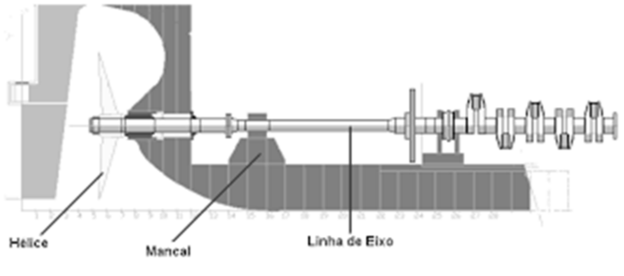
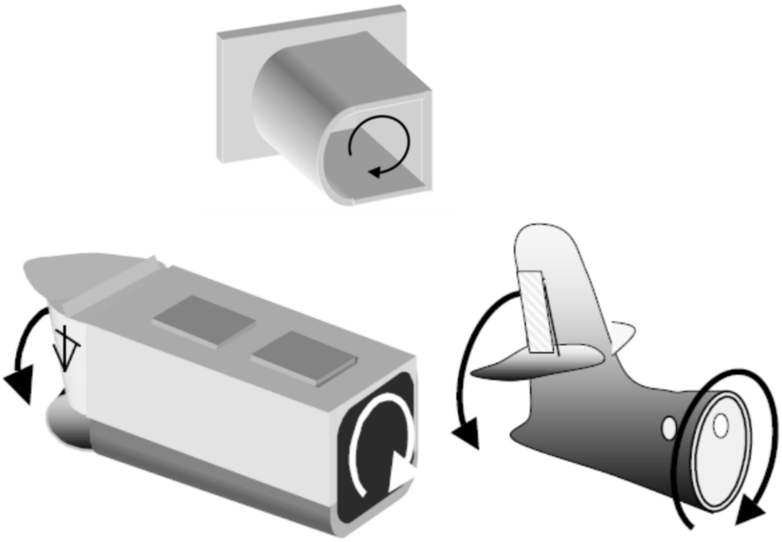
Torção de Membros Circulares

Diego F. Sarzosa Burgos
Núcleo de Mecânica da Fratura e Integridade Estrutural
Escola Politécnica – USP
E-mail: dsarzosa@usp.br

Torção

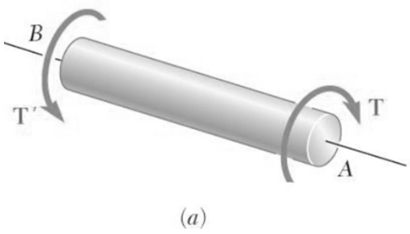


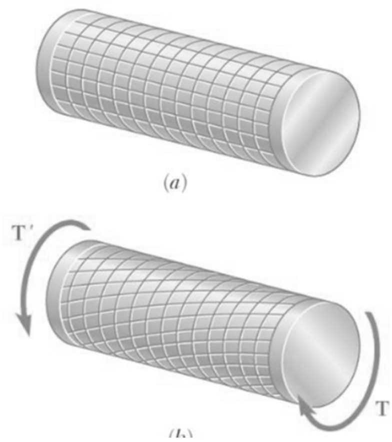
Torção em Membros de Parede Fina



2017

Torção

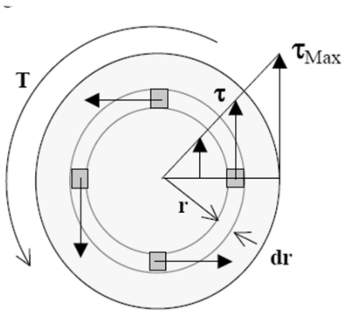




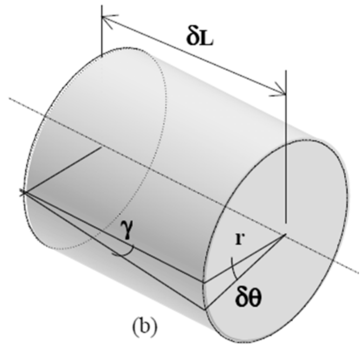
Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção

