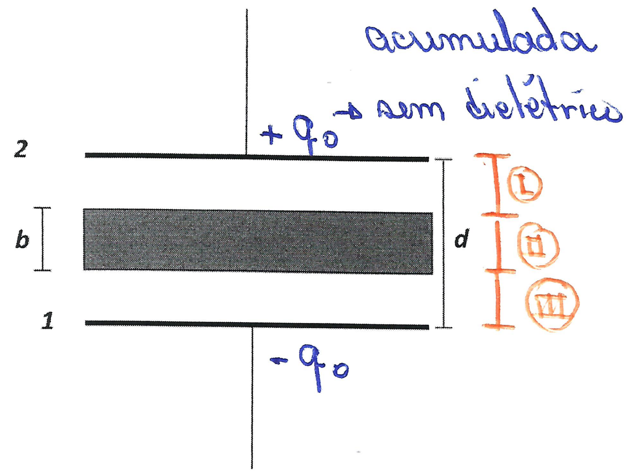
* Questão resolvida na aula de exercícios do dia 14/05.

Questão 1 (3,0 pontos):

Uma placa dielétrica de constante dielétrica k e espessura b é introduzida entre as placas de um capacitor plano de área A, as quais estão separadas pela distância d. Antes de introduzir a placa o capacitor estava carregado com uma d.d.p. V_0. Encontre a capacitância do capacitor com placa inserida em termos de a, b, A e k,



* Capacitância sem o dielétrico:

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

* Carga acumulada sem o dielétrico

$$q_0 = C_0 V_0 \Rightarrow \boxed{q_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} . V_0}$$

* d.d.p com a introdução do dielétrico:

$$V = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 E\,dl = \underbrace{\int_0^{\frac{d-b}{2}} E_0\,dl}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\frac{d-b}{2}}^{\frac{d-b}{2}+b} E\,dl}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{\frac{d-b}{2}+b}^{d} E_0\,dl}_{\text{III}}$$

$E_0 \Rightarrow$ campo nas regiões I e III (fora do dielétrico)

$E \rightarrow$ campo na região II (dentro do dielétrico)

* Resolvendo as integrais $\Rightarrow \quad V = E_0(d-b) + Eb$

Como: $E = \frac{E_0}{k} \Rightarrow \quad V = E_0\left[(d-b) + \frac{b}{k}\right]$

→ carga não é alterada pela introdução da placa.

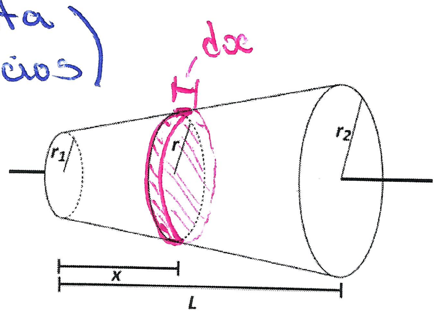
* A capacitância com a placa inserida é $C = \frac{q_0}{V}$

$$C = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d} V_0}{E_0\left[(d-b) + \frac{b}{k}\right]} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A \cancel{V_0}}{\underbrace{E_0 d}_{\cancel{V_0}}\left[\frac{k(d-b)+b}{k}\right]}$$

$$\boxed{C = \frac{k\varepsilon_0 A}{kd - b(k-1)}}$$

Questão 2 (3,5 pontos):

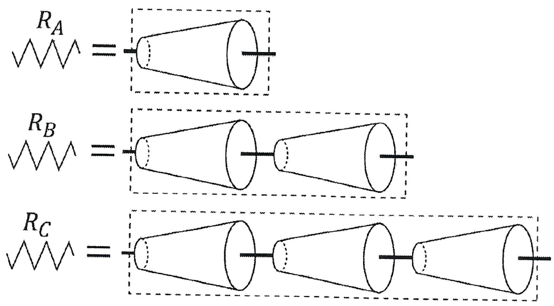
↝ Baseado do Prob. 49 do Tipler (Prob. da Lista de exercícios)

