Universidade de São Paulo–USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Felix Mauricio Escalante Ortega**

# Filtragem e controle recursivos robustos aplicados em um pêndulo invertido

São Carlos
2016

**Felix Mauricio Escalante Ortega**

# Filtragem e controle recursivos robustos aplicados em um pêndulo invertido

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos
2016

**Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.**

O77f

Ortega, Felix Mauricio Escalante
Filtragem e controle recursivos robustos aplicados em um pêndulo invertido / Felix Mauricio Escalante Ortega; orientador Marco Henrique Terra. São Carlos, 2016.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Regulador linear quadrático robusto. 2. Filtro de Kalman robusto. 3. Modelo incerto. 4. Pêndulo invertido. I. Título.

# FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **FELIX MAURÍCIO ESCALANTE ORTEGA.**

Título da dissertação: "Filtragem e controle recursivos robustos aplicados em um pêndulo invertido".

Data da defesa: 21/07/2016

| **Comissão Julgadora:** | **Resultado:** |
|---|---|
| Prof. Titular **Marco Henrique Terra** **(Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC) | Aprovado |
| Prof. Associado **Adriano Almeida Gonçalves Siqueira** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC) | Aprovado |
| Prof. Dr. **José Paulo Vilela Soares da Cunha** (Universidade do Estado do Rio de Janeiro) | Aprovado |

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

*Dedico esta dissertação aos meus pais, Luz e Felix*
*e meus irmãos Albeiro e Marianella.*

# Agradecimentos

A Deus pela benção, pela saúde, pela oportunidade, pela fortaleza para seguir sempre em frente as adversidades e me possibilitou tornar este sonho realidade.

À minha família, pelo apoio, pelo amor e pela compreensão da minha ausência corporal por tanto tempo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Henrique Terra, pela confiança, pela paciência, pela colaboração e pelas valiosas discussões durante o andamento da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Valdir Grassi Jr, pela disposição e atenção, tive a sorte de ter dois orientadores durante a realização do meu mestrado.

Ao meu grande amigo e colega Andres Jutinico, meus sinceros agradecimentos por compartilhar seus conhecimentos comigo e contribuir muito neste trabalho.

Ao Engenheiro Marlon Hernandez, pela amizade, confiança e ajuda na hora que decidi começar este caminho.

Aos meus grandes amigos de mestrado, pela colaboração e ajuda desde minha chegada ao Brasil: Elmer Gamboa, João Benevides, Rayza Araujo, Mauricio Nakai, Jonathan Campo, Wlliam Leão, Elizandra Odorico, Nuno Bueno, Ana Rita Pereira, Felipe Sant'Ana e todos os membros do Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI).

À Vera pelas milhares xícaras gostosas de café que tomei durante meu mestrado e por suas aulas diárias de português.

Finalmente, agradeço à Fundação para o Incremento da Pesquisa e do Aperfeiçoamento Industrial (FIPAI) pela concessão de cinco meses de bolsa (*Processo FB-004/15*).

***"Não existe progresso social que não esteja***
***antecedido pelo progresso***
***do conhecimento"***
*(Profa. Dra. Maíra Martins da Silva)*

# Resumo

Escalante O, F. M **Filtragem e controle recursivos robustos aplicados em um pêndulo invertido**. 74 p. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

O estudo da estabilidade e desempenho em sistemas de controle é um tópico relevante na teoria de sistemas. Quando são assumidas incertezas no modelo da planta, existe uma maior dificuldade para garantir um nível de desempenho adequado do sistema dinâmico e a estabilidade pode ser comprometida. Neste trabalho são utilizados um regulador linear quadrático robusto e um filtro de Kalman robusto combinados em uma única formulação para tratar de sistemas dinâmicos incertos em tempo real. O caso de estudo selecionado é o pêndulo invertido. Seus principais desafios de controle encontrados na literatura: estabilização, seguimento e levantamento-captura, serão considerados. Os algoritmos utilizados são motivados pelo fato de que problemas estocásticos podem ser resolvidos por meio de argumentos determinísticos, baseados nos conceitos de função penalidade e mínimos quadrados regularizados. Desta forma, é possível a obtenção do melhor desempenho em contrapartida à máxima influência de incerteza admissível. A análise de desempenho do controlador robusto é realizada por meio de ensaios práticos incluindo incertezas na planta, ruído nos sensores e distúrbios no sinal de controle do pêndulo.

**Palavras-chave:** Regulador linear quadrático robusto. Filtro de Kalman robusto. Modelo incerto. Pêndulo invertido.

# Abstract

Escalante O, F. M **Robust recursive Filter and control applied to an inverted pendulum** . 74 p. Master Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2016.

The study of stability and performance in control systems is a relevant topic in systems theory. When uncertainties are considered in the model of the plant, there is a greater difficulty in ensuring an appropriate performance level of the dynamic system, plus, the stability could be compromised as well. In this dissertation a robust linear quadratic regulator and a robust Kalman filter are used in a unified manner to deal with uncertain dynamic systems in real time. The selected case study is the inverted pendulum. Its main control challenges found in the literature will be considered: stabilization, tracking and catching swing-up. The used algorithms are motivated by the fact that stochastic problems can be solved through deterministic arguments based on the concepts of penalty function and regularized least-squares. Thus, it is possible to obtain an optimal performance for the maximum acceptable uncertainty. The performance analysis of the robust control is carried out by practical experiments including uncertainties in the plant, noise in the sensors and disturbance in the pendulum control signal.

**Keywords:** Robust linear quadratic regulator. Robust Kalman filter. Uncertain model. Inverted pendulum.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Lista de siglas

**CC** Corrente Contínua (*Direct Current*)

**DR** Desempenho Robusto (*Robust Performance*)

**DN** Desempenho Nominal (*Nominal Performance*)

**EN** Estabilidade Nominal (*Nominal Stability*)

**ER** Estabilidade Robusta (*Robust Stability*)

**FIPAI** Fundação para o Incremento da Pesquisa e do Aperfeiçoamento Industrial

**IMU** Unidade de Medida Inercial (*Inertial Measurement Unit*)

**LASI** Laboratório de Sistemas Inteligentes (*Intelligent System Laboratory*)

**LMIs** Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities*)

**LQR** Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator*)

**RLQR** Regulador Linear Quadrático Robusto (*Robust Linear Quadratic Regulator*)

**RKF** Filtro de Kalman Robusto (*Robust Kalman Filter*)

**SIMO** entrada única e saídas múltiplas (*Single-Input-Multiple-Output*)

# Lista de Símbolos

| Símbolo | Descrição |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | conjunto dos números reais |
| $\mathbb{R}^n$ | conjunto dos vetores reais n-dimensionais |
| $\mathbb{R}^{n\times m}$ | conjunto das matrizes reais $n \times m$ |
| $\parallel x \parallel$ | norma Euclidiana de $x$ definida por $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$ |
| $\Delta$ | matriz de contração |
| $j$ e $k$ | índices de operação |
| $\mu$ | parâmetro de penalidade |
| $x^T W\{\cdot\}$ | expressão simplificada para $x^T W x$ |
| $A \succ 0$ | $A$ é uma matriz definida positiva |
| $I_m$ | Identidade de ordem $m$ |
| sign | função sinal |
| ref | sinal quadrado de referência |
| $\sigma^2$ | variância definida como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ |
| $\overline{\sigma^2}$ | variância média definida como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2)$ |
| RMS | valor médio quadrático definida como $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(X_i^2)}$ |
| $\overline{RMS}$ | média do valor médio quadrático definida como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\text{RMS})$ |
| $\lvert Ov\rvert$ | valor absoluto pico máximo definido como máx$\lvert X_i\rvert$ |
| $\overline{\lvert Ov\rvert}$ | média do valor absoluto máximo definida como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\lvert Ov\rvert)$ |
| médio | erro médio definido como $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(Xi)$ |
| $\overline{\text{médio}}$ | média do erro médio $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\text{médio})$ |

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Nas últimas décadas, o estudo de técnicas de controle e estimação para lidar com sistemas dinâmicos incertos tem sido um dos tópicos ativamente pesquisado pela comunidade científica. O foco no assunto se deve ao vasto campo de aplicações, como por exemplo, em sistemas de potência (RIVERA et al., 2014), robótica (LIU; WANG; ZHONG, 2015), química (ZÚÑIGA; QUEINNEC; WOUWER, 2012), finanças (DADRAS; MOMENI, 2010), comunicações (GONG; WANG; DUAN, 2015), entre outras (CAPOLEI et al., 2015). De acordo com Chang (2014), a hipótese de uma dinâmica incerta, obedece a uma série de fatores, tais como: modelos aproximados, erros de medida e distúrbios externos.

Controle robusto, tópico principal desta dissertação, distingue-se pelo estudo de incertezas na representação do modelo matemático de um sistema. É baseado em estratégias que garantam um adequado nível de desempenho na presença de uma estabelecida faixa de incertezas (PETERSEN; TEMPO, 2014). Seguidamente, de modo geral serão apresentados aspectos da teoria de controle robusto, resumindo alguns fatos relevantes e enfatizando nos tópicos propostos nesta dissertação, os quais se referem ao regulador e estimador de estado robustos do tipo recursivo para sistemas lineares discretos incertos.

## 1.1 Perspectiva histórica

A frase do dramaturgo George Bernard Shaw "*É impossível haver progresso sem mudança ...*", descreve o princípio da evolução da teoria de controle robusto, a qual sofreu uma continua mudança ao longo da história. Segundo Safonov (2012), controle robusto surgiu no inicio da década de 1970 com a necessidade de modificar a concepção da pesquisa desenvolvida sobre a teoria de controle. A modificação decorreu de otimalidade para robustez, visando solucionar os problemas apresentados pela teoria de estimação e controle ótimo tradicional, perante a inserção de incertezas no modelo matemático da planta. Já na década de 1960, a mudança no foco de pesquisa foi em relação ao domínio da frequência para o espaço de estados e controle ótimo, voltado para as deficiências detectadas no domínio da frequência de controladores aeroespaciais, que era um grande

problema da época.

## Acontecimentos relevantes

Durante o período de 1930-1960, a teoria de controle focalizava na estabilidade, redução de sensibilidade e supressão do ruído, conforme Dorato (1987). Nessa época, dois pesquisadores se destacaram, sendo eles, Hendrik Bode e Norbert Wiener. O primeiro pesquisador, investigou a estabilidade em malha fechada da função de transferência, utilizando os diagramas de resposta em frequência de magnitude e fase, além disso estabeleceu a notação de margem de ganho e margem de fase (BODE, 1945). Já Wiener, trabalhou no desenvolvimento de uma teoria geral para a representação de sistemas não lineares. De acordo com Zames (1996), a teoria desenvolvida por Wiener apresentava a propriedade de ortogonalidade, a qual permitia encontrar explicitamente a descomposição de coeficientes por meio de uma média ponderada, envolvendo ruído gaussiano. Em teoria o método visava resolver todos os problemas de filtragem. Infelizmente, o estudo desenvolvido tornou-se inviável na prática, pois exigia um altíssimo custo computacional, sendo impraticável nesta época.

No início da década de 1960, Rudolf E. Kalman, apresentou estratégias para superar as dificuldades mostradas pelas abordagens no domínio da frequência, instituindo uma série de conceitos fundamentais na representação de espaço de estados. De acordo com Kalman (1960a), foi apresentado, pela primeira vez, uma teoria completa para o problema do regulador linear quadrático recursivo, sendo introduzidos os conceitos de observabilidade e controlabilidade. Segundo Kalman (1960b), foram abordados algoritmos recursivos para o cálculo de filtros ótimos e estimação de variáveis de estado. Kalman transformou os modos de tratar os problemas de regulação e filtragem, sendo que o primeiro era tratado com transformadas de Laplace e Fourier e o segundo era abordado com o erro médio quadrático. Tal transformação estabeleceu procedimentos baseados em funções quadráticas, com base em cálculos variacionais, demostrando que o controle ótimo de uma planta é obtido através da retroalimentação linear das variáveis de estado, por meio de uma matriz de ganhos encontrada a partir da solução da equação de Riccati. Durante este período o problema de incerteza tinha sido ignorado amplamente, por isso a teoria proposta por Kalman comprometia o desempenho e a estabilidade dos sistemas de controle e filtragem.

Conforme foi relatado em Safonov (2012), na década de 1970, o projeto de controlador por realimentação para sistemas multivariáveis teve alguns equívocos relevantes, devido a utilização da teoria de otimização matemática. Um fato dominante identificado nestes equívocos foi a robustez, que ainda não havia sido pesquisado pela comunidade científica. Assim, iniciaram o estudo de controle robusto, no qual, de acordo com Vladimir A Yakubovich, propõe utilizar Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) na resolução de

problemas de controle. Posteriormente, Zames (1981) introduziu, pela primeira vez, o problema de controle $H_\infty$ e sua solução em alguns casos especiais.

Nas últimas duas décadas, alguns pesquisadores se dedicam à obtenção de reguladores e estimadores robustos, semelhantes aos algoritmos recursivos deduzidos para sistemas nominais, visto que a teoria de controle baseada em LMIs possui algumas limitações para aplicações online e requerem parâmetros de ajuste para garantir desempenho robusto. Abordagens que tratam o problema de controle robusto, podem ser encontrados em (YANG; TOMIZUKA, 1990; GARCIA et al., 2003; YU; HAN; SUN, 2005). Trabalhos que tratam do problema de estimação e filtragem robusta podem ser vistos em (SAYED, 2001; ISHIHARA; TERRA; CAMPOS, 2006). Recentemente, o problema de regulação e filtragem robusta foram resolvidos em Terra, Cerri e Ishihara (2014) e Ishihara, Terra e Cerri (2015), respectivamente. Estas abordagens são do tipo recursivo, prescinde de parâmetros para ajustar o desempenho do sistema e são baseadas no conceito de função penalidade (LUENBERGER; YE, 2008) e mínimos quadrados regularizados (SAYED; NASCIMENTO, 1999).

## 1.2 Proposta do trabalho

Esta dissertação propõe a utilização das técnicas recursivas do regulador linear quadrático robusto, apresentada em (TERRA; CERRI; ISHIHARA, 2014) e, também, o uso do filtro de Kalman robusto ótimo relatado por Cerri (2013) e Ishihara, Terra e Cerri (2015) para controlar um sistema altamente não linear. Ambas as técnicas foram combinadas em uma única formulação, visando controlar e estimar, em tempo real, as variáveis de estado de um pêndulo invertido clássico. Deste modo, os objetivos desta pesquisa são:

- Analisar o desempenho do sistema diante da presença de incertezas no modelo matemático, distúrbio no sinal de controle e ruído nas medições dos sensores.

- Resolver os três principais problemas de controle para o pêndulo invertido encontrados na literatura: levantamento, estabilização e seguimento de referência.

## 1.3 Organização do texto

Esta dissertação está organizada, a partir daqui, da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** será apresentado o pêndulo invertido e seus principais problemas de controle: levantamento-captura, estabilização e seguimento de referência. Posteriormente, serão mostrados alguns resultados básicos sobre a modelagem matemática, linearização e respectiva representação em espaço de estado.

- **Capítulo 3:** serão abordadas as formulações nominal e robusta do regulador linear quadrático juntamente com o filtro de Kalman robusto, considerando um conjunto de incertezas paramétricas não estruturadas.

- **Capítulo 4:** será descrita a metodologia do projeto de controle. Primeiramente, tem-se como hipótese o acesso completo aos estados do sistema para projetar o regulador linear quadrático robusto. Posteriormente, considera-se a necessidade de estimar os estados do sistema, utilizando a combinação do regulador linear quadrático e o filtro de Kalman robustos.

- **Capítulo 5:** será apresentada uma análise e discussão dos resultados experimentais obtidos a partir da metodologia do projeto relatada no Capítulo 4 e, também, os principais problemas de controle do pêndulo invertido mencionados no Capítulo 2. Os conceitos de estabilidade e desempenho robustos foram examinados com uma série de ensaios.

Capítulo 2

# Sobre o pêndulo invertido

Este capítulo dedica-se à descrição do pêndulo invertido. Inicialmente, apresenta-se um preâmbulo da planta, as mais relevantes aplicações e principais problemas de controle encontrados na literatura. Em seguida, com base nas equações de movimento, deriva-se um modelo matemático para o pêndulo. O capítulo finaliza com a linearização do modelo matemático para um ponto de equilíbrio, obtendo-se dois modelos em espaço de estado do sistema.