- **Admite-se que as deformações angulares variam linearmente desde o centro do membro**



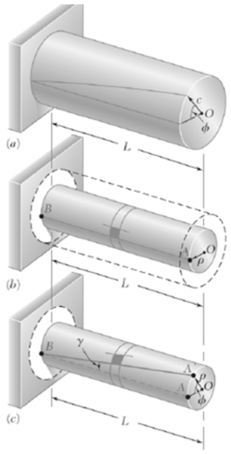
(a)

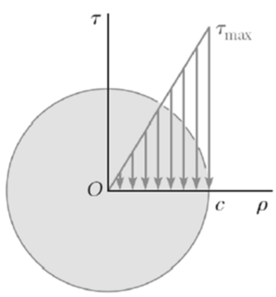


(b)

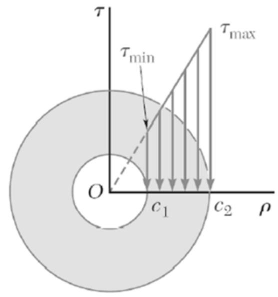
Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção





(a)

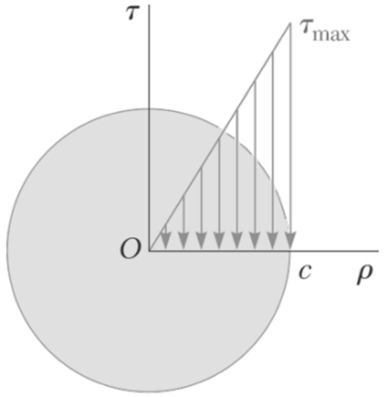


(b)

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção

A tensão de cisalhamento atuante na barra circular pode ser calculada como:



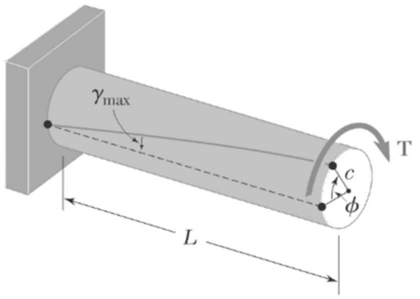
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

σ = tensão de cisalhamento
T = momento torsor;
ρ = distância relativa ao centro da seção transversal da barra;
J = momento polar de inércia

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção

O ângulo de torção pode ser calculado como:

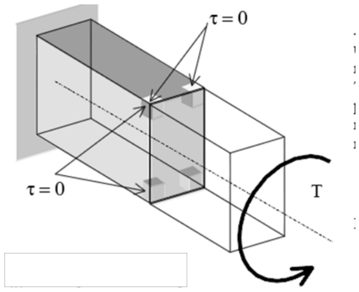


$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

Φ = ângulo de torção
L = compimento da barra
G = módulo de cisalhamento
J = momento polar de inércia

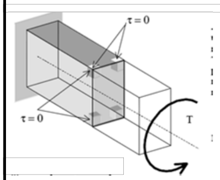
Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

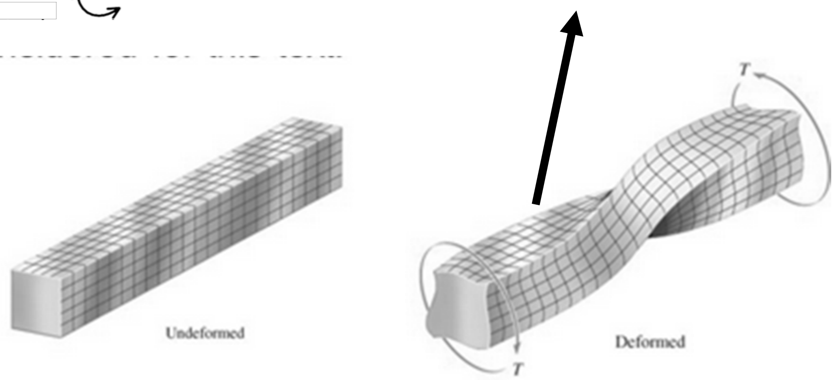


- Seções planas antes da deformação sofrem empenamento quando o membro sofre torção
- Distribuição complexa de tensões cisalhantes.
- Análise é muito mais complexa!

