoares/wp-content/uploads/sites/50/2014/08/7-Fontes_de_Campo_Magnetico.pdf