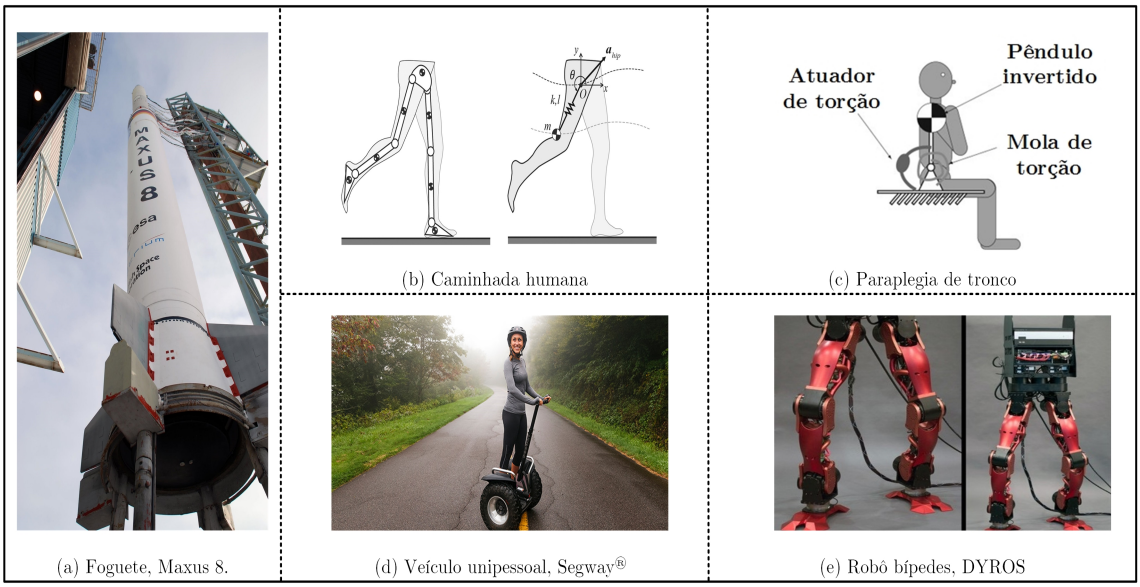
## 2.1 Sistema pêndulo invertido

O pêndulo invertido é um sistema mecânico clássico com características dinâmicas intrinsecamente instáveis. Apesar de tratar-se de um sistema com estrutura bastante simples, tem sido utilizado em pesquisas com o objetivo de se avaliar o desempenho de diferentes estratégias de controle (POLO; MOLINA; CHICA, 2012; NG; CHANG; SONG, 2013; PRASAD; TYAGI; GUPTA, 2015; CUI; GUO; MAO, 2014; BETTAYEB et al., 2014; MURALIDHARAN; MAHINDRAKAR, 2014). Além disso, o pêndulo invertido representa o princípio de inúmeras aplicações em vários campos do conhecimento, por exemplo: veículos de transporte urbano (PATHAK; FRANCH; AGRAWAL, 2005; VERMEIREN et al., 2011), robôs aéreos não-tripulados em formação (YANG et al., 2014), robôs com duas rodas (GRASSER et al., 2002), exoesqueletos para analisar as forças de reação do solo com os membros inferiores (XIANG; ARORA; ABDEL-MALEK, 2011), como representação da coluna vertebral para pacientes com paraplegia de tronco (VANONCINI; HOLDERBAUM; ANDREWS, 2012), como modelo do corpo humano em estudos de equilíbrio, a partir de Unidade de Medida Inercial (IMU)[1] (VIKAS; CRANE, 2015). Para ilustrar melhor as aplicações, considere a Figura 1.

Dependendo da aplicação, o controle do pêndulo invertido pode ser divido em três principais aspectos. O primeiro é amplamente pesquisado e trata-se do controle de levantamento, conhecido na literatura como *swing-up*. É responsável por impulsar o pêndulo,

[1] *Do inglês: Inertial Measurement Unit.*

desde a posição de equilíbrio estável (*posição inferior*) até a posição de equilíbrio instável (*posição superior*), ou bem próxima desta e capturá-lo. A captura do pêndulo é conhecida na literatura como *catching*, as seguintes referências apresentam alguns trabalhos de levantamento e captura no pêndulo invertido (CHATTERJEE; PATRA; JOGLEKAR, 2002; DURAND et al., 2013). Os dois aspectos restantes são o controle de estabilização e controle de seguimento, respectivamente. São utilizados em numerosas aplicações em tempo real, veja por exemplo (FU et al., 2016; KUO, 1999; TRIMPE; ANDREA, 2012).




(a) Foguete, Maxus 8. (b) Caminhada humana (c) Paraplegia de tronco (d) Veículo unipessoal, Segway® (e) Robô bípedes, DYROS

Figura 1 – Exemplos de sistemas que se comportam como pêndulos invertidos – Figura 1(a): Foguete MAXUS 8, figura tomada da Agência Espacial Europeia (ESA). Figura 1(b): Dinâmica da caminhada humana, figura adaptada de (SONG; PARK; PARK, 2016). Figura 1(c): Reabilitação de pacientes com paraplegia de coluna vertebral, figura adaptada de (VANONCINI; HOLDERBAUM; ANDREWS, 2012). Figura 1(d): Veículo de transporte unipessoal *Segway*®, figura tomada da galeria multimédia de *Segway Inc.* Figura 1(e): Robô humanoide *DYROS*, figura adaptada de (SCHWARTZ et al., 2014).

## 2.2 Modelagem matemática

Neste trabalho, pretende-se utilizar um pêndulo invertido na configuração haste $H_a$ sobre carrinho $C$, como ilustrado na Figura 2. As variáveis que definem a condição do sistema no tempo são: a posição linear do carrinho $x_a$ e a posição angular da haste $\theta$ com respeito à vertical. A seguir apresenta-se o procedimento aplicado para o desenvolvimento do modelo matemático do pêndulo invertido.

Utilizando as equações fundamentais de movimento e, auxiliado pela Figura 3, é possível deduzir o comportamento do sistema analisando separadamente cada corpo que compõe o sistema. Diagramas de corpo livre ilustram, através das Figuras 3(a) e 3(b), as forças que intervêm no carrinho e na haste, respectivamente.

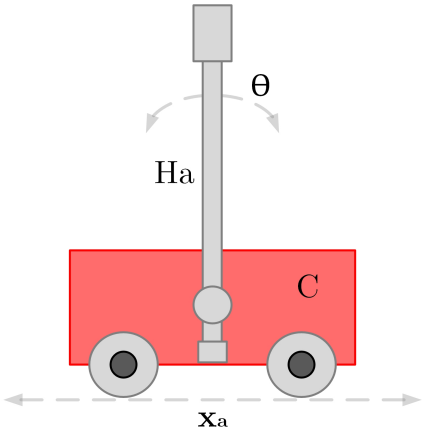
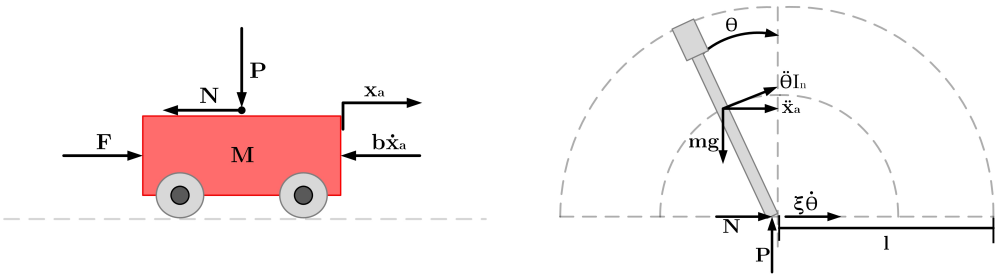



Figura 2 – Sistema pêndulo invertido na configuração haste $H_a$ sobre base móvel $C$.




(a) Diagrama de corpo livre do carrinho. (b) Diagrama de corpo livre da haste.

Figura 3 – Análise de forças que intervém no pêndulo invertido. Força de impulso aplicada no carrinho $F$. Componente horizontal e vertical da força de reação na articulação entre o carrinho e a haste $N$ e $P$, respectivamente. Posição, velocidade e aceleração linear $x_a$, $\dot{x}_a$ e $\ddot{x}_a$, respectivamente. Posição, velocidade e aceleração angular $\theta$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, respectivamente. Massas do carrinho $M$ e da haste $m$. Comprimento $l$ e Inércia $I_n$ da haste. Coeficientes de atrito: entre o carrinho e a superfície $b$, entre o carrinho e a haste $\xi$. Aceleração gravitacional $g$.

Aplicando a segunda lei de Newton sob o carrinho na direção horizontal, resulta a seguinte equação de movimento,

$$M\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + N = F. \tag{1}$$

Da mesma forma, aplicando a segunda lei de Newton sob a haste na direção horizontal, obtém-se a força de reação,

$$N = m\ddot{x}_a + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$(m+M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta = F. \tag{3}$$

Somando as forças perpendiculares na haste, obtém-se depois de algumas simplificações matemáticas a segunda equação de movimento do sistema,

$$N\sin\theta - F_x\cos\theta - P\text{sen}\theta + \xi\dot{\theta} \;=\; ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}_a\cos\theta. \tag{4}$$

Somando os momentos sobre a haste, obtêm-se (5) em termos das forças de reação $N$ e $P$:

$$-Pl\text{sen}\theta - Nl\cos\theta \;=\; I_n\ddot{\theta} + \xi\dot{\theta}. \tag{5}$$

Pós-multiplicando a expressão (4) por $-l$ e substituindo a expressão resultante em (5), obtém-se:

$$(I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\text{sen}\theta - ml\ddot{x}_a\cos\theta + \xi\dot{\theta} \;=\; 0. \tag{6}$$

As expressões (3) e (6) representam o modelo não-linear do pêndulo invertido. Observe que este modelo é uma planta de entrada única e saídas múltiplas (SIMO)[2]. Além disso, o modelo descrito não relaciona a força $F$ com o sinal de controle real $u$, a qual obedece à tensão de controle do motor do sistema. Assumindo que a relação entre a tensão de controle $u$ e a velocidade do carrinho gerada é linear, é possível adicionar o vetor de velocidade gerado pelo motor no modelo matemático e ignorar o vetor de força $F$. Ou seja, a tensão de controle provocará a movimentação do carrinho com velocidade constante, desta forma reescreve-se $F = k_m\dot{u}$, sendo $k_m$ a relação existente entre a força que atua no motor e a derivada da tensão $u$, a qual representa a taxa de variação instantânea do motor. Deste modo, o modelo do pêndulo invertido pode ser rescrito como:

$$\begin{aligned}(m+M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\text{sen}\theta &= k_m\dot{u},\\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + ml\ddot{x}_a\cos\theta + \xi\dot{\theta} &= 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Fisicamente a inclusão de um modelo derivativo no sinal de controle representa a formulação matemática da indutância do motor, devido a que o mesmo carece de um controle interno de torque. Por outro lado, em termos de software, o modelo derivativo pode ser causante de problemas numéricos de simulação, neste caso particular por causa da utilização do ambiente *Simulink* em MATLAB.

A Tabela 1 mostra os parâmetros envolvidos no modelo matemático, os valores consignados são fornecidos pelo fabricante *Feedback Instruments Ltd* no manual técnico (*33-936S Ed02-1 122013*), conforme (FEEDBACK INSTRUMENTS LTD., 2013).

[2] *Do inglês: Single-Input-Multiple-Output.*

Tabela 1 – Parâmetros do pêndulo invertido.

| Definição | Parâmetro | Valor/Unidade |
|---|---|---|
| Aceleração gravitacional | $g$ | $9,81\ m/s^2$ |
| Momento de inércia | $I_n$ | $0,0076\ kgm^2$ |
| Massa do carro | $M$ | $2,4\ kg$ |
| Massa da haste | $m$ | $0,23\ kg$ |
| Comprimento da haste | $l$ | $0,4\ m$ |
| Coeficiente de atrito | $b$ | $0,05\ Ns/m$ |
| Coeficiente de amortecimento | $\xi$ | $0,006\ Nms/rad$ |
| Constante do motor | $k_m$ | 8 |

## 2.3 Modelo em espaço de estado linearizado

O pêndulo invertido possui dois pontos de operação, um deles estável: quando a haste encontra-se na posição inferior, o outro instável: quando a haste encontra-se na posição superior. No último caso, para pequenas variações de ângulo ao redor do ponto de equilíbrio instável $\theta = 0\ rad$. As considerações podem ser escritas como aproximações, logo:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &\approx \theta, \\ \cos\theta &\approx 1, \\ \dot{\theta}^2 &\approx 0, \end{aligned}$$

desta forma o modelo não linear (7), pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + ml\ddot{\theta} &= k_m\dot{u}, \\ (I_n + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + ml\ddot{x}_a + \xi\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

### 2.3.1 Modelo nominal $\chi_a(x,t)$

Integrando e manipulando algebricamente (8) é possível obter um modelo em espaço de estado em termos das velocidades angular $\dot{\theta}$ e linear $\dot{x}_a$, conforme (9). Perceba que o processo de integração elimina $\dot{u}$.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{-(m+M)\dot{x}_a - bx_a + k_m u}{ml}, \\ \dot{x}_a &= \frac{-(I_n + ml^2)\dot{\theta} + mgl\int\theta dt - \xi\theta}{ml}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo o termo de $\dot{\theta}$ na expressão de $\dot{x}_a$ e vice-versa, obtém-se um sistema de equações (10) em função das variáveis: posição angular $\theta$, posição linear $\ddot{x}_a$, a integral da posição angular no tempo $\int\theta dt$ e o sinal de controle $u$.

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{\xi(m+M)\theta - b(ml)x_a - mgl(m+M)\int\theta dt + k_m(ml)u}{-ml^2M - I_n(m+M)}, \\
\dot{x}_a &= \frac{-\xi(ml)\theta + b(I_n+ml^2)x_a + g(ml)^2\int\theta dt - k_m(I_n+ml^2)u}{-ml^2M - I_n(m+M)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Desta forma, o primeiro modelo em espaço de estado é apresentado em (11). As variáveis de estado são: a posição angular $x_{1a} = \theta$, a posição linear $x_{2a} = x_a$ e a ação integral da posição angular $x_{3a} = \int\theta dt$, sendo $\Delta_f = -ml^2M - I_n(m+M)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1a} \\ \dot{x}_{2a} \\ \dot{x}_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\xi(m+M)}{\Delta_f} & -\frac{bml}{\Delta_f} & -\frac{mgl(m+M)}{\Delta_f} \\ -\frac{\xi ml}{\Delta_f} & \frac{b(I_n+ml^2)}{\Delta_f} & \frac{g(ml)^2}{\Delta_f} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1a} \\ x_{2a} \\ x_{3a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m ml}{\Delta_f} \\ -\frac{k_m(I_n+ml^2)}{\Delta_f} \\ 0 \end{bmatrix} u. \tag{11}$$

O modelo nominal definido em (11) é aumentado em (12) e (13) incluindo a ação integral da posição linear $x_{int} = \int x_a dt$ como variável de estado . Desta maneira, o modelo em espaço de estado final realiza-se em função das posições linear e angular, junto com a ação integral das mesmas. A inclusão da ação integral como variável de estado permite a rejeição de perturbações, seguimento de sinais de referência e garantir além de tudo o erro nulo de estado estacionário. Em teoria de controle este fenômeno da ação integral é conhecido como *princípio do modelo interno* , proposto por Francis e Wonham (1976). Assim é possível garantir a restrição física de descolamento do carrinho no trilho ($d = 0,8m$), parâmetro especifico da planta a ser controlada nesta dissertação.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= F_a x + B_a u \\
y &= C_a x + Du \\
C_a &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & 0 \\ C_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} u. \tag{13}$$

### 2.3.2 Modelo nominal $\chi_b(x,t)$

Um segundo modelo em espaço de estado é deduzido a partir da formulação apresentada em (8). Desta vez, somente é realizado um tratamento algebraico visando expressar o equacionamento em termos de acelerações angular $\ddot{\theta}$ e linear $\ddot{x}_a$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{\xi(m+M)\dot{\theta} - b(ml)\dot{x}_a - mgl(m+M)\theta + k_m(ml)\dot{u}}{-ml^2M - I_n(m+M)}, \\
\ddot{x}_a &= \frac{-\xi(ml)\dot{\theta} + b(I_n+ml^2)\dot{x}_a + g(ml)^2\theta - k_m(I_n+ml^2)\dot{u}}{-ml^2M - I_n(m+M)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

O modelo em espaço de estado é apresentado em (15). As variáveis de estado são: posição angular $x_{1b} = \theta$, posição linear $x_{2b} = x_a$, velocidade angular $x_{3b} = \dot{\theta}$ e velocidade linear $x_{4b} = \dot{x}_a$, da mesma forma $\Delta_f = -ml^2M - I_n(m+M)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1b} \\ \dot{x}_{2b} \\ \dot{x}_{3b} \\ \dot{x}_{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgl(m+M)}{\Delta_f} & 0 & \frac{\xi(m+M)}{\Delta_f} & -\frac{b(ml)}{\Delta_f} \\ \frac{g(ml)^2}{\Delta_f} & 0 & -\frac{\xi(ml)}{\Delta_f} & \frac{b(I_n+ml^2)}{\Delta_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \\ x_{3b} \\ x_{4b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m(ml)}{\Delta_f} \\ -\frac{k_m(I_n+ml^2)}{\Delta_f} \end{bmatrix} \dot{u}. \quad (15)$$

Analogamente ao modelo $\chi_a(x,t)$, (15) é aumentado como em (13) para incluir a ação integral do deslocamento como variável de estado $x_{int}$, com $C_b = [0\ -1\ 0\ 0]$ e $D = 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b & 0 \\ C_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}. \quad (16)$$

# Capítulo 3

# Controle e filtragem robusta

Com o objetivo de introduzir os conceitos fundamentais utilizados nesta dissertação, neste capítulo serão apresentadas estratégias recursivas de controle e filtragem robustas para sistemas lineares discretos. Inicialmente, apresenta-se o Regulador Linear Quadrático Robusto (RLQR), desenvolvido em (TERRA; CERRI; ISHIHARA, 2014). Em seguida, o Filtro de Kalman Robusto (RKF), baseado nos trabalhos de Cerri (2013) e Ishihara, Terra e Cerri (2015). Finalmente, o caso nominal onde se desconsideram as incertezas do modelo será apresentado.