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

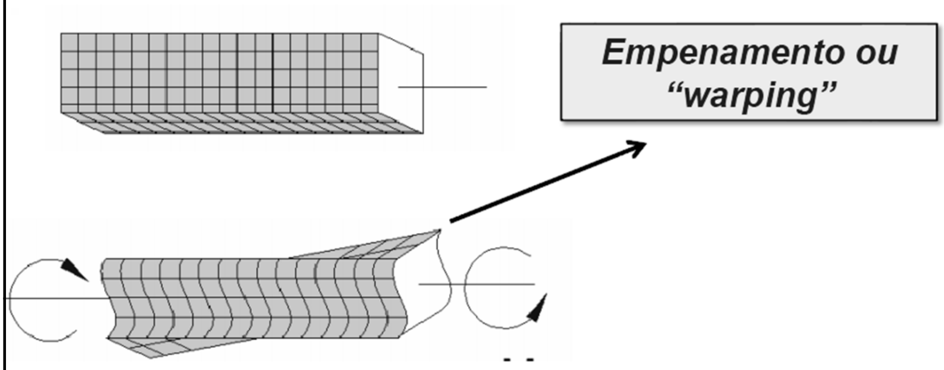


Empenamento ou Warping



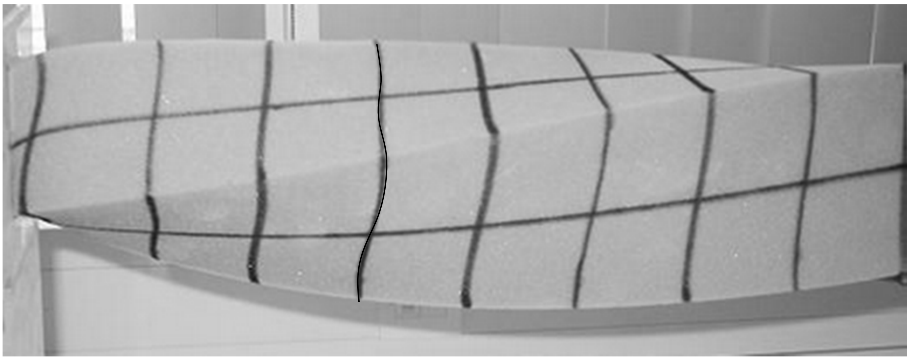
Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Seções Planas não permanecem planas



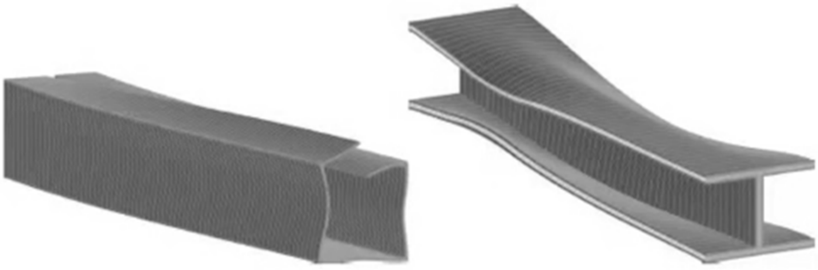
Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Seções Planas não permanecem planas

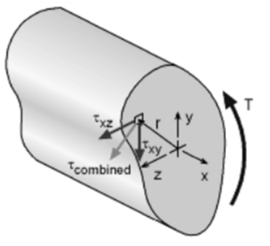


Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

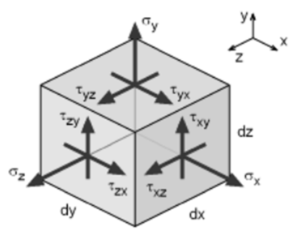
Seções Planas não permanecem planas



Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis



General 3D Stress State

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xz}}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