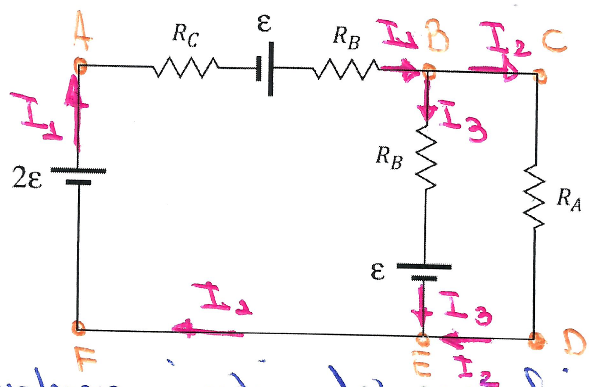


a) (1,5 ponto) Considere que um resistor ôhmico seja construído na forma de um tronco de cone circular reto truncado como mostrado na figura. Neste cone, o raio varia com a distância x tal que $r = r_1 + [(r_2 - r_1)/L]x$. A resistividade do material de que é feito o resistor é ρ. Supondo que a que a densidade de corrente é uniforme através de qualquer seção transversal, deduza a expressão para a resistência R desse resistor em termos de seu comprimento L, raio maior r_1, raio menor r_2 e resistividade ρ.

↝ Similar ao Prob. 90 do Tipler (Prob. da Lista de exercícios)

b) (2,0 pontos) Considere que esses resistores sejam associados como indicado a seguir e utilizados para montar o circuito indicado. Encontre a corrente que atravessa as associações de resistores R_A, R_B e R_C e a potência total dissipada no circuito em termos da razão ε/R, onde R é a resistência de cada resistor cônico.





a) Resistência do elemento de volume indicado na figura:

$dR = \rho \cdot \dfrac{dx}{\pi r^2}$. Como $r = r_1 + \dfrac{(r_2 - r_1)}{L} x \Rightarrow dr = \dfrac{(r_2 - r_1)}{L} dx$

$\Rightarrow dR = \dfrac{\rho L}{\pi (r_2 - r_1)} \dfrac{dr}{r^2} \Rightarrow R = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \dfrac{\rho L}{\pi (r_2 - r_1)} \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{\rho L}{\pi (r_2 - r_1)} \cdot \left(-\dfrac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} \right)$

$\Rightarrow \boxed{R = \dfrac{\rho L}{\pi r_1 r_2}}$ //

b) Solução Geral p/ o circuito da figura.

* Regra dos nós em B: $\boxed{I_1 = I_2 + I_3}$ (1)

* Malha BCDEB: $-R_C I_2 + \varepsilon + R_B I_3 = 0$ (2)

* Malha ABEFA: $+2\varepsilon - R_A I_A + \varepsilon - R_B I_1 - R_B I_3 - \varepsilon = 0$ (3)

De (2) $\Rightarrow$ $\boxed{I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_C} + \dfrac{R_B}{R_C} I_3}$ (2')

De (3) $\Rightarrow$ $\boxed{I_1 = \dfrac{2\varepsilon}{R_A + R_B} - \dfrac{R_B}{R_A + R_B} I_3}$ (3') //

Subst. (2') e (3') em (1):

$$\Rightarrow \frac{2\varepsilon}{R_A+R_B} - \frac{R_B}{R_A+R_B} I_3 = \frac{\varepsilon}{R_C} + \frac{R_B}{R_C} I_3 + I_3$$

$$\Rightarrow I_3\left(\frac{R_BR_C + R_B(R_A+R_B) + R_C(R_A+R_B)}{\cancel{R_C(R_A+R_B)}}\right) = \varepsilon\left(\frac{2R_C - R_A - R_B}{\cancel{R_C(R_A+R_B)}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{\varepsilon(2R_C - R_A - R_B)}{R_B^2 + R_AR_B + R_AR_C + 2R_BR_C}} \, ; \quad \boxed{I_2 = \frac{\varepsilon}{R_C} + \frac{R_B I_3}{R_C}}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{2\varepsilon}{R_A+R_B} - \frac{R_B}{R_A+R_B} I_3}$$

correntes.

* Potência total dissipada: $\boxed{P = R_A I_1^2 + R_B I_1^2 + R_B I_3^2 + R_C I_2^2}$

* Haviam 3 tipos de prova:

* Na prova tipo I: $R_A = R$; $R_B = 2R$ e $R_C = 3R$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{7}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \; ; \quad \boxed{I_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \; ; \quad \boxed{I_1 = \frac{4}{7}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)}$$

$$\boxed{P = \frac{11}{7}\frac{\varepsilon^2}{R}}$$

* Na prova tipo II: $R_A = 2R$; $R_B = R$; $R_C = 3R$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{5}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \; ; \quad \boxed{I_2 = \frac{2}{5}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \quad \boxed{I_1 = \frac{3}{5}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)}$$

$$\boxed{P = \frac{8}{5}\frac{\varepsilon^2}{R}}$$

* Na prova tipo III: $R_A = 3R$, $R_B = 2R$; $R_C = R$

$$\boxed{I_3 = -\frac{3}{17}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \; ; \quad \boxed{I_2 = \frac{11}{17}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)} \; ; \quad \boxed{I_1 = \frac{8}{17}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)}$$

$$\boxed{P = \frac{27}{17}\frac{\varepsilon^2}{R}}$$

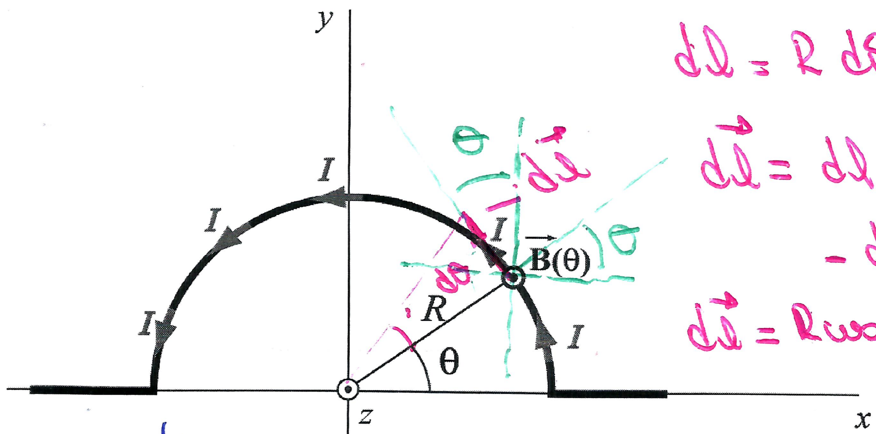
⇒ Prob. similar ao exemplo 26-3 do livro do Tipler.

Questão 3 (3,5 pontos)

Um fio formado por um semicírculo de raio R está no plano xy como mostrado na figura. Ele conduz uma corrente I uniforme. Nesta região existe um campo magnético que sempre é perpendicular ao plano do semicírculo, mas com módulo que varia ao longo do fio de modo que $\vec{B} = B_0 sen\theta\hat{k}$, onde θ está indicado na figura.

a) (2,5 pontos) Determine a força magnética exercida na seção circular do fio.

b) (1,0 ponto) Suponha que o fio possa se movimentar livremente sem atrito no plano xy partindo do repouso na posição mostrada na figura. Suponha também, que a direção, o sentido e a dependência angular do campo magnético e a corrente sejam sempre mantidos. Sabendo que a massa do fio é m e que a aceleração da gravidade aponta na direção $-\hat{\jmath}$. Determine como a velocidade e a posição do fio variam com o tempo.



$dl = R\,d\theta$

$\vec{dl} = dl\cos\theta\,\hat{j} - dl\,sen\theta\,\hat{i}$

$\vec{dl} = R\cos\theta\,d\theta\,\hat{j} - R\,sen\theta\,d\theta\,\hat{i}$

a)

* A força magnética no segmento de fio $\vec{dl}$.

$d\vec{F}_B = I\,\vec{dl} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F}_B = I(dl\cos\theta\,\hat{j} - dl\,sen\theta\,\hat{i}) \times B_0 sen\theta\,\hat{k}$

*Logo: $d\vec{F}_B = IRB_0(sen\theta\cos\theta\,d\theta\,\hat{i} + sen^2\theta\,d\theta\,\hat{j})$

$\vec{F}_B = IRB_0\left(\int_0^\pi \underbrace{sen\theta\cos\theta\,d\theta}_{0}\,\hat{i} + \int_0^\pi \underbrace{sen^2\theta\,d\theta}_{\frac{\pi}{2}}\,\hat{j}\right)$

$$\boxed{\vec{F}_B = \frac{\pi IRB_0}{2}\hat{j}}$$

6

b) $\vec{F}_{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_g = \left(\frac{\pi IRB_0}{2} - mg\right)\hat{j} = m\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \int_0^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{1}{m}\left(\frac{\pi IRB_0}{2} - mg\right)dt \Rightarrow \boxed{v(t) = \left(\frac{\pi IRB_0}{2m} - g\right)t}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = v(t) \Rightarrow \int_0^{y(t)} dy = \int_0^t \left(\frac{\pi IRB_0}{2m} - g\right)t\,dt \Rightarrow \boxed{y(t) = \left(\frac{\pi IRB_0}{2m} - g\right)t^2}$