## 3.1 Regulador linear quadrático robusto

Considere um sistema linear de tempo discreto sujeito a incertezas paramétricas (17),

$$x_{k+1} = (F_k + \delta F_k)x_k + (B_k + \delta B_k)u_k; \quad k = 0, \cdots, N, \tag{17}$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ é o vetor de controle, $F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B_k \in \mathbb{R}^{n\times m_1}$ são matrizes de parâmetros nominais com dimensões apropriadas e $x_0$ é um parâmetro constante. Em (18), $\delta F_k \in \mathbb{R}^{nxn}$ e $\delta B_k \in \mathbb{R}^{nxm_1}$ são matrizes de incertezas desconhecidas nas quais $H_k \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $E_{F_k} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $E_{B_k} \in \mathbb{R}^{l\times m_1}$ são matrizes conhecidas e $\Delta_k \in \mathbb{R}^{q\times l}$ é uma matriz arbitrária tal que $\| \Delta_k \| \leq 1$. Assuma, a partir de agora que a matriz $H_k$ seja nula para todo $k$,

$$[\delta F_k \ \delta B_k] = H_k \Delta_k \left[E_{F_k} \ E_{B_k}\right]; \quad k = 0, \ldots, N. \tag{18}$$

O RLQR é baseado na solução ótima $(x^*_{k+1}, u^*_k)$, que resolve o problema de otimização (19). Desta forma, é possível obter a estabilidade de um sistema com uma resposta ótima, apesar das diferentes incertezas paramétricas,

$$\min_{x_{k+1},u_k} \max_{\delta F_k,\delta B_k} \{J_k^{\mu_c}(x_{k+1}, \mu_k, \delta F_k, \delta B_k)\}, \tag{19}$$

sendo $\mu_c > 0$ um parâmetro de penalidade e $J_k^{\mu_c}(x_{k+1}, \mu_k, \delta F_k, \delta B_k)$ o funcional custo quadrático dado por (20):

$$J_i^{\mu_c}(x_{k+1}, \mu_k, \delta F_k, \delta B_k) = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{c,k+1} & 0 \\ 0 & R_{c,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \tag{20}$$

$$+ \left\{ \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta B_k \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -I \\ F_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_k \end{bmatrix} x_k \right) \right\}^T \begin{bmatrix} Q_{c,k} & 0 \\ 0 & \mu_c I \end{bmatrix} \left\{ \bullet \right\}.$$

O RLQR é apresentado na Tabela 2. Em (21), as matrizes auxiliares são definidas, $P_{c,k} \succ 0$, $Q_{c,k} \succ 0$ e $R_{c,k} \succ 0$ são matrizes de ponderação e o parâmetro de penalidade $\mu_c$ é responsável por garantir a robustez do RLQR. De fato, quando $\mu \to +\infty$, então $\sum_{c,\mu_c,k} \to 0$. Desta forma, (22) é satisfeita garantindo a robustez do controlador e a resposta ótima do sistema $(x_{k+1}^*, u_k^*)$. Note que (22) é a resposta do sistema em malha fechada de (17) e $K_k$ é o vetor controle,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{c,\mu,k} &= \begin{bmatrix} \mu_c^{-1} I - \widehat{\lambda}_k^{-1} H_k H_k^T & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_k^{-1} I \end{bmatrix}, \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_k &= \begin{bmatrix} B_k \\ E_{B_k} \end{bmatrix}, \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ E_{F_k} \end{bmatrix}, \widehat{\lambda}_k > \| \mu_c H_k^T H_k \|, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{cases} L_{k,\infty} = F_k + B_k K_{k,\infty} \\ E_{F_k} + E_{B_k} K_{k,\infty} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Tabela 2 – Regulador linear quadrático robusto recursivo

**RLQR:** Considere (17), (18) e (20), com $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{I}$, $E_{F_k}$, $E_{B_k}$ $\sum_{k,\mu_c}$, $Q_{c,k} \succ 0$, e $R_{c,k} \succ 0$ conhecidos para todo $k$.
**Condições Iniciais:** Definem-se $x_0$ e $P_{c,N+1} \succ 0$.
**Passo 1:** (*Para trás*)
Calcula-se para todo $K = N, \ldots, 0$.

$$\begin{bmatrix} L_k \\ K_k \\ P_{c,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_k \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} P_{c,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{c,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{c,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{c,\mu,k} & \mathcal{I} & -\mathcal{B}_k \\ I & 0 & 0 & \mathcal{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Passo 2:** (*Para frente*).
Calcula-se para todo $k = 0, \ldots N$.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k \\ K_k \end{bmatrix} x_k^*.$$

com o custo ótimo dado por $J_r^* = x_0^T P_0 x_0$.

## 3.2 Filtro de Kalman robusto

Considere o sistema linear de tempo discreto com incertezas paramétricas (23),

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= (\bar{F}_k + \delta\bar{F}_k)\bar{x}_k + (\bar{B}_k + \delta\bar{B}_k)\bar{u}_k + (G_k + \delta G_k)w_k, \\ y_k &= (C_k + \delta C_k)\bar{x}_k + (D_k + \delta D_k)v_k, \end{aligned} \tag{23}$$

para todo $k \geq 0$, onde $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ é o vetor de estado, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída (observações), $\bar{u}_k \in \mathbb{R}^{\bar{m}_1}$ é a entrada de controle conhecida, $w_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ é o vetor de ruído de estado com variância $Q_k \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $v_k \in \mathbb{R}^t$ é o vetor de ruído de saída com variância $R_k \in \mathbb{R}^{t \times t}$. $\bar{F}_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$, $\bar{B}_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{m}_1}$, $G_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times m_2}$, $C_k \in \mathbb{R}^{p \times \bar{n}}$, $D_k \in \mathbb{R}^{p \times t}$ são matrizes de parâmetros nominais com dimensões apropriadas conhecidas, $\delta\bar{F}_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$, $\delta\bar{B}_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{m}_1}$, $\delta G_k \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times m_2}$, $\delta C_k \in \mathbb{R}^{p \times \bar{n}}$, $\delta D_k \in \mathbb{R}^{p \times t}$ são as matrizes de incertezas que satisfazem:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \delta\bar{F}_k & \delta\bar{B}_k & \delta G_k \end{bmatrix} = M_k \Delta_1 \begin{bmatrix} E_{\bar{F}_k} & E_{\bar{B}_k} & E_{G_k} \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} \delta C_k & \delta D_k \end{bmatrix} = N_k \Delta_2 \begin{bmatrix} E_{C_k} & E_{D_k} \end{bmatrix}, \\ &\| \Delta_1 \| \leq 1, \quad \| \Delta_2 \| \leq 1, \end{aligned} \tag{24}$$

sendo $M_k$, $N_k$ matrizes não nulas, $E_{\bar{F}_k}, E_{G_k}, E_{\bar{B}_k}, E_{C_k}, E_{D_k}$ matrizes conhecidas com dimensões apropriadas, $\Delta_1$ e $\Delta_2$ matrizes de contração arbitrárias. Assuma-se que $\bar{x}_0$, $w_k$ e $v_k$ são variáveis aleatórias gaussianas de média zero mutuamente independentes com varianças $\mathbb{E}\{\bar{x}_0\bar{x}_0^T\} = \Pi_0 \succ 0$, $\mathbb{E}\{w_0 w_0^T\} = Q_k \succ 0$ e $\mathbb{E}\{v_0 v_0^T\} = R_k \succ 0$, respectivamente.

### 3.2.1 Estimativa robusta

O problema de estimação robusta estabelece que: para cada $k > 0$, determinar as estimativas de estado $\hat{x}_{k+1}$ e $\hat{x}_k$ através da solução do problema de otimização (25):

$$\min_{\hat{w}_k,\hat{v}_k,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1}} \max_{\delta_k}\{\mathcal{J}_k^{\mu}(\hat{w}_k,\hat{v}_k,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1},\delta_k)\}, \tag{25}$$

onde $\delta_k := \{\delta\bar{F}_k, \delta\bar{B}_k, \delta G_k, \delta C_k, \delta D_k\}$, a função custo $\mathcal{J}_k^{\mu}$ é definida em (26). $P_{k|k-1} \succ 0$, $Q_k$ e $R_k$ são matrizes de ponderação e $\mu$ é o parâmetro de penalidade,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_k^{\mu} := \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2_{P^{-1}_{k|k-1}} + \|\hat{w}_k\|^2_{Q_k^{-1}} + \|\hat{v}_k\|^2_{R_k^{-1}} \\
&+ \mu(\|\hat{x}_{k+1} - (\bar{F}_k + \delta\bar{F}_k)\hat{x}_k - (\bar{B}_k + \delta\bar{B}_k)\bar{u}_k \\
&-(G_k + \delta G_k)\hat{w}_k\|^2 + \ \|y_k - (C_k + \delta C_k)\hat{x}_k \\
&-(D_k + \delta D_k)\hat{v}_k\|).
\end{aligned} \tag{26}$$

O parâmetro de penalidade é o responsável por abarcar todas as incertezas do sistema. No entanto, desconsiderando-se as incertezas e $\mu \to +\infty$, (25) é reduzido para o problema de minimização (27),

$$\begin{gathered}
\min_{\hat{w}_k,\hat{v}_k,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1}}\{\mathcal{J}_k^{\mu}(\hat{w}_k,\hat{v}_k,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1})\}, \\
\text{sujeito a} \begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{F}_k\bar{x}_k + \bar{B}_k\bar{u}_k + G_k w_k, \\ y_k = C_k\bar{x}_k + D_k v_k, \end{cases}
\end{gathered} \tag{27}$$

com $\mathcal{J}_k := (\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P^{-1}_{k|k-1}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}) + \hat{w}_k^T Q_k^{-1}\hat{w}_k + \hat{v}_k^T R_k^{-1}\hat{v}_k$.

### 3.2.2 Estimativa robusta ótima

O filtro robusto ótimo sujeito a incertezas considerado nesta dissertação, foi desenvolvido em Ishihara, Terra e Cerri (2015). Os parâmetros perturbados de (23), podem ser reescritos na forma: $F_k^{\delta} = \bar{F}_k + \delta\bar{F}_k$, $G_k^{\delta} = G_k + \delta G_k$, $B_k^{\delta} = \bar{B}_k + \delta\bar{B}_k$, $C_k^{\delta} = C_k + \delta C_k$, $D_k^{\delta} = D_k + \delta D_k$. As estimativas robustas ótimas $\hat{x}_{\mu,k+1|k}$ e $\hat{x}_{\mu,k|k}$ são obtidas através da solução do problema de otimização min-max (25). Desta forma, a função custo é definida em (28) para todo $k = 0, \cdots, N$. Com $P_{k|k-1} \succ 0$, $Q_k \succ 0$ , $R_k \succ 0$ e $\mu > 0$ fixado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k^{\mu}(\hat{w}_k,\hat{v}_k,\hat{x}_k,\hat{x}_{k+1},\delta_k) := &\begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1}_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} + \\
&\left\{ \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & G_k^{\delta} & 0 & F_k^{\delta} & -I \\ 0 & 0 & D_k^{\delta} & C_k^{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ -B_k^{\delta}\bar{u}_k \\ y_k \end{bmatrix} \right\}^T \mu I \left\{ \ \bullet \ \right\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

O método para calcular o RKF na forma preditora e filtrada é apresentado na Tabela 3. Em (29) são definidas as matrizes auxiliares necessárias para garantir a resposta ótima do sistema $\alpha \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
&\hat{\lambda} = (1+\alpha) \left\| \begin{matrix} \mu M_k^T M_k & 0 \\ 0 & \mu N_k^T N_k \end{matrix} \right\|, \hat{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\Sigma_{1,\mu,k} = \begin{bmatrix} (\mu^{-1} I - \hat{\lambda}_k^{-1} M_k M_k^T) & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} I \end{bmatrix}, \\
&\Sigma_{2,\mu,k} = \begin{bmatrix} (\mu^{-1} I - \hat{\lambda}_k^{-1} N_k N_k^T) & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} I \end{bmatrix}, \\
&\hat{F}_k = \begin{bmatrix} \bar{F}_k \\ E_{\bar{F}_k} \end{bmatrix}, \hat{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_k \\ E_{\bar{B}_k} \end{bmatrix}, \hat{G}_k = \begin{bmatrix} G_k \\ E_{G_k} \end{bmatrix}, \\
&\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ E_{C_k} \end{bmatrix}, \hat{D}_k = \begin{bmatrix} D_k \\ E_{D_k} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Tabela 3 – Filtro de Kalman robusto recursivo na forma preditora e filtrada.

**Modelo incerto:** Considere (23) com $\Pi_0 \succ 0$, $Q_k \succ 0$, e $R_k \succ 0$.
**Condições iniciais:** $P_{0|-1} = \Pi_0$ e $\hat{x}_{0|-1} = 0$.
**Passo** $k \geq 0$**:** calcule $\{\hat{x}_{k+1|k}; P_{k+1|k}\}$ e $\{\hat{x}_{k|k}; P_{k|k}\}$ de acordo com:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} & P_{k|k} & * \\ \hat{x}_{k+1|k} & * & P_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{1,\mu,k} & 0 & 0 & \hat{G}_k & 0 & \hat{F}_k & -\hat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{2,\mu,k} & 0 & 0 & \hat{D}_k & \hat{C}_k & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \hat{G}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \hat{D}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \hat{F}_k^T & \hat{C}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{I}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ -(\hat{B}_k \bar{u}_k) & 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

## 3.3 Regulador linear quadrático

Nesta seção será mostrada a dedução do problema de controle ótimo quadrático conhecido como Regulador Linear Quadrático (LQR), conforme (CERRI, 2009). Para isso, considere novamente (17),

$$x_{k+1} = (F_k + \delta F_k)x_k + (B_k + \delta B_k)u_k; \quad k = 0, \cdots, N.$$

Assumindo que as matrizes de incertezas $\delta F_k = \delta B_k = 0$, a formulação proposta para o RLQR recai para o caso do controle nominal, como em (30):

$$x_{k+1} = F_k x_k + B_k u_k; \; k = 0, \cdots, N, \tag{30}$$

e considere o funcional quadrático (31) como:

$$J = x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + \sum_{j=0}^{N} (x_j^T Q_j x_j + u_j^T R_j u_j), \tag{31}$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle, $F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrizes com dimensões apropriadas e $x_0$ constante. As matrizes de ponderação $P_i \succ 0$, $Q_i \succ 0$ e $R_i \succ 0$ são conhecidas e definem o desempenho do controlador LQR. Desta forma, considere o problema de minimização,

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \{J\}, \tag{32}$$

sujeito a uma restrição de igualdade (33),

$$s.a \; x_{k+1} = F_k x_k + B_k u_k; \; k = 0, \cdots, N. \tag{33}$$

O objetivo é determinar uma sequência ótima $\{(x_{k+1}^*, u_k^*)\}_{k=0}^N$ que minimize o funcional quadrático (31). Tanto a variável de estado $x_{k+1}$ quanto a variável de controle $u_k$ são consideradas ao mesmo tempo como variáveis do problema de minimização restrita. A solução para o regulador linear quadrático é apresentada na Tabela 4, sendo a solução recursiva ótima definida em função de $(x_{k+1}^*, u_k^*)$, $L_k$ e $K_k$. Mais detalhes sobre este regulador podem ser vistos em Cerri (2009).

Tabela 4 – Regulador linear quadrático recursivo

**LQR:** Considere (30) e (33) com $F_k$, $G_k$, $Q_k \succ 0$ e $R_k \succ 0$ para todo k.
**Condições Iniciais:** Definem-se $x_0$ e $P_{k+1} \succ 0$.
**Passo 1:** (*Para trás*).
Calcula-se para todo $k = N, \ldots 0$.

$$\begin{bmatrix} L_k \\ K_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} P_{k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -B_k \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -B_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P_k = L_k^T P_{k+1} L_k + K_k^T R_k K_k + Q_k$
**Passo 2:** (*Para frente*).
Calcula-se para todo $k = 0, \ldots N$.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k \\ K_k \end{bmatrix} x_k^*.$$

Com o custo ótimo é dado por $J_r^* = x_0^T P_0 x_0$.

Capítulo 4

# Metodologia do projeto

Neste capítulo serão descritos em duas partes a metodologia utilizada neste trabalho. Primeiramente, descreve-se a configuração de trabalho do sistema real junto com o funcionamento do sistema de sensoriamento. Em seguida, apresenta-se o procedimento desenvolvido na obtenção de duas estratégias de controle robustas. A primeira delas, apresentada na Subseção 4.2.1, sendo o regulador linear quadrático robusto RLQR e finalmente, na Subseção 4.2.2, apresenta-se a combinação do RLQR com o filtro de Kalman robusto RKF.

## 4.1 Descrição do arranjo experimental de trabalho

A planta considerada neste trabalho é um pêndulo invertido estruturado como *kit* didático (*N° 1160-33936S*) fabricado pela empresa *Feedback Instruments Ltda.* Este sistema está representado pelo conjunto carrinho $C$ e haste $Ha$ como pode ser observado na Figura 4. O movimento rotativo produzido pelo motor $Mo$ é convertido em movimento linear através da correia dentada $Cd$ acoplada entre duas engrenagens $E1$ e $E2$. O deslocamento no trilho $T$ está restrito à distância $d = 80cm$ indicada. Portanto, fins de curso $Fc1$ e $Fc2$ estão posicionados estrategicamente para desligar o sistema, caso o carrinho alcance o deslocamento máximo permitido.