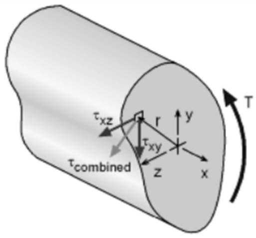
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \boxed{\tau_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0$$

Para torção pura

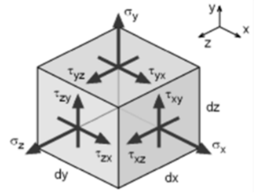
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque
about the x-axis



General 3D Stress State

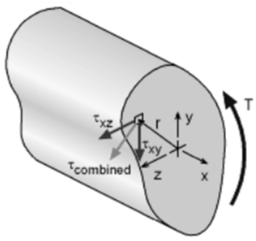
A solução é obtida por meio de uma função escalar ϕ:

Para torção pura

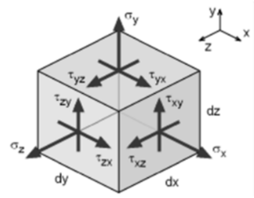
$$\sigma_x = \sigma_x = \sigma_x = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque
about the x-axis



General 3D Stress State

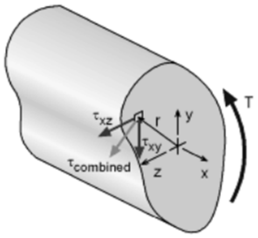
A solução é obtida por meio de uma função escalar ϕ:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

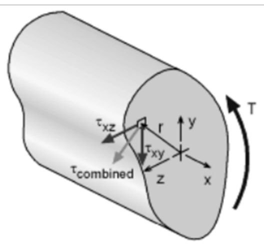
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

É necessário utilizar as relações deformações-deslocamentos para resolver o problema.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \longrightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

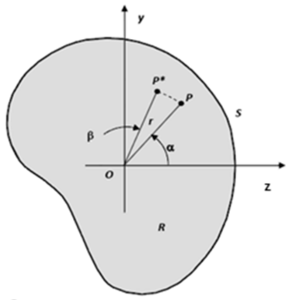
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

É necessário utilizar as relações deformação-deslocamento para resolver o problema.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



$\beta = \theta x$

β = ângulo de rotação
θ = ângulo de rotação por unidade de comprimento
x = distânica ao longo do eixo x

Deslocamentos (v,w) no plano da seção :

$$v = \theta xz$$
$$w = -\theta xy$$

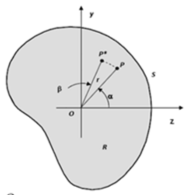
Deslocamento (u) fora do plano da seção :

$$u = \theta\psi\left(y,z\right)$$

Função de empenamento

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



$\beta = \theta x$

β = ângulo de rotação
θ = ângulo de rotação por unidade de comprimento
x = distânica ao longo do eixo x

Função de empenamento

$$\psi\left(y,z\right)$$

Deslocamentos (u,v,w)

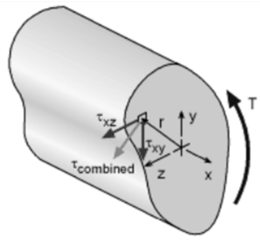
$$w = -\theta xy \qquad v = \theta xz \qquad u = \theta\psi\left(y,z\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta z \qquad \gamma_{xz} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta y$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

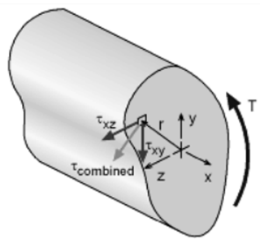
Lei de Hooke:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\gamma_{xy} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta z \qquad \gamma_{xz} = \theta\frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \boxed{\phi}}{\partial y} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi(y,z)$$

Função escalar

$$\phi(y,z)$$

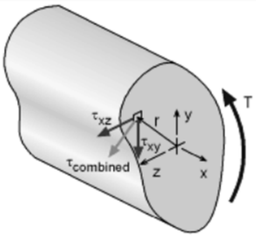
Substituindo a função escalar e a função de empenamcento na Lei de Hooke:

(1) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\left(\theta\frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta y\right) \quad \equiv \tau_{xz}$$

(2) $$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = G\left(\theta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \theta z\right) \quad \equiv \tau_{xy}$$

Temos duas funções incógnitas, ϕ e ψ, e duas equações.