Um esquemático mais completo da planta, o sistema de adquisição e monitoramento de dados, assim como, um controlador digital é apresentado na Figura 5. As medidas de posição angular e linear da planta são obtidas respectivamente por um sensor de ângulo, posicionado dentro do carrinho e um sensor de deslocamento, localizado na parte traseira do motor de corrente contínua, ambos os sensores são encoders ópticos de referência *HCTL2016*. As medidas dos encoders são recebidas pelo controlador digital e enviadas para o computador através de uma placa de aquisição, previamente instalada. No computador estão os algoritmos de controle desenvolvidos no ambiente *Simulink* em MATLAB. Estes algoritmos fornecem como saída o sinal de controle que é enviado para o controlador digital, o qual se encarrega de enviar o sinal de controle para o motor Corrente

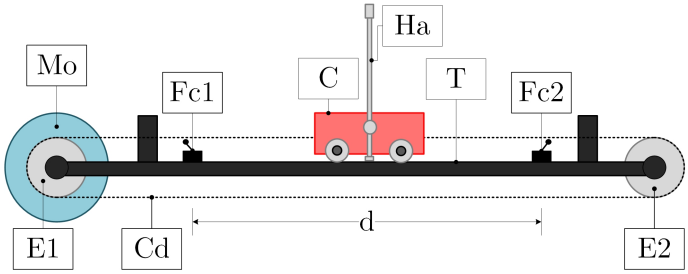



Figura 4 – Esquemático do sistema pêndulo invertido. Elementos que compõem a planta física: Carrinho $C$, haste $H_a$, motor de corrente continua $Mo$, trilho $T$, engrenagens $E1$ e $E2$, correia dentada $Cd$, Fins de curso $Fc1$ e $Fc2$, distância máxima permitida $d$.

Contínua (CC). Dessa forma, é possível o controle do pêndulo invertido em tempo real.

O computador utilizado possui um processador *Intel* ® *Core(TM)2*, 2.53 $GHz$ e 6Gb de memória RAM. A placa de aquisição de dados é *Advantech* ® *PCI-1711*. O sinal de controle recebido pelo controlador digital possui valores entre $-2,5\ V$ e $2,5\ V$.

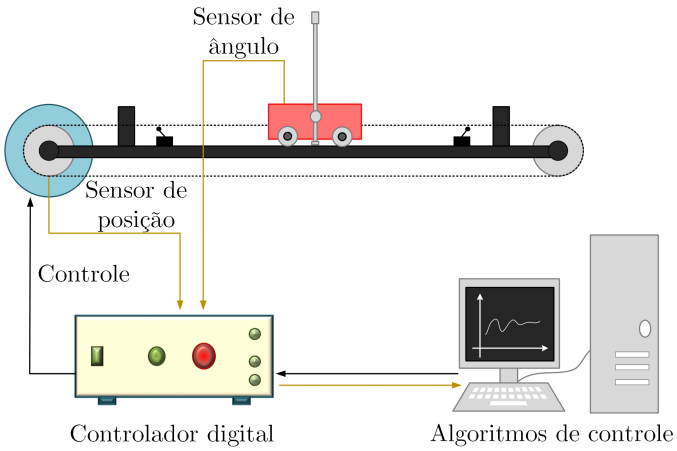
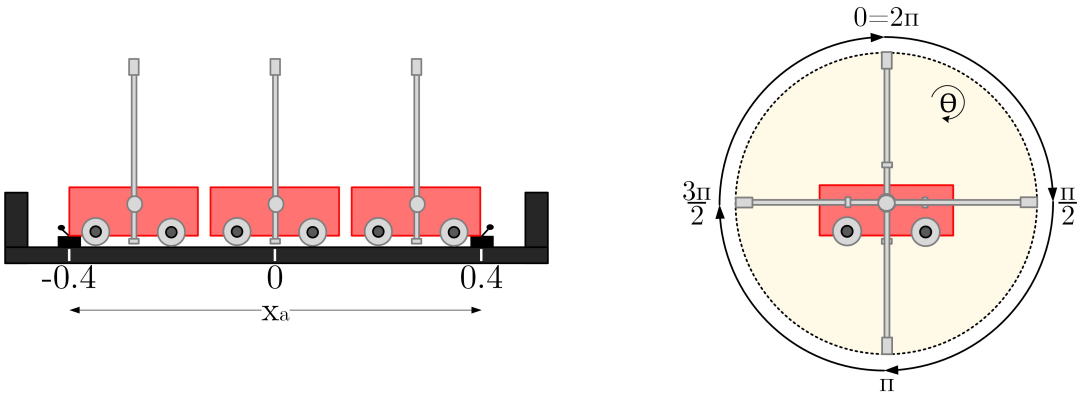



Figura 5 – Configuração de trabalho do sistema pêndulo invertido. As setas amarelas representam as medidas dos sensores. A seta negra corresponde ao sinal de controle.

A configuração dos sensores do sistema é mostrada na Figura 6. Dessa maneira, para o sensor de posição linear (Figura 6(a)), devido à restrição física de deslocamento, a metade do trilho é definida como o ponto de partida. Desta forma, quando o carrinho se movimente para a direita, a medida de deslocamento aumentará positivamente desde 0 até $0,4$ metros, sendo o fim de curso a distância máxima permitida, de outro lado quando o carrinho se movimente para a esquerda o deslocamento decrescerá de 0 até $-0,4$ metros como mostrado na Figura 6(a). No sensor de posição angular (Figura 6(b)) foi definido

o ponto de equilíbrio instável (posição superior) como 0 radianos, a medida aumenta conforme o sentido horário como pode ser observado na Figura 6(b).




(a) Acondicionamento sensor de deslocamento. (b) Acondicionamento sensor de ângulo.

Figura 6 – Configuração de sistema de medida do pêndulo invertido. As unidades são dadas em: metros ($m$) para a posição linear $x_a$ e radianos ($rad$) para a posição angular $\theta$.

## 4.2 Metodologia do projeto dos controladores

Posteriormente ao levantamento de parâmetros e restrições do sistema pêndulo invertido, duas estratégias de controle robustas foram projetadas. Inicialmente, foi considerado o RLQR, assumindo o modelo nominal do pêndulo invertido (13), onde todos os estados são acessíveis $(x_{1_a}, x_{2_a}, x_{3_a}, x_{int})$. Para fins de comparação e análise de desempenho do RLQR, foi projetado o LQR. Em seguida, foi considerada a combinação do RLQR com o RKF, assumindo o modelo nominal (15), onde os estados inacessíveis são estimados pelo RKF, enquanto, a ação de controle é gerada a partir dos estados estimados e dos ganhos de realimentação do RLQR. A seguir, é apresentada a metodologia utilizada para projetar as abordagens mencionadas.

### 4.2.1 Projeto do regulador linear quadrático robusto

Como foi visto na Seção 3.1, a formulação do RLQR tem a forma de (17) e (18), que serão repetidas aqui:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (F_k + \delta F_k)x_k + (B_k + \delta B_k)u_k; \\ [\delta F_k \ \delta B_k] &= H_k \Delta_k \left[E_{F_k} \ E_{B_k}\right] \qquad k = 0, \cdots, N, \end{aligned}$$

assim $F_k$ e $B_k$ são respectivamente as matrizes de estado e de entrada do modelo nominal em espaço de estados do pêndulo invertido $\mathcal{X}_a(x,t)$ descrito em (13). Após a discretização

utilizando o comando de MATLAB $c2d$, com um tempo de amostragem $T_s = 100\ \mu s$, $F_k$ e $B_k$ são obtidas conforme (34):

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & -4,9\times10^{-6} & 2,5\times10^{-3} & 0 \\ -1,2\times10^{-6} & 1 & 1,6\times10^{-4} & 0 \\ 9,9\times10^{-5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9,9\times10^{-5} & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 7,82\times10^{-4} \\ 3,53\times10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

$H_k$, $E_{F_k}$ e $E_{B_k}$ foram escolhidas heuristicamente a partir de uma série de ensaios práticos. Inicialmente com o sistema na posição de equilíbrio instável foram determinadas algumas relações de massa, inercia e comprimento, as quais mudam conforme é acrescentada carga nos experimentos. Os valores selecionados representam o limite máximo permitido de incertezas no pêndulo invertido:

$$H_k = \begin{bmatrix} 0,209 \\ 0,104 \\ 0,018 \\ 0,009 \end{bmatrix}, E_{F_k} = \begin{bmatrix} -0,1217 & -0,031 & -0,17 & 0,0087 \end{bmatrix}, E_{B_k} = \begin{bmatrix} 0,0029 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Finalmente, são definidas as matrizes $R_{c,k} = 1$, $Q_{c,k} = I_4$ e $P_{c,N+1} = 1\times10^{30}\times I_4$. As constantes $\alpha_c = 3$ e o parâmetro de penalidade $\mu_c = 1\times10^{23}$ são escolhidos estrategicamente para calcular $\lambda_k = (1+\alpha_c) \parallel \mu_c H_k^T H_k \parallel$, desta forma é possível satisfazer (21) e garantir (22).

### Projeto de regulador linear quadrático

Para projetar o LQR, similarmente ao caso anterior, se considera o modelo nominal do pêndulo invertido $\mathcal{X}_a(x,t)$. De fato, as matrizes de estado $F_k$ e entrada $B_k$, são as mesmas que para o RLQR. Esta abordagem, prescinde de incertezas, por isso $\delta F_k = 0$ e $\delta B_k = 0$. Assim, se precisa somente definir as matrizes de ponderação $P \succ 0$, $Q \succ 0$ e $R \succ 0$, as quais determinam o desempenho do LQR. Para a definição dessas matrizes, foi utilizada a abordagem proposta em Bryson e Ho (1975). Nesta referência foi proposto um sistema de equações que permite a seleção das matrizes de ponderação $P$, $Q$ e $R$, desde que sejam conhecidos os estados, os valores finais máximos dos estados e as entradas do sistema. O conjunto de aproximações são conhecidas como *Regras de Bryson*, apresentadas a seguir:

- $1/Q_{jj}$ = máximo valor aceito de $[X_j(t_f)]^2(t_f - t_o)$
- $1/R_{jj}$ = máximo valor aceito de $[u_i(t_f)]^2(t_f - t_o)$

A variável $t_f$ representa o tempo máximo permitido para atingir o estado final desejado. O tempo inicial é dado por $t_0$. Devido à relação existente entre as variáveis de

estado, $Q_{11} = Q_{33}$, $Q_{22} = Q_{44}$, os índices de desempenho que dependem da posição angular foram definidos de modo que $X_1(t_{f_1}) = 0.01rad$ e $t_{f_1} - t_o = 0,1s$. Em seguida, os índices de desempenho que dependem da posição linear são os valores máximos de $X_2(t_{f_2}) = 0,01m$ e $t_{f_2} - t_o = 10s$ são definidos. O máximo valor aceito de $u(t_f) = 0,25V$ e $t_f - t_o = 0,1s$. Com esses valores prévios, obtém-se que $R = 160$ e as matrizes $Q$ e $P_{N+1}$ são as seguintes:

$$Q = 1 \times 10^5 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}, P_{N+1} = 1 \times 10^8 \times Q. \tag{36}$$

Um resumo da metodologia utilizando os reguladores RLQR e LQR, aplicados no pêndulo invertido, pode ser visto no diagrama de blocos da Figura 7. Basicamente, o pêndulo invertido proporciona as informações da posição angular $\theta$ e linear $x_a$, as quais são integradas para obter o modelo em espaço de estados $\chi_a$ conforme (13). A comparação do sinal de referência com $x_a$ permite manipular o deslocamento do carrinho ao longo do trilho, desta maneira o vetor de estados $x$ é conformado. A resposta dos controladores LQR e o RLQR é dada como $u = Kx$, sendo $K$ o vetor de ganhos de retroalimentação, o qual fornece um ganho por cada estado do sistema. São levados em consideração os ruídos nos sensores e o distúrbio no sinal de controle.

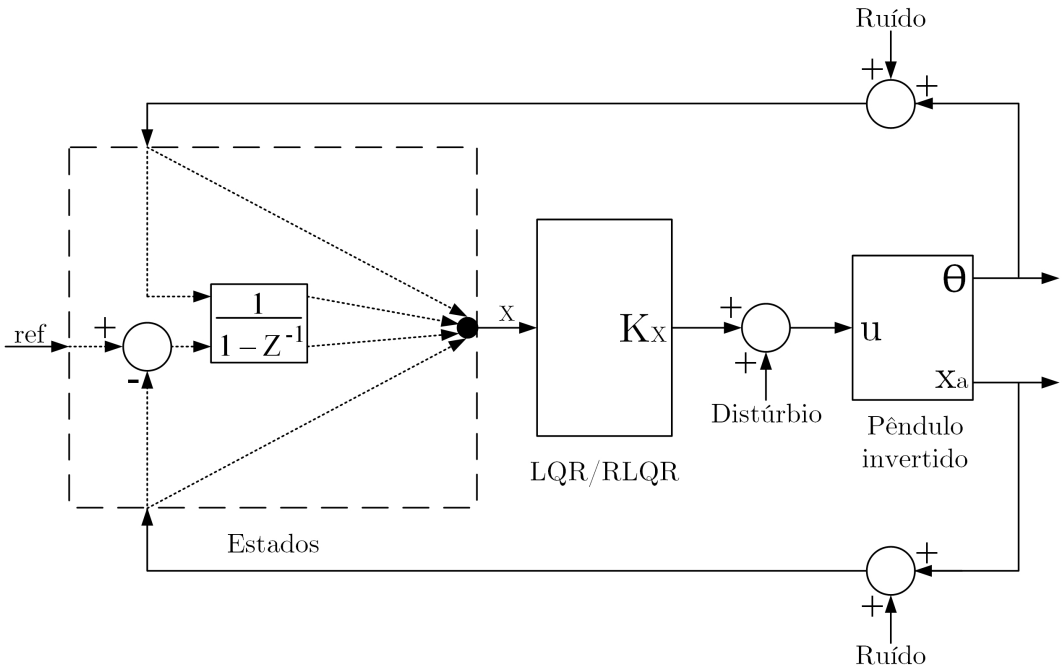



Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema com os reguladores RLQR e LQR.

### 4.2.2 Projeto do regulador linear quadrático robusto com o filtro de Kalman robusto

A abordagem, utiliza a combinação do RLQR e o RKF em uma única formulação. Para tal fim, foi considerado o modelo nominal do pêndulo invertido em espaço de estados $\mathcal{X}_b(x,t)$ descrito em (15), com a inclusão da ação integral da posição linear $x_{int}$. A utilização de $\mathcal{X}_b(x,t)$ implica apenas o acesso aos estados $(x_{1_b}, x_{2_b}, x_{int})$. Portanto, uma forma para desenvolver a estratégia de controle, consiste em estimar os estados $(\hat{x}_{1_b}, \hat{x}_{2_b}, \hat{x}_{3_b}, \hat{x}_{4_b})$ utilizando o RKF, enquanto se projeta o RLQR. Desse modo, a lei de controle é baseada na combinação linear de estados estimados $u = K\hat{x}_b + K_{int}x_{int} = K(\hat{x}_b, x_{int})$. Integrar o estimador no laço de controle é particularmente interessante, pois permite a inclusão de graus de liberdade na estratégia de controle. Além de permitir a inclusão do ruído nas medidas de saída e distúrbios no processo.

O procedimento para projetar o RLQR é similar ao utilizado na Subseção 4.2. As matrizes $F_k$ e $B_k$ apresentadas em (37), foram calculadas por meio da utilização do comando de MATLAB $c2d$, desta vez com um tempo de amostragem de $Ts = 400\mu s$:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3,9\times10^{-4} & -3,6\times10^{-9} & 0 \\ 5,8\times10^{-8} & 1 & 0 & 3,9\times10^{-4} & 0 \\ 9,3\times10^{-3} & 0 & 1 & -1,8\times10^{-5} & 0 \\ 2,9\times10^{-4} & 0 & -2,1\times10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & -4\times10^{-4} & 0 & -7,9\times10^{-8} & 1 \end{bmatrix},$$
$$B_k = \begin{bmatrix} 5,78\times10^{-7} \\ 2,61\times10^{-7} \\ 2,89\times10^{-3} \\ 1,3\times10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

$H_k$, $E_{F_k}$ e $E_{B_k}$ foram escolhidas heuristicamente conforme a Seção anterior:

$$H_k = \begin{bmatrix} 0,209 \\ 0,104 \\ 0,018 \\ 0,018 \\ 0,009 \end{bmatrix}, E_{F_k} = 1\times10^{-5}\begin{bmatrix} -6,55 & -1,008 & -0,242 & -0,097 & 0,858 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

$$E_{B_k} = \begin{bmatrix} 8,86\times10^{-7} \end{bmatrix}.$$

As matrizes de ponderação foram escolhidas como, $R_{c,k} = 1$, $Q_{c,k} = I_5$ e $P_{c,N+1} = 1\times10^{30}\times I_5$. As constantes $\alpha_c = 2$ e o parâmetro de penalidade $\mu_c = 1\times10^{16}$ foram

escolhidos para satisfazer (21) e garantir (22). Perceba que as matrizes em (37) e (38) são definidas em termos de linhas e colunas como $F_k(n,n)$, $B_k(n,m_1)$, $E_{F_k}(l,n)$ e $E_{B_k}(l,m_1)$, a fim de projetar o *RKF* na forma preditora, as matrizes de parâmetros nominais $\bar{F}_k$, $\bar{B}_k$, $G_k$, $C_k$, $D_k$ são escolhidas e as matrizes auxiliares que definem os limites de incertezas $E_{\bar{F}_k}$, $E_{\bar{B}_k}$, $E_{G_k}$, $E_{C_k}$, $E_{D_k}$, $M_k$ e $N_k$ são apresentadas em (39). Além disso, as variâncias $Q_k = 1000 \times I_1$, $R_k = I_2$, $\Pi_0 = 1 \cdot 10^{30} \times I_4$ , a constante $\alpha = 5$ e o parâmetro de penalidade $\mu = 1 \cdot 10^5$, estão definidos de acordo com (29),

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_k = F_k(1:4,1:4), \quad \bar{B}_k = B_k(1:4,1), \quad G_k = \bar{B}_k, \\
&C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_k = I_2, \\
&E_{\bar{F}_k} = E_{F_k}(1:4), \quad E_{\bar{B}_k} = E_{B_k}, \quad E_{G_k} = E_{B_k}, \\
&E_{C_k} = 1 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
&E_{D_k} = 1 \times 10^{-8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_k = H_k(1:4,1).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

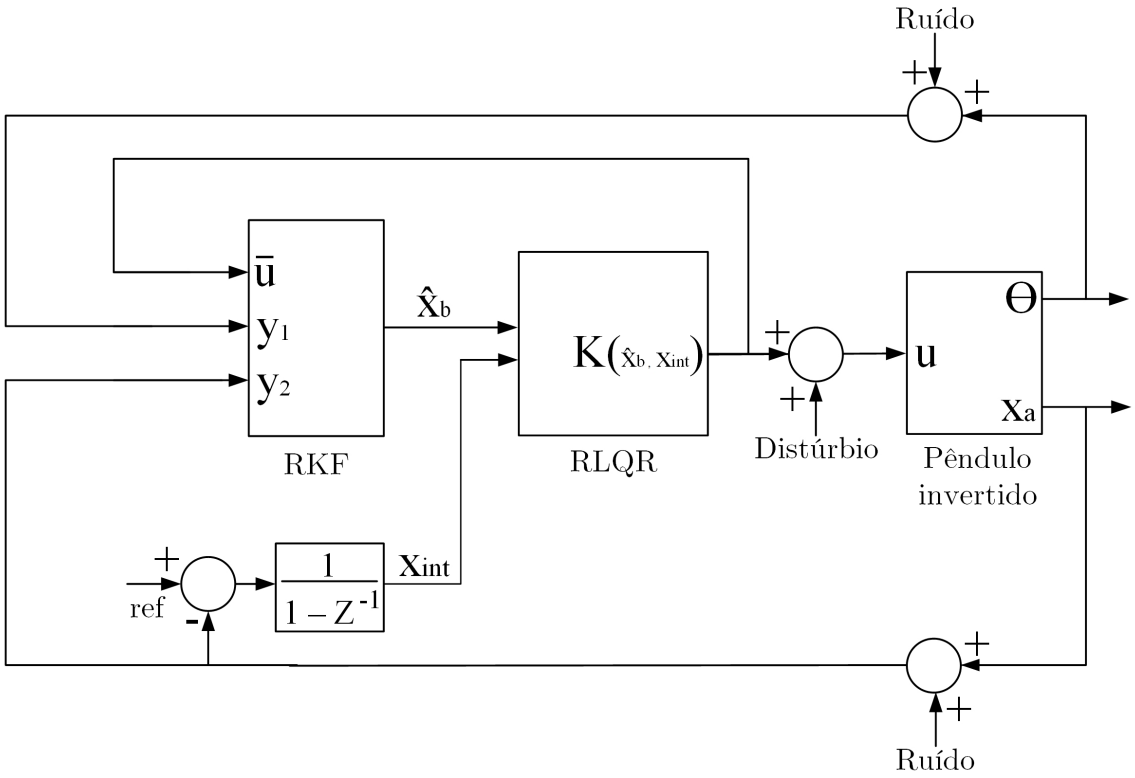



Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema com RLQR + RKF.

Visando detalhar a metodologia de projeto proposta para o RLQR + RKF, apresenta-se o diagrama de blocos da Figura 8. Neste caso, o sinal de controle do RLQR é dada por $u = K(\hat{x}_b, x_{int})$, onde $\hat{x}_b$ são os estados estimados pelo RKF, $x_{int}$ representa a inclusão da ação integral da posição linear conforme o modelo $\mathcal{X}_b(x,t)$ descrito em (15). São levados em consideração os ruídos nos sensores e o distúrbio no sinal de controle.

Capítulo 5

# Resultados experimentais

Utilizando a metodologia de projeto proposta no Capítulo 4 ao sistema de pêndulo invertido, descrito no Capítulo 2, usando como base a aplicação dos conceitos apresentados no Capítulo 3, este capítulo dedica-se à exposição, análise e discussão dos resultados experimentais obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho. Assim, o trabalho está organizado da seguinte forma, na Seção 5.1, faz-se necessário detalhar algumas considerações feitas para a aplicação dos ensaios. A Seção 5.2 dedica-se à análise da estabilidade do sistema com incertezas. A Seção 5.3 concentra-se ao estudo do desempenho do sistema com incertezas quando considerados distúrbios e ruídos no sistema de medida. Finalmente, a Seção 5.4 esforça-se na verificação da estabilidade e desempenho robusto do sistema com incerteza, distúrbio e ruído, focalizando nos três principais problemas do pêndulo invertido encontrados na literatura: levantamento e captura, estabilização e seguimento de trajetória.

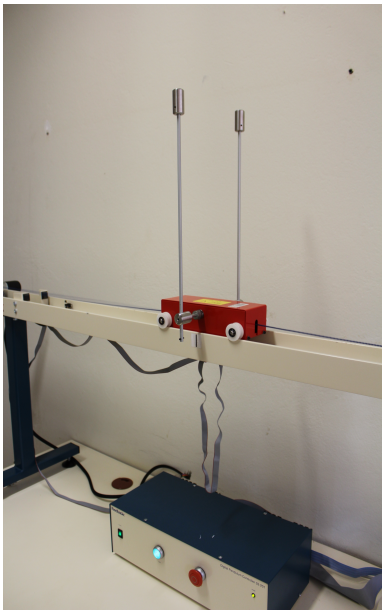
## 5.1 Preparação dos experimentos

Antes de iniciar com os ensaios propostos, faz-se necessário explanar a forma como as incertezas foram incluídas na dinâmica do pêndulo invertido, isto com a finalidade de avaliar as estratégias de controle. Assim, para avaliar o desempenho dos controladores, desde o caso nominal até o pior caso de incerteza (*ensaio 5*), uma combinação de massas foram adicionadas no carrinho e na haste, conforme Tabela 5.

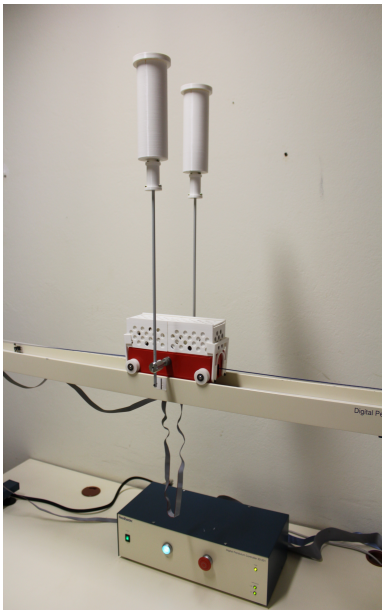
A inclusão das massas (Tabela 5) repercute na incerteza do comprimento da haste, devido a que esta aumenta conforme se adiciona carga na haste, afetando diretamente a inércia do sistema que é dada pela expressão $I_n = ml^2/12$. Para maior claridade sob a inclusão de incerteza no pêndulo invertido, apresenta-se a Figura 9, onde pode ser observada a planta real na sua forma nominal na Figura 9(a). Da mesma forma, a planta incerta é apresentada na Figura 9(b), sendo este o pior caso de incerteza adotado nos experimentos (*ensaio 5*). O conjunto de cargas utilizadas ao longo dos experimentos são apresentados na Figura 9(c).

Tabela 5 – Cargas adicionadas ao carrinho e na haste do pêndulo invertido.

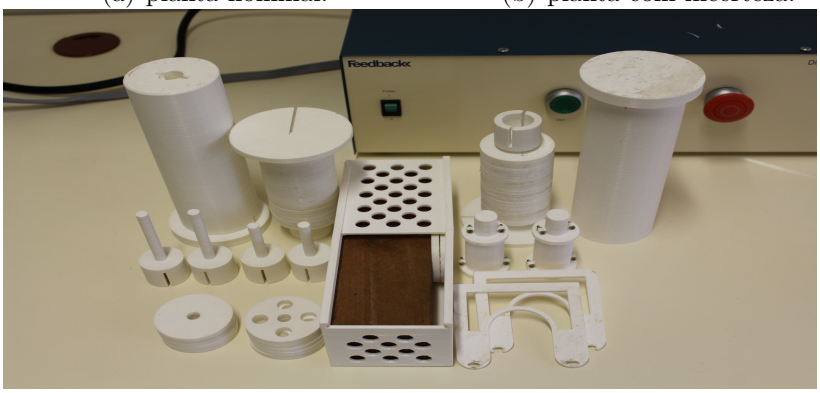
| **Número de ensaio** | **Carga no carrinho (kg)** | **Carga na haste (kg)** |
|---|---|---|
| *nominal* | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $0,25$ |
| 3 | $0,19$ | $0,25$ |
| 4 | $0,62$ | 0 |
| 5 | $0,62$ | $0,38$ |



(a) planta nominal.



(b) planta com incerteza.




(c) Cargas assumidas como incertezas.

Figura 9 – Pêndulo invertido e carga.

## 5.2 Sobre a estabilidade

Estabilidade é a principal propriedade de um sistema de controle. Neste ensaio, dois conceitos de estabilidade serão verificados: primeiramente a Estabilidade Nominal (EN), a qual é atingida quando é possível garantir a estabilidade de um sistema em malha fechada somente para o caso de planta nominal, ou seja, não é possível garantir a estabilidade

para uma planta com incertezas. O segundo conceito é a Estabilidade Robusta (ER), a qual direciona o problema de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada para plantas incertas, incluindo a planta nominal, em outras palavras, considera-se garantida a estabilidade desde a planta nominal até a planta com o pior caso de incertezas considerado (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007).

### 5.2.1 Descrição do experimento

O experimento consiste na comparação de três estratégias de controle: o LQR, o RLQR e o RLQR + RKF, aplicadas ao pêndulo invertido com e sem incertezas. Para isso, quinze ensaios foram realizados, cinco para cada controlador, de acordo com as cargas descritas na Tabela 5. Planejando deslocar o pêndulo invertido ao longo do trilho, uma vez este esteja na posição de equilíbrio $\theta = 0$, um sinal quadrado de referência com magnitude $(-0,35 \leq \text{ref} \leq 0,35)$ $m$ é inserido. Desta forma, além de avaliar a estabilidade do sistema ante a presença de incertezas em comprimento, massa e inercia, é experimentada a estabilidade do sistema durante o seguimento de um sinal referência para a planta com incertezas.

De acordo com a metodologia proposta na Seção 4.2, os ganhos de realimentação para cada estratégia de controle são organizados na Tabela 6.

Tabela 6 – Ganhos de realimentação das estrategias de controle.

| **Estratégia de controle** | $\mathbf{K_1}$ | $\mathbf{K_2}$ | $\mathbf{K_3}$ | $\mathbf{K_4}$ | $\mathbf{K_{int}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *LQR* | $27,85$ | $6,13$ | $65,46$ | | $-2,47$ |
| *RLQR para* $X_a(x,t)$ | $42,61$ | $10,84$ | $59,54$ | | $-3,05$ |
| *RLQR para* $X_b(x,t)$ | $102,21$ | $23,48$ | $14,79$ | $24,64$ | $-8,86$ |

Foi adotada uma cor diferente para cada combinação de incerteza nos experimentos, conforme descrito a seguir: para o caso nominal (cor *azul*), no ensaio 2 (cor *verde*), para o ensaio 3 (cor *vermelho*), no ensaio 4 (cor *laranja*) e finalmente para o ensaio 5 (cor *rosa*). As respostas dos controladores apresentam-se na Figura 10 quando utilizando o LQR, enquanto a Figura 11 refere-se ao ensaio quando aplicando o RLQR e o RLQR + RKF.

### 5.2.2 Análise do resultado

Para o ensaio realizado utilizando o controlador LQR, o pêndulo invertido obtém somente estabilidade total para o caso nominal, ou seja, é garantida EN. Perceba que a medida que aumenta a combinação de massas utilizadas como incertezas nos ensaios, o sistema torna-se instável mais rapidamente (denotado como linha tracejada na Figura 10 com legenda *interrupção do experimento*). Por exemplo, para o ensaio 2 a instabilidade apresenta-se no tempo $t = 85$ $s$, no ensaio 3 em $t = 55$ $s$, no ensaio 4 em $t = 25$ $s$ e no

ensaio 5 em $t = 20\ s$. A principal causa da instabilidade no sistema é devido às cargas adicionadas. Estas geram um erro de estado estacionário, o qual se faz evidente quando o sistema inicia o deslocamento causado pelo sinal de referência, sendo não garantida a faixa de espaço de trabalho do sistema $(-0,4 \leq d \leq 0,4)\ m$.

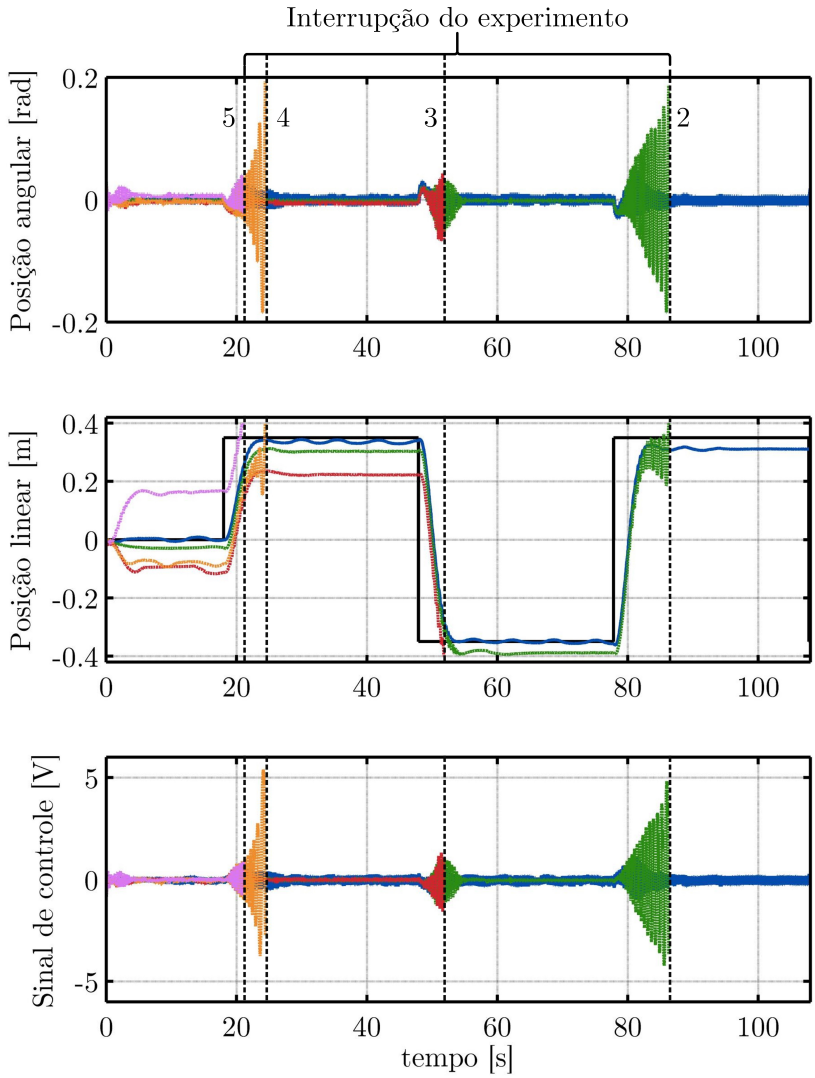



Figura 10 – Resposta do pêndulo invertido utilizando o LQR – As linhas coloridas indicam as cargas adicionadas e o sinal quadrado de referência. Caso nominal (*azul*), ensaio 2 (*verde*), ensaio 3 (*vermelho*), ensaio 4 (*laranja*), ensaio 5 (*rosa*) e sinal quadrado de referência (*preto*).

Diferentemente, quando utilizando as estratégias de controle RLQR e o RLQR + RKF, a estabilidade do sistema é garantida para todos os casos de incerteza, incluindo o caso nominal, em outras palavras, é garantida ER. O *RLQR* (Figura 11a ) possui a característica de fornecer uma resposta ótima, no entanto, o desempenho do sistema é evidentemente afetado, a principal causa são os erros da modelagem, produto das desconsiderações. De fato, note que o pêndulo invertido responde de melhor forma para todos os casos incertos do que para a planta na sua forma nominal. Por outro lado, quando utilizando o RLQR

+ RKF (Figura 11b ) é possível atingir uma resposta ótima e robusta. Nota-se que o desempenho é melhor do que para o caso quando utilizado o RLQR. Particularmente, isto pode ser causado pela inclusão do filtro na estratégia de controle, o qual permite eliminar sinais em alta frequência, que podem ser atribuídas ao ruído nos sensores, assim como, erros no modelo ou incertezas desconsideradas. Os índices de desempenho do RLQR e do RLQR + RKF podem ser vistos na Tabela 7. Os dados consignados nesta, representam a média do total de dados para cada ensaio por controlador. Ou seja, é calculada a média dos resultados de cada controlador para cada combinação de massas, conforme Tabela 5. Desta forma, foram calculados o erro médio quadrático ($\overline{RMS}$) e a sua variância $\overline{\sigma^2}$ para a posição angular, posição linear e sinal de controle, denotados como $e_\theta$, $e_{x_a}$ e $u$, respectivamente. É corroborado numericamente o melhor desempenho do RLQR + RKF.