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi\left(y,z\right)$$

Função escalar

$$\phi\left(y,z\right)$$

Para eliminar a função de empenamento da equação final do problema derivamos a eq. (1) em relação a "*y*" e a eq. (2) em relação a "*z*" e subtraímos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - G\theta\frac{\partial y}{\partial y}$$

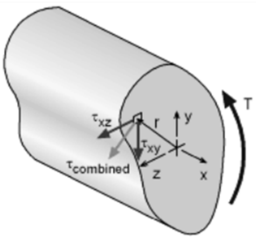
$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y} + G\theta\frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$

Eq. de Poisson

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular



Shear Stress with Torque about the x-axis

Função de empenamento

$$\psi\left(y,z\right)$$

Função escalar

$$\phi\left(y,z\right)$$

Para eliminar a função de empenamento da equação final do problema derivamos a eq. (1) em relação a "*y*" e a eq. (2) em relação a "*z*" e subtraímos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - G\theta\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = G\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y} + G\theta\frac{\partial z}{\partial z}$$

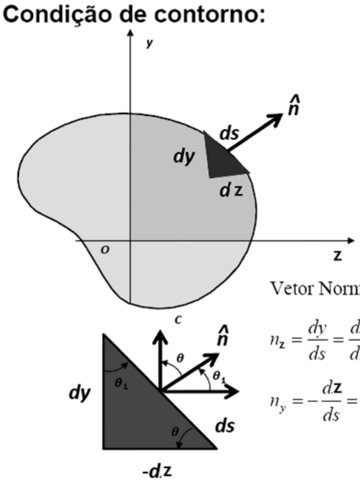
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$

Eq. de Poisson

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Condição de contorno:



Vetor Normal

$$n_z = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{dn}$$

$$n_y = -\frac{dz}{ds} = \frac{dy}{dn}$$

Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

τ_{xz} τ_{xy} n_z n_y

$$t^{(\hat{n})} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

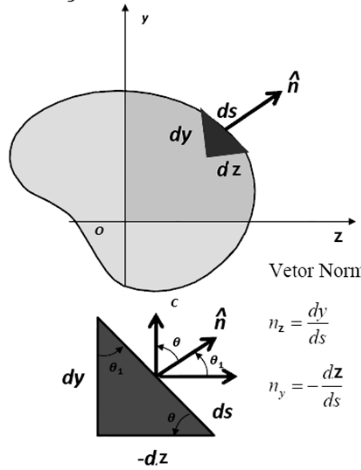
$$t^{(\hat{n})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No contorno não existe nenhum esforço aplicado

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Condição de contorno:



Vetor Normal

$$n_z = \frac{dy}{ds}$$

$$n_y = -\frac{dz}{ds}$$

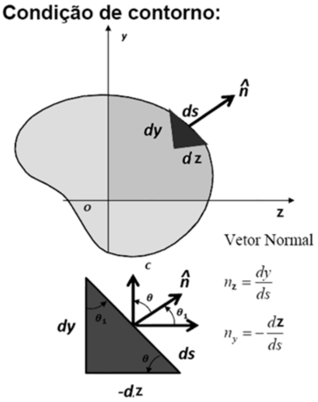
Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{dz}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{bmatrix}$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Condição de contorno:



Para resolver o problema as condições de contorno devem ser conhecidas.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0, \quad s = f(z, y)$$

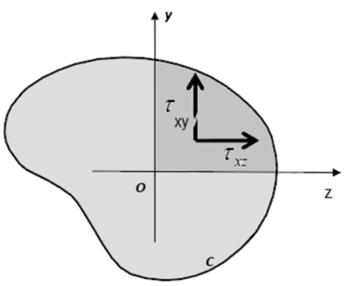
$$\phi = k$$

- **A função escalar de tensão (ϕ) deve ser <u>constante</u> ao longo do contorno.**
- **A equação de equilíbrio deve ser satisfeita pela função tensão ϕ**

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Momento torsor



$$\sum M_x = T = \int_A \left(z\tau_{xy} - y\tau_{xz} \right) dydz$$

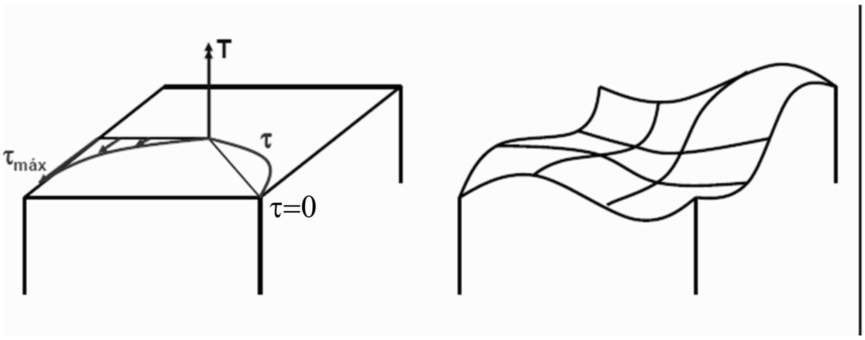
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\sum T = \int_A \left(-z\frac{\partial \phi}{\partial z} - y\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dydz$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Distribuição das tensões de cisalhamento para seção quadrada



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

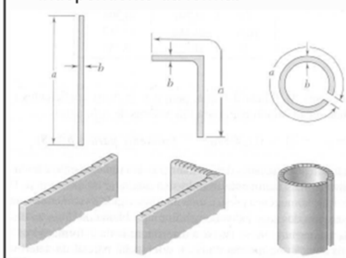
$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

→ Barras de paredes finas e espessura constante. Seção Aberta. Independente da forma.

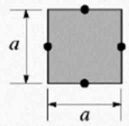
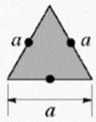
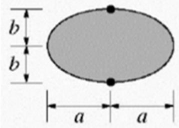


$$\tau_{máx} = \frac{T}{C_1 \cdot a \cdot b^2}$$

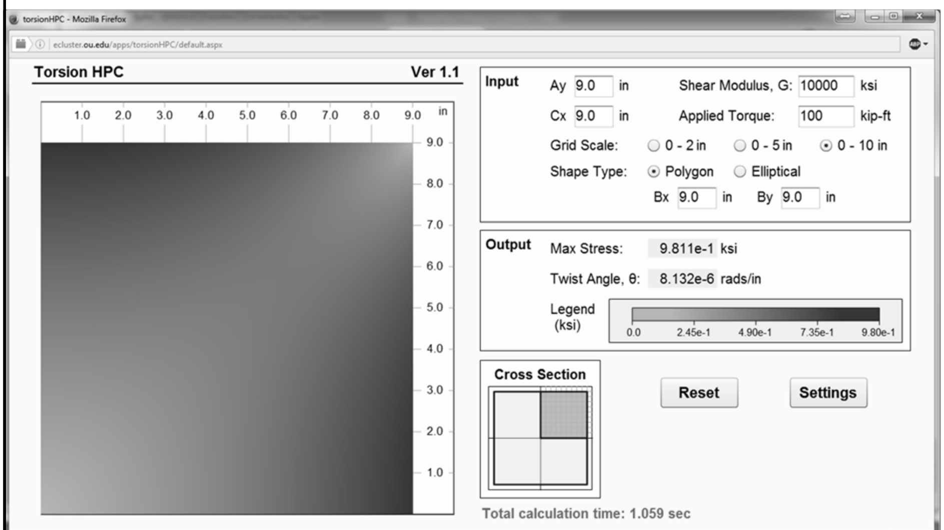
$$\phi = \frac{T \cdot L}{C_2 \cdot a \cdot b^3 \cdot G}$$