(a) RLQR. (b) RLQR+RKF.

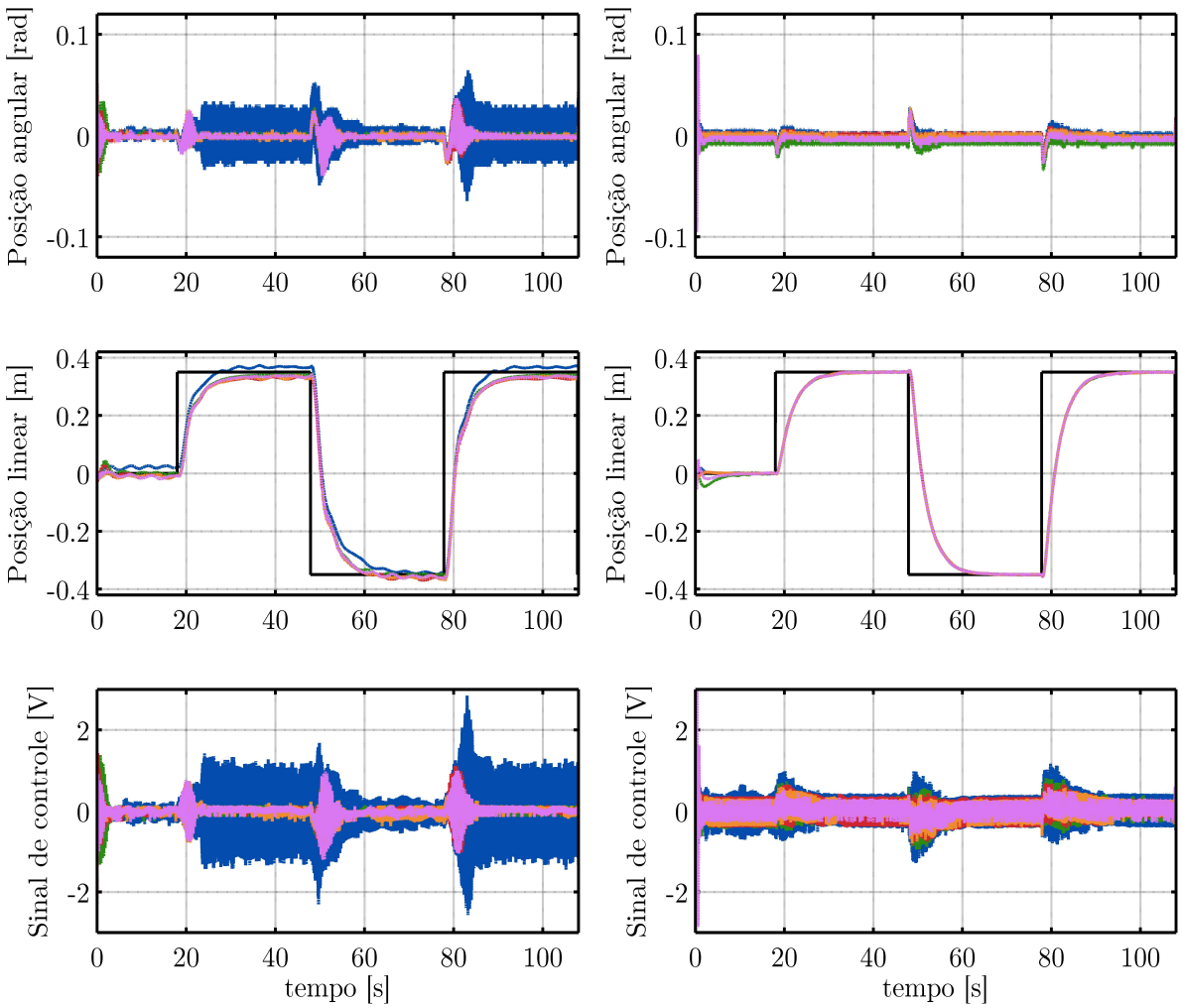



Figura 11 – Resposta do pêndulo invertido. (a) RLQR. (b) RLQR + RKF. – As linhas coloridas indicam as cargas adicionadas e o sinal quadrado de referência. Caso nominal (*azul*), ensaio 2 (*verde*), ensaio 3 (*vermelho*), ensaio 4 (*laranja*), ensaio 5 (*rosa*) e sinal quadrado de referência (*preto*).

Tabela 7 – Índices de desempenho no ensaio de seguimento.

| Controlador | | $\overline{RMS}$ | $\overline{\sigma^2}$ |
|---|---|---|---|
| **RLQR** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0077\ [rad]$ | $1,87 \times 10^{-5}\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e}_{\mathbf{x_a}}$ | $0,1501\ [m]$ | $2,41 \times 10^{-7}\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $0,2774\ [V]$ | $0,0413\ [V^2]$ |
| **RLQR + RKF** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0028\ [rad]$ | $1,01 \times 10^{-6}\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e}_{\mathbf{x_a}}$ | $0,0780\ [m]$ | $3,14 \times 10^{-9}\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $0,1424\ [V]$ | $0,0007\ [V^2]$ |

## 5.3 Sobre o desempenho ante o distúrbio e ruído

Em teoria de controle, o desempenho é uma propriedade diretamente relacionada com a estabilidade do sistema. Frequentemente, no projeto de controlador robusto, deseja-se garantir ER com certo nível de desempenho para o conjunto de plantas incertas, incluindo a planta nominal. Essa propriedade é conhecida na literatura como Desempenho Robusto (DR) (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007). Do mesmo modo, quando o sistema somente satisfaz especificações de desempenho para uma planta sem incertezas, considera-se que o sistema atinge somente um Desempenho Nominal (DN).

No experimento anterior, um claro exemplo de EN e DN é apresentado. Na Figura 10, o LQR atinge somente desempenho aceitável para o caso nominal. Em contrapartida, na Figura 11, as estratégias de controle robustas RLQR e RLQR + RKF evidenciam um desempenho robusto para todos os ensaios projetados. No entanto, na prática, o sistema pode ser afetado por sinais externos de distúrbios e/ou ruído nos sensores, que podem deteriorar o desempenho do sistema, comprometendo diretamente a estabilidade do mesmo. O principal objetivo desta seção é analisar ER e DR quando o sistema esteja exposto ante sinais de distúrbio e ruído.

### 5.3.1 Estabilidade e desempenho robustos ante o distúrbio

#### 5.3.1.1 Descrição do experimento

O experimento consiste na comparação das estratégias de controle robustas RLQR e RLQR + RKF, aplicadas ao pêndulo invertido com incertezas e ante a presença de um sinal de distúrbio. Neste caso dez ensaios foram realizados, cinco para cada estratégia de controle, de acordo com a combinação de incertezas relacionadas na Tabela 5, foram utilizadas as mesmas, conforme a Seção 5.2.

O distúrbio, denotado como $w_k$ é definido como um sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_{w_1} = 1,5V$, $\mu_{w_2} = -3V$ e variância $\sigma^2_{w_1} = 0,2V^2$, $\sigma^2_{w_2} = 0,2V^2$ como segue: $w_k = w_1(k - 18/T_s) + w_2(k - 48/T_s)$, sendo $w_k \sim N(\mu_{w_1} + \mu_{w_2}, \sigma^2_{w_1} + \sigma^2_{w_2})$ e $k \geq 0$. A cor adotada para o distúrbio é (*preto*), o experimento inicia com a haste na posição de equilíbrio superior instável ($\theta = 0$), e o carrinho na posição de partida ($x_a = 0$), seguidamente no tempo $t = 18s$, o sistema é afetado pelo sinal de distúrbio, sendo aplicado $w_1(k - 18/T_s)$ , do mesmo modo no tempo $t = 48s$ o sinal de distúrbio obedece ao $w_2(k - 48/T_s)$. O ensaio tem duração de 70 segundos.

#### 5.3.1.2 Análise do resultado

O resultado do ensaio quando utilizado o RLQR é apresentado na Figura 12a. Nota-se que a estratégia de controle atenua o efeito do sinal de distúrbio tanto para a posição angular como posição linear nos quatro primeiros ensaios, no ensaio 5 (*cor rosa*), o RLQR não consegue manter o sistema dentro da faixa de trabalho estabelecida $(-0,4 \leq x_a \leq 0,4)m$ em posição linear e $(-0,25 \leq \theta \leq 0,25)rad$ em posição angular. Isto se deve ao fato de que na otimização do RLQR, o distúrbio não é considerado. O regulador lida com este, desde que seja considerado como modelo perturbado $x_{k+1} = (F_k + \delta F_k)x_k + (B_k + \delta B_k)u_k$.

A resposta do sistema quando utilizado o RLQR + RKF é apresentada na Figura 12b, perceba-se que há garantia de ER e DR de forma ótima, sendo praticamente a mesma resposta para todos os ensaios projetados. RKF melhora o desempenho do sistema, filtrando e minimizando o distúrbio de maneira ótima. Desta forma, é possível dividir a estratégia de controle projetada em duas partes: o RLQR garante ER, enquanto o RKF permite garantir DR.

A análise quantitativa do experimento pode ser vista na Tabela 8. Os resultados registrados representam a média do total de ensaios realizados. Desta forma, foram calculados o erro médio quadrático ($\overline{RMS}$), sua variância $\overline{\sigma^2}$, o valor absoluto pico máximo da resposta causado pelo distúrbio $|Ov|$ e a variância do mesmo $\overline{\sigma^2(Ov)}$. As variáveis assumidas dentro do estudo são o erro da posição angular, o erro da posição linear e o sinal de controle, denotadas como $e_\theta$, $e_{x_a}$ e $u$, respectivamente. Nessa ordem, o RLQR + RKF possui dez, quinze e três vezes menos ($\overline{RMS}$) em comparação ao RLQR, também o $|Ov|$ apresentado pelo RLQR + RKF é a metade do mostrado pelo RLQR.

(a) RLQR. (b) RLQR+RKF.

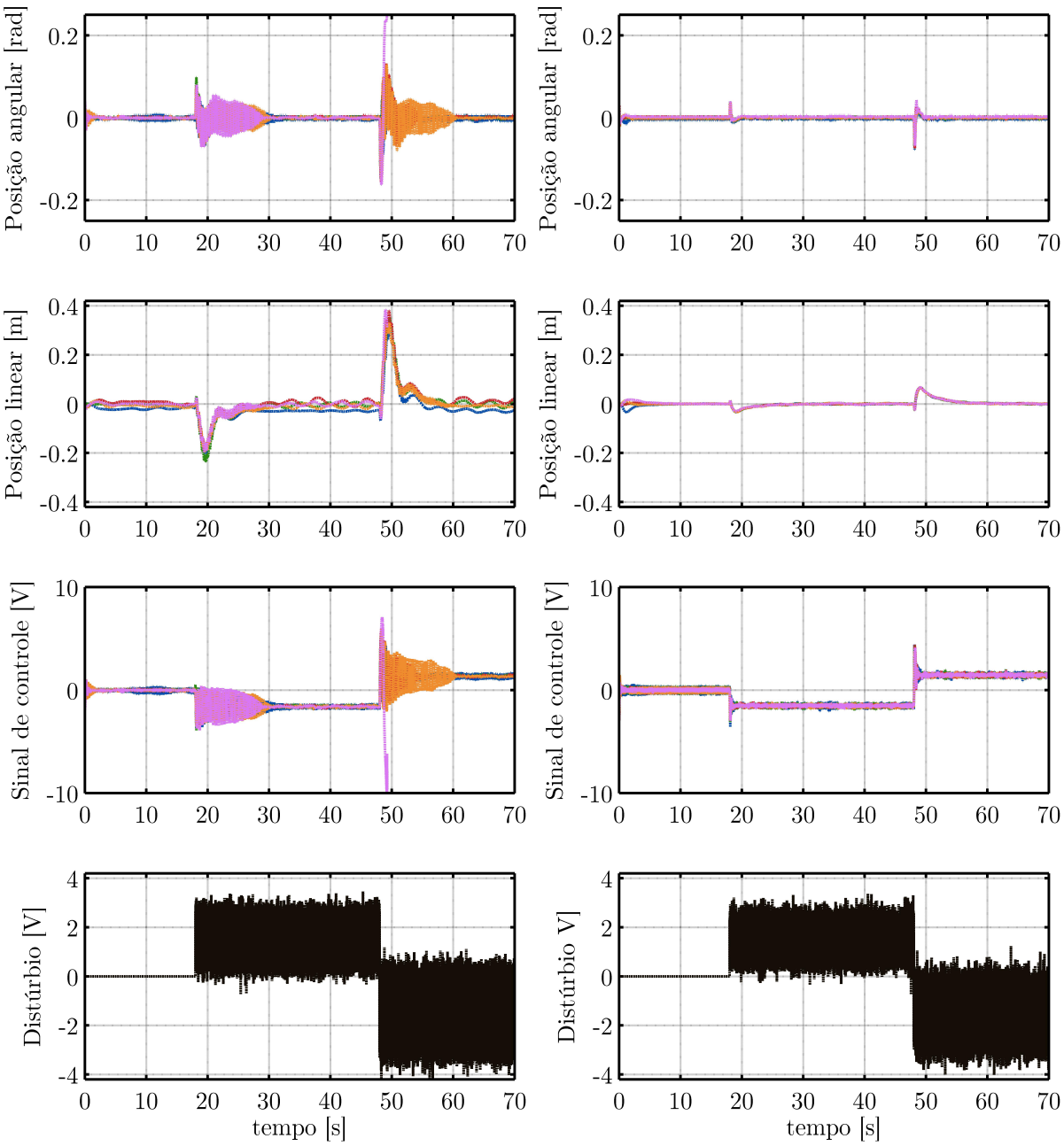



Figura 12 – Resposta do pêndulo invertido ante o distúrbio. (a) RLQR. (b) RLQR+RKF. – As linhas coloridas indicam as cargas adicionadas e o sinal de distúrbio. Caso nominal (*azul*), ensaio 2 (*verde*), ensaio 3 (*vermelho*), ensaio 4 (*laranja*), ensaio 5 (*rosa*) e sinal de distúrbio (*preto*).

Tabela 8 – Índices de desempenho no ensaio de distúrbio.

| Controlador | | $\overline{RMS}$ | $\overline{\sigma^2}$ | $\lvert Ov \rvert$ | $\overline{\sigma^2(Ov)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **RLQR** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0208\ [rad]$ | $1,58 \times 10^{-5}\ [rad^2]$ | $0,1917\ [rad]$ | $0,0020\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e}_{\mathbf{x_a}}$ | $0,058\ [m]$ | $2,72 \times 10^{-4}\ [m^2]$ | $0,3941\ [m]$ | $4,66 \times 10^{-5}\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $0,9107\ [V]$ | $0,0202\ [V^2]$ | $8,4260\ [V]$ | $2,3605\ [V^2]$ |
| **RLQR + RKF** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0026\ [rad]$ | $4,71 \times 10^{-8}\ [rad^2]$ | $0,0736\ [rad]$ | $1,25 \times 10^{-5}\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e}_{\mathbf{x_a}}$ | $0,0067\ [m]$ | $9,38 \times 10^{-9}\ [m^2]$ | $0,0663\ [m]$ | $1,66 \times 10^{-6}\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $0,3332\ [V]$ | $1,61 \times 10^{-5}\ [V^2]$ | $4,6089\ [V]$ | $0,0022\ [V^2]$ |

### 5.3.2 Estabilidade e desempenho robustos ante o ruído

#### 5.3.2.1 Descrição do experimento

O ensaio consiste na análise das estratégias de controle robustas RLQR e RLQR + RKF, assumindo o conjunto de incertezas relacionadas na Tabela 5 e ante a influência de sinais do ruído no sistema de medida. Foram realizados dez ensaios, cinco para cada controlador, de acordo com a combinação de incertezas estabelecida e assumindo as mesmas cores por ensaio, conforme ensaios anteriores.

O vetor de ruído, denotado como $v_k = [v_1\ v_2]^T$, é um sinal composto por $v_1$ que representa o ruído na posição angular e $v_2$ que denota o ruído na posição linear. $v_1$ é definido como um sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_{v_1} = 0\ rad$ e variância $\sigma^2_{v_1} = 0,0066\ rad^2$, segundo a expressão: $v_1(k - 28/T_s)$ com $v_1 \sim N(\mu_{v_1}, \sigma^2_{v_1})$ e $k \geq 0$. $v_2$ é definido como um sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_{v_2} = 0\ m$ e variância $\sigma^2_{v_2} = 0,0025\ m^2$, como segue, $v_2(k - 28/T_s)$ com $v_2 \sim N(\mu_{v_2}, \sigma^2_{v_2})$ e $k \geq 0$.

Analogamente aos ensaios anteriores, o experimento inicia com a haste na posição de equilíbrio superior instável ($\theta = 0$) e o carrinho na posição de partida ($x_a = 0$), posteriormente no tempo $t = 28\ s$, o sistema é afetado pelo sinal de ruído $v_k$. O ensaio foi projetado com um tempo total de 70 segundos, no entanto, visando explicar melhor, foi escolhido o intervalo de tempo $25 \leq t \leq 40$ s, pretendendo apresentar melhor a influência do ruído no sistema.