- onde: a → lado maior
  b → lado menor

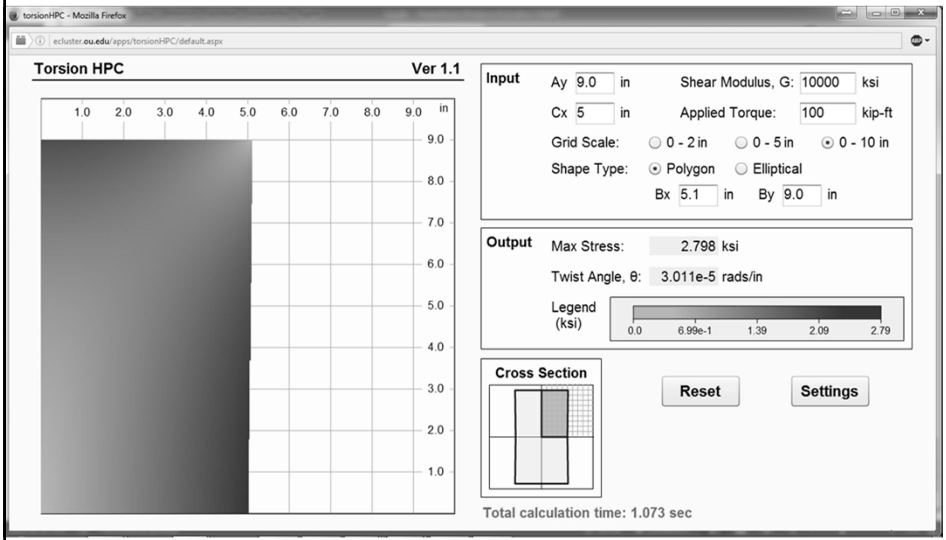
Torção em Membros de Seção Transversal Não Circular

Forma da seção transversal	$\tau_{máx}$	ϕ
Quadrada 	$\dfrac{4{,}81\,T}{a^3}$	$\dfrac{7{,}10\,TL}{a^4G}$
Triangular 	$\dfrac{20\,T}{a^3}$	$\dfrac{46\,TL}{a^4G}$
Elíptica 	$\dfrac{2\,T}{\pi ab^2}$	$\dfrac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