#### 5.3.2.2 Análise do resultado

O resultado do ensaio quando utilizado o RLQR é apresentado na Figura 13a, embora o sistema permaneça estável em todos os casos de incerteza ante a presença de o sinal de ruído $v_k$, o desempenho é degradado, de fato o sinal de controle utiliza a amplitude máxima

possível de 10 $V$ para controlar o sistema. Em contraste, quando utilizado o RLQR + RKF, além de garantir a estabilidade e o desempenho em todos os ensaios propostos, a resposta do sistema é ótima, com uma única resposta, conforme a Figura 13b. O sinal de posição linear é dez vezes menor do que para o RLQR, sendo necessária a metade da tensão utilizada para o controle do sistema.

(a) RLQR. (b) RLQR + RKF.

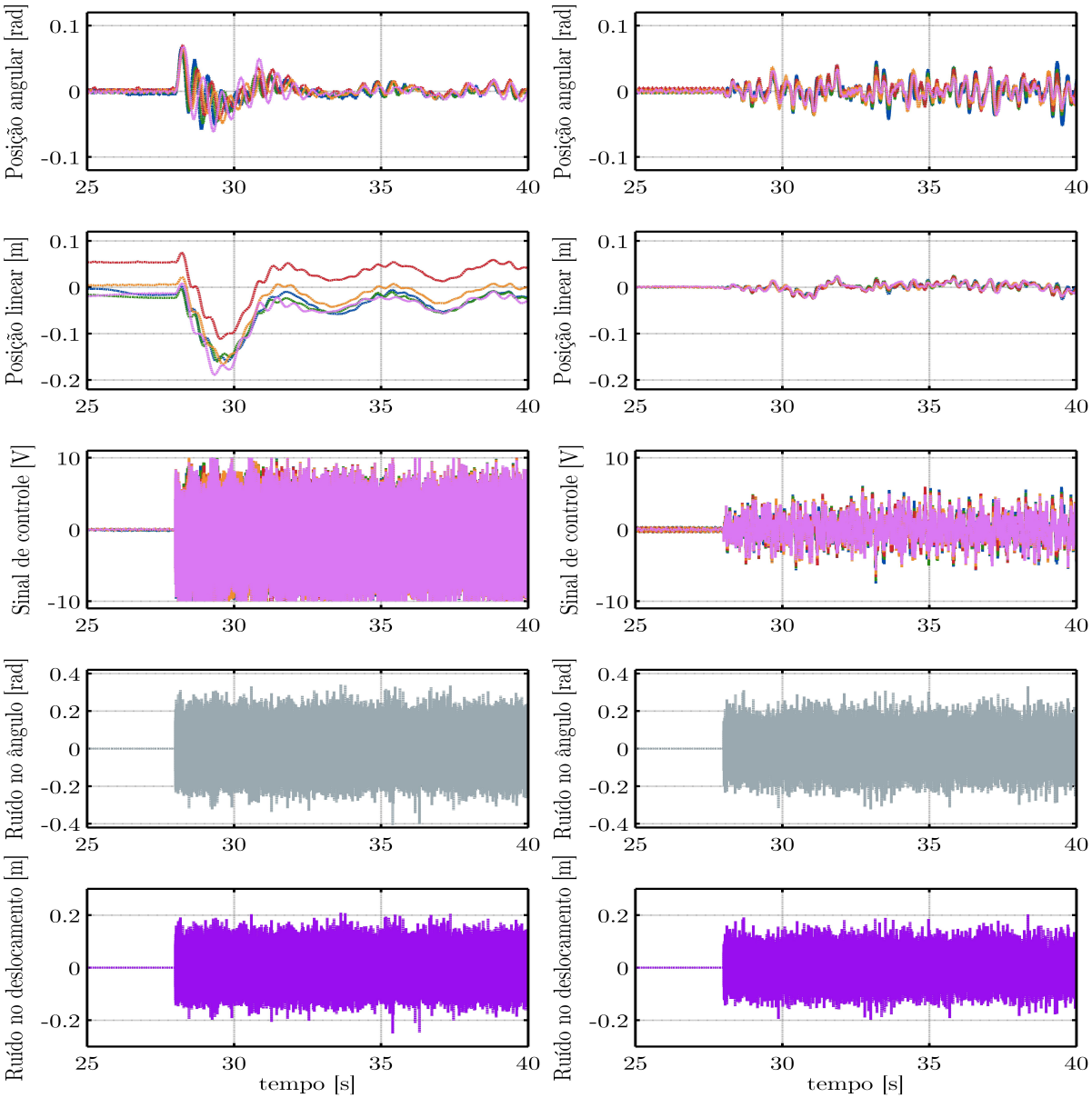



Figura 13 – Resposta do pêndulo invertido ante o ruído no sistema de medida. (a) RLQR (b) RLQR + RKF. – As linhas coloridas indicam as cargas adicionadas e os sinais de ruído. Caso nominal (*azul*), ensaio 2 (*verde*), ensaio 3 (*vermelho*), ensaio 4 (*laranja*), ensaio 5 (*rosa*), sinal de ruído na posição angular (*cinza*) e sinal de ruído na posição linear (*roxo*).

A Tabela 9 apresenta uma análise estatística das estratégias robustas consideradas no ensaio. De forma similar com os experimentos anteriores, os dados apresentados na Tabela 9 representam a média do total de dados por experimento. Desta forma, foram calculados a média do erro médio ($\overline{\text{médio}}$) e sua variância $\overline{\sigma^2}$. As variáveis assumidas dentro do estudo são o erro da posição angular, o erro da posição linear e o sinal de controle, denotados como $e_\theta$, $e_{x_a}$ e $u$, respectivamente. Vale a pena fazer o destaque em $u$, pois é evidente o melhor desempenho mostrado pelo RLQR + RKF diante de sinais de ruído, sendo vinte vezes menor em comparação ao RLQR e três vezes menor respeito à $\overline{\sigma^2}$.

Tabela 9 – Índices de desempenho no ensaio de ruído.

| **Controlador** | | $\overline{\text{médio}}$ | $\overline{\sigma^2}$ |
|---|---|---|---|
| **RLQR** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0004\ [rad]$ | $0,0050\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e_{x_a}}$ | $0,0037\ [m]$ | $0,0023\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $-0,8810\ [V]$ | $6,6787\ [V^2]$ |
| **RLQR + RKF** | $\mathbf{e}_\theta$ | $0,0008\ [rad]$ | $0,0051\ [rad^2]$ |
| | $\mathbf{e_{x_a}}$ | $0,0005\ [m]$ | $0,0019\ [m^2]$ |
| | $\mathbf{u}$ | $0,0421\ [V]$ | $2,1404\ [V^2]$ |

## 5.4 Levantamento-captura, estabilização e seguimento de referência

Finalmente, esta seção concentra-se no último experimento que foi realizado para o sistema pêndulo invertido, o qual abarca todos os conceitos apresentados ao longo dos ensaios realizados nas seções anteriores: incertezas, distúrbio e ruído, incluindo três das principais aplicações do pêndulo invertido: levantamento-captura, estabilização e seguimento de referência. Para esse fim, foi desenvolvida uma lei de controle de levantamento que será explanada na Subseção 5.4.1, posteriormente, algumas considerações realizadas no experimento serão apresentadas na Subseção 5.4.2, finalmente, será apresentado o resultado e a análise e discussão sob o mesmo na Subseção 5.4.3.

### 5.4.1 Controle de levantamento por energia

Visando testar o pêndulo invertido em modo captura, uma lei de controle de levantamento é utilizada, permitindo levar a haste desde a posição inferior de equilíbrio estável ($\theta = \pi\ rad$) até a posição superior de equilíbrio instável ($\theta = 0\ rad$). A lei de controle por energia é projetada conforme (40), de acordo com o trabalho realizado por Åström e Furuta (2000).

$$u_{su}(k) = (0,15\text{sen}\theta^* + 0,2)sign(\dot{\theta}(k)\cos\theta(k)) + u_{fm}(k) + u_{PI}(k), \tag{40}$$

sendo $u_{su}$ o controle de levantamento, $\theta^*$ o angulo no qual o pêndulo apresenta sua máxima energia, $\theta$ a posição angular e $\dot{\theta}$ a velocidade angular. O termo adicional $u_{fm}$ é necessário para gerar o movimento inicial, pois a função $sign$ não é definida para $\dot{\theta} = 0$. Deste modo, é definido o sinal de passo como segue $\mathbf{1}(k)$, $u_{fm} = 0,25(\ \mathbf{1}(k - 0.1/T_s) - \mathbf{1}(k))$. A lei de controle auxiliar $u_{PI}$ em (41), permite que o carrinho do pêndulo invertido mantenha-se próximo a zero na posição linear $x_a$, enquanto atinge a posição superior desejada.

$$u_{PI}(k) = -0,5x_a(k) - 0,05\sum_{j=0}^{k} x_a(j). \tag{41}$$

### 5.4.2 Descrição do experimento

O experimento consiste na aplicação de duas estratégias de controle, o *swing-up* e o RLQR + RKF. Para isso deve ser definida uma zona de levantamento, na qual o *swing-up* age e uma zona de estabilização, onde o RLQR + RKF procede. A faixa da zona de estabilização é de $0,8$ radianos, sendo divido em $0,4$ radianos para a direita e para esquerda, com 0 radianos como ponto central, uma explicação mais clara é apresentada na Figura 14.

As incertezas consideradas no ensaio foram: $0,7\ kg$ no carrinho e $0,52\ kg$ na haste. Prevendo deslocar o pêndulo invertido ao longo do trilho é incluído o sinal de referência de magnitude $(-0,35 \leq ref \leq 0,35)m$. Para o distúrbio considera-se o sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_w = -3V$ e variância $\sigma_w^2 = 0,2V^2$ como segue $w_k = w(k - 75/T_s)$, sendo $w_k \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ e $k \geq 0$. O vetor de ruído aplicado é definido como $v_k = [v_1\ v_2]^T$, sendo $v_1$ o ruído na posição angular, denotado como um sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_{v_1} = 0\ rad$ e variância $\sigma_{v_1}^2 = 0,0066\ rad^2$, segundo a expressão: $v_1(k - 40/T_s)$ com $v_1 \sim N(\mu_{v_1}, \sigma_{v_1}^2)$ e $k \geq 0$. $v_2$ é o ruído na posição linear, representado como um sinal aleatório de distribuição normal com média $\mu_{v_2} = 0\ m$ e variância $\sigma_{v_2}^2 = 0,0025\ m^2$, como segue, $v_2(k - 40/T_s)$ com $v_2 \sim N(\mu_{v_2}, \sigma_{v_2}^2)$ e $k \geq 0$.

O ensaio inicia com a haste na posição inferior de equilíbrio estável ($\theta = \pi\ rad$) e o carrinho na posição de partida ($x_a = 0\ m$), o controle de levantamento impulsiona a haste até uma zona de estabilização, na qual o RLQR + RKF estabiliza o sistema. Posteriormente à estabilização, no tempo $t = 17s$ são adicionadas as cargas no carrinho e

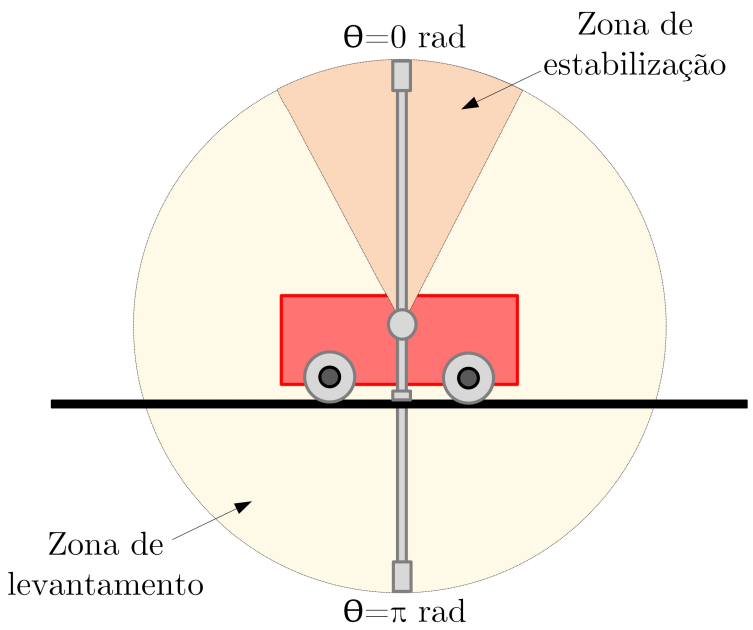



Figura 14 – Zonas de levantamento e estabilização do pêndulo invertido.

a haste respetivamente, seguidamente, no tempo $t = 30s$ o sinal de referência desloca ao sistema ao longo do trilho, encontrando-se o pêndulo invertido em um extremo do trilho a 5 $mm$ de sua faixa de trabalho no tempo $t = 40s$, o ruído no sensor de ângulo e deslocamento é inserido. Finalmente no tempo $t = 75s$ o sinal de distúrbio é inserido, quando o pêndulo encontra-se ao extremo contrario do trilho. O tempo total do experimento é $t = 100s$, a Figura 15, explana detalhadamente o ensaio realizado.

### 5.4.3 Análise dos resultados

O resultado do ensaio (Figura 15) mostra como as estratégias de controle *swing-up* e RLQR + RKF tratam os principais problemas de controle encontrados no pêndulo invertido: levantamento-captura, estabilização e seguimento de sinal de referência. Pode-se perceber que a resposta do sistema é robusta e ótima ante incerteza de comprimento, massa e inércia, distúrbio no sinal de controle e ruído no sistema de medida. A combinação do RLQR com o RKF fornece um controlador resiliente que utiliza as propriedades do RKF na eliminação de ruído e rejeição do distúrbio, enquanto o RLQR garante a estabilidade do sistema ante incertezas. O interessante da abordagem é o fato de que tanto o RLQR como o RKF são projetados de forma separada.

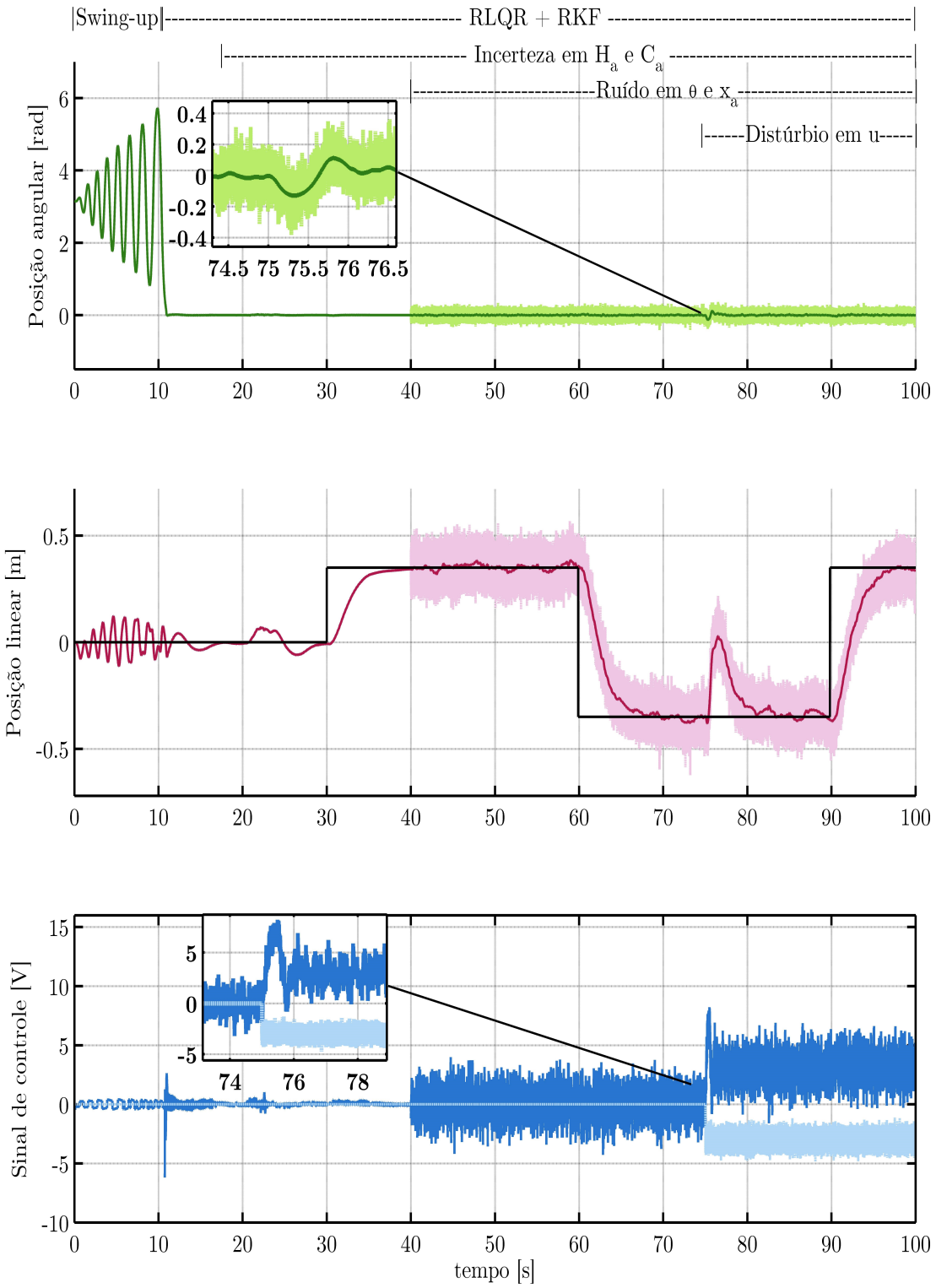



Figura 15 – Resposta do pêndulo invertido ante os problemas de controle: levantamento-captura, estabilização e seguimento de sinal de referência – Posição angular (*verde*), posição linear (vermelho), sinal de controle (*azul*), ruído na posição angular (*verde claro*), ruído na posição linear (*rosa*), distúrbio (*azul claro*) e sinal quadrado de referência (*preto*).