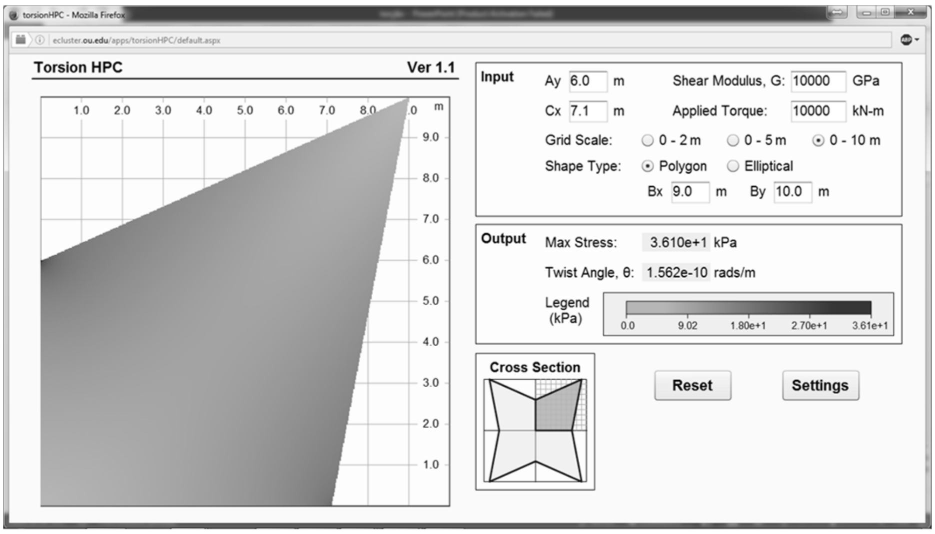
Exemplos



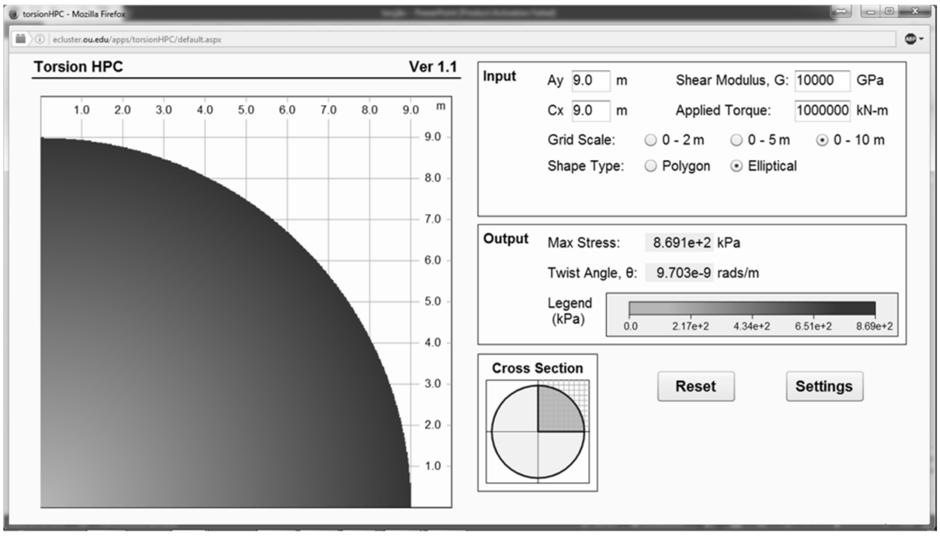
Exemplos



Exemplos

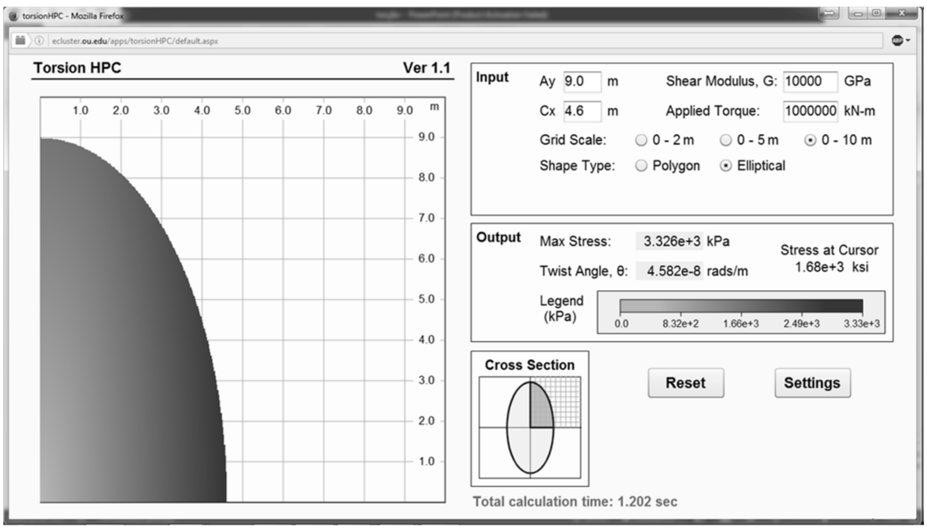


Exemplos



Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

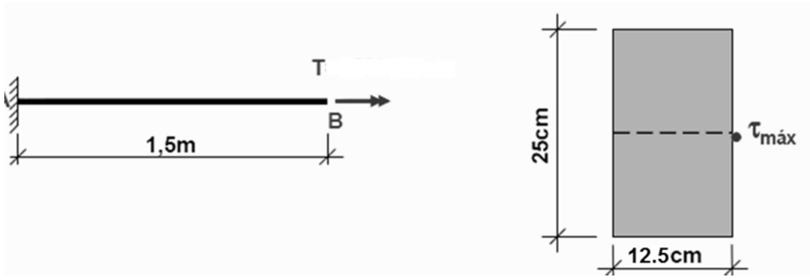
Exemplos