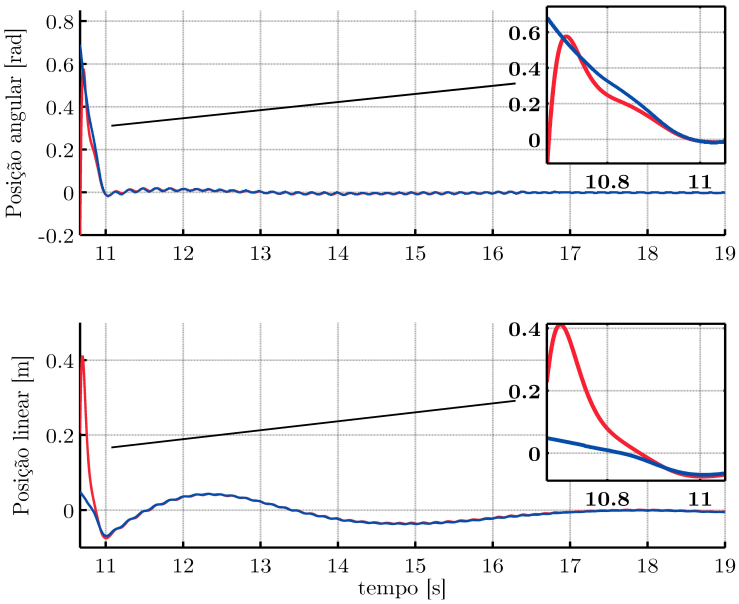



Figura 16 – RLQR + RKF – Estimação linear da posição angular e linear. Sinal real (*azul*), sinal estimado (*vermelho*).

Uma caraterística relevante para fazer destaque é o chaveamento do controlador de levantamento para o controle de estabilização, pois o limite estabelecido para a mudança de controlador é $0,45$ radianos na posição angular, no entanto na estimação linear realizada pelo RKF inicia quando a posição angular é igual a $0,65$ radianos, a Figura 16 apresenta o momento exato quando a estimação inicia e como rapidamente o sinal estimado atinge ao sinal real.

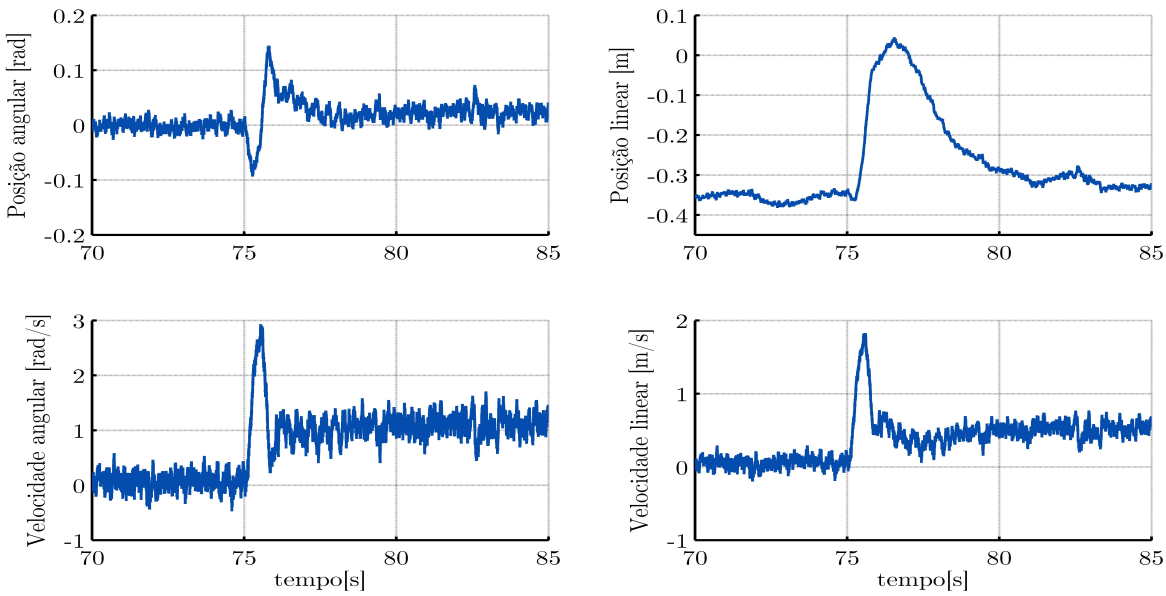



Figura 17 – Estados estimados ante a presença de incerteza, distúrbio e ruído.

Escolhendo o intervalo de tempo $(70 \leq t \leq 85)s$ da Figura 15 é possível observar a resposta do sistema ante a presença de incerteza, distúrbio e ruído, além disso na posição linear $x_a = 0,35\ m$ com somente 5 $mm$ disponíveis para não sair da sua zona de operação. A Figura 17 apresenta os estados estimados, perceba-se como o RKF reduze o ruído nos estados, assim como rejeita o distúrbio.

# Artigo publicado

- Ortega, F. M. E., Alarcon, A. L. J., Terra, M. H., Junior, V. G. (2015) Sobre o desempenho de reguladores lineares quadráticos robustos recursivos. *Anais do XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Natal-RN, Brasil.*

Capítulo 6

# Conclusões

Esta dissertação de mestrado abordou de forma robusta o problema de regulação e estimação de variáveis de estado para sistemas dinâmicos lineares discretos incertos. A metodologia utilizada foi a combinação do regulador linear quadrático RLQR e o filtro de Kalman RKF, ambos nas suas formas robustas. Desta forma, é possível a obtenção de uma estratégia de controle resiliente que utiliza as propriedades do RKF para a estimação de estados, rejeição de distúrbios e eliminação do ruído, enquanto o RLQR garante a estabilidade do sistema ante a presença de incertezas.

Para a avaliação do desempenho do controlador, foi utilizado o clássico pêndulo invertido. Devido a sua dinâmica altamente não linear, possui uma série de desafiantes problemas de grande interesse pela comunidade científica. A estratégia de controle projetada permitiu a resolução dos três principais problemas encontrados na literatura sobre o pêndulo invertido: o controle de levantamento-captura, o controle de estabilização e o controle de seguimento de referência. Vale ressaltar que que o problema de levantamento foi resolvido utilizando um controlador em malha aberta por energia.

Foi realizado um estudo comparativo entre o RLQR e o RLQR + RKF. Os controladores aplicados no pêndulo invertido, foram projetados sobre duas premissas: inicialmente quando todos os estados do sistema são acessíveis, em segundo lugar, quando existe a necessidade de estimar estados. Quatro experimentos foram realizados para analisar a estabilidade e o desempenho, utilizando um conjunto de incertezas representadas por cargas, sinal de distúrbio inserido na entrada de controle e sinal de ruído incluído no sistema de medida.

## 6.1 Trabalhos futuros

Os resultados obtidos sugerem trabalhos a serem desenvolvidos no futuro:

- A aplicação do RLQR e o RKF, utilizando a teoria de controle Markoviano para lidar com problemas onde existam mudanças abruptas de funcionamento.

- Devido ao fato do pêndulo invertido representar o princípio de funcionamento em aplicações de interesse científico, a metodologia robusta de controle e estimação poderia ser utilizada na solução de problemas de reabilitação e sincronização de sistemas dinâmicos.

- O desenvolvimento de uma metodologia automática para o cálculo das matrizes de incertezas $H_k$, $E_{F_k}$ e $E_{B_k}$.

# Referências


ÅSTRÖM, K.; FURUTA, K. Swinging up a pendulum by energy control. **Automatica**, 2000. v. 36, n. 2, p. 287 – 295, February 2000. ISSN 0005-1098.

BETTAYEB, M. et al. Stabilization of an inverted pendulum-cart system by fractional PI-state feedback. **{ISA} Transactions**, 2014. v. 53, n. 2, p. 508 – 516, March 2014. ISSN 0019-0578.

BODE, H. **Network Analysis and Feedback Amplifier Design 12th ed**. Princeton: Van Nostrand, 1945.

BRYSON, A. E.; HO, Y.-C. **Applied optimal control: optimization, estimation and control**. New York, NY,USA: Taylor & Francis, 1975.

CAPOLEI, A. et al. A mean-variance objective for robust production optimization in uncertain geological scenarios. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, 2015. v. 125, p. 23–37, January 2015. ISSN 0920-4105.

CERRI, J. P. **Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2009.

CERRI, J. P. **Control and filtering for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems**. Tese (Doutorado) — University of São Paulo at São Carlos., 2013.

CHANG, X. **Robust Output Feedback H-infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2014. (Studies in Systems, Decision and Control). ISBN 9783642551079.

CHATTERJEE, D.; PATRA, A.; JOGLEKAR, H. K. Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length. **Systems & Control Letters**, 2002. v. 47, n. 4, p. 355 – 364, November 2002. ISSN 0167-6911.

CUI, R.; GUO, J.; MAO, Z. Adaptive backstepping control of wheeled inverted pendulums models. **Nonlinear Dynamics**, 2014. v. 79, n. 1, p. 501–511, January 2014. ISSN 1573-269X.

DADRAS, S.; MOMENI, H. R. Control of a fractional-order economical system via sliding mode. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 2010. v. 389, n. 12, p. 2434–2442, June 2010. ISSN 0378-4371.

DORATO, P. A historical review of robust control. **IEEE Control Systems Magazine**, 1987. v. 7, n. 2, p. 44–47, April 1987. ISSN 0272-1708.

DURAND, S. et al. Event-based control of the inverted pendulum: Swing up and stabilization. **Control Engineering and Applied Informatics**, 2013. v. 15, n. 3, p. 96–104, August 2013.

FEEDBACK INSTRUMENTS LTD. **Manual on Digital Pendulum Control Experiments No 33-936S**. Ed02-1. Crowborough, East Sussex, UK, December 2013. 61 p.

FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle of control theory. **Automatica**, 1976. Elsevier, v. 12, n. 5, p. 457–465, March 1976.

FU, C. et al. A walking control strategy combining global sensory reflex and leg synchronization. **Robotica**, 2016. v. 34, p. 973–994, May 2016. ISSN 1469-8668.

GARCIA, G. et al. Robust stabilization and guaranteed cost control for discrete-time linear systems by static output feedback. **Automatica**, 2003. v. 39, n. 9, p. 1635–1641, September 2003. ISSN 0005-1098.

GONG, S.; WANG, P.; DUAN, L. Distributed power control with robust protection for pus in cognitive radio networks. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, 2015. v. 14, n. 6, p. 3247–3258, June 2015. ISSN 1536-1276.

GRASSER, F. et al. Joe: a mobile, inverted pendulum. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 2002. v. 49, n. 1, p. 107–114, February 2002. ISSN 0278-0046.

ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CAMPOS, J. C. T. Robust Kalman filter for descriptor systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2006. v. 51, n. 8, p. 1354–1354, August 2006. ISSN 0018-9286.

ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CERRI, J. P. Optimal robust filtering for systems subject to uncertainties. **Automatica**, 2015. v. 52, p. 111–117, February 2015. ISSN 0005-1098.

KALMAN, R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control. **Boletin Sociedad Matematica Mexicana**, 1960. v. 5, p. 102–119, 1960.

_____. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering**, 1960. v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960.

KUO, A. Stabilization of lateral motion in passive dynamic walking. **International Journal of Robotics Research**, 1999. v. 18, n. 9, p. 917–930, September 1999. ISSN 02783649.

LIU, H.; WANG, X.; ZHONG, Y. Quaternion-based robust attitude control for uncertain robotic quadrotors. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, 2015. v. 11, n. 2, p. 406–415, April 2015. ISSN 1551-3203.

LUENBERGER, D.; YE. **Linear and Nonlinear Programming**. Stanford, CA, USA: Springer, 2008.

MURALIDHARAN, V.; MAHINDRAKAR, A. D. Position stabilization and waypoint tracking control of mobile inverted pendulum robot. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2014. v. 22, n. 6, p. 2360–2367, November 2014. ISSN 1063-6536.

NG, W. M.; CHANG, D. E.; SONG, S.-H. Four representative applications of the energy shaping method for controlled lagrangian systems. **Journal of Electrical Engineering and Technology**, 2013. The Korean Institute of Electrical Engineers, v. 8, n. 6, p. 1579–1589, July 2013.

PATHAK, K.; FRANCH, J.; AGRAWAL, S. K. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. **IEEE Transactions on Robotics**, 2005. v. 21, n. 3, p. 505–513, June 2005. ISSN 1552-3098.

PETERSEN, I. R.; TEMPO, R. Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments. **Automatica**, 2014. v. 50, n. 5, p. 1315–1335, May 2014. ISSN 0005-1098.

POLO, M. F. P.; MOLINA, M. P.; CHICA, J. G. Swing-up and positioning control of an inverted wheeled cart pendulum system with chaotic balancing motions. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 2012. v. 47, n. 6, p. 655 – 665, July 2012. ISSN 0020-7462.

PRASAD, L. B.; TYAGI, B.; GUPTA, H. O. Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and lqr: Performance analysis without and with disturbance input. **International Journal of Automation and Computing**, 2015. v. 11, n. 6, p. 661–670, November 2015. ISSN 1751-8520.

RIVERA, S. et al. Multilevel direct power control — a generalized approach for grid-tied multilevel converter applications. **IEEE Transactions on Power Electronics**, 2014. v. 29, n. 10, p. 5592–5604, October 2014. ISSN 0885-8993.

SAFONOV, M. G. Origins of robust control: Early history and future speculations. **Annual Reviews in Control**, 2012. v. 36, n. 2, p. 173 – 181, December 2012. ISSN 1367-5788.

SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2001. v. 46, n. 7, p. 998–1013, July 2001. ISSN 0018-9286.

SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In: **Robustness in identification and control**. London, UK: Springer, 1999. p. 159–173. ISBN 978-1-84628-538-7.

SCHWARTZ, M. et al. Aesthetic design and development of humanoid legged robot. In: IEEE. **2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots**. Madrid, Spain, 2014. p. 13–19. ISSN 2164-0572.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. New York, NY,USA: Wiley, 2007.

SONG, H.; PARK, H.; PARK, S. A springy pendulum could describe the swing leg kinetics of human walking. **Journal of Biomechanics**, 2016. v. 49, n. 9, p. 1504 – 1509, June 2016. ISSN 0021-9290.

TERRA, M.; CERRI, J.; ISHIHARA, J. Optimal robust linear quadratic regulator for systems subject to uncertainties. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, 2014. v. 59, n. 9, p. 2586–2591, September 2014. ISSN 0018-9286.

TRIMPE, S.; ANDREA, R. D. The balancing cube: A dynamic sculpture as test bed for distributed estimation and control. **IEEE Control Systems**, 2012. v. 32, n. 6, p. 48–75, December 2012. ISSN 1066-033X.

VANONCINI, M.; HOLDERBAUM, W.; ANDREWS, B. J. Electrical stimulation for trunk control in paraplegia: A feasibility study. **Control Engineering Practice**, 2012. v. 20, n. 12, p. 1247 – 1258, December 2012. ISSN 0967-0661.

VERMEIREN, L. et al. Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination: An urban transportation system. **Control Engineering Practice**, 2011. v. 19, n. 7, p. 744 – 756, July 2011. ISSN 0967-0661.

VIKAS, V.; CRANE, C. Bioinspired dynamic inclination measurement using inertial sensors. **Bioinspiration & Biomimetics**, 2015. v. 10, n. 3, p. 036003, April 2015.

XIANG, Y.; ARORA, J. S.; ABDEL-MALEK, K. Optimization-based prediction of asymmetric human gait. **Journal of Biomechanics**, 2011. v. 44, n. 4, p. 683 – 693, February 2011. ISSN 0021-9290.

YANG, A. et al. Stability analysis and implementation of a decentralized formation control strategy for unmanned vehicles. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2014. v. 22, n. 2, p. 706–720, March 2014. ISSN 1063-6536.

YANG, W. C.; TOMIZUKA, M. Discrete time robust control via state feedback for single input systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1990. v. 35, n. 5, p. 590–598, May 1990. ISSN 0018-9286.

YU, L.; HAN, Q.; SUN, M. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems with input constraints. **International Journal of Control Automation and Systems**, 2005. Korean Institute of Electrical Engineers, v. 3, n. 3, p. 397, September 2005.

ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1981. v. 26, n. 2, p. 301–320, April 1981. ISSN 0018-9286.

_____. Input-output feedback stability and robustness, 1959-85. **IEEE Control Systems**, 1996. v. 16, n. 3, p. 61–66, June 1996. ISSN 1066-033X.

ZÚÑIGA, I. T.; QUEINNEC, I.; WOUWER, A. V. Observer-based output feedback linearizing control strategy for a nitrification-denitrification biofilter. **Chemical Engineering Journal**, 2012. v. 191, p. 243–255, May 2012. ISSN 1385-8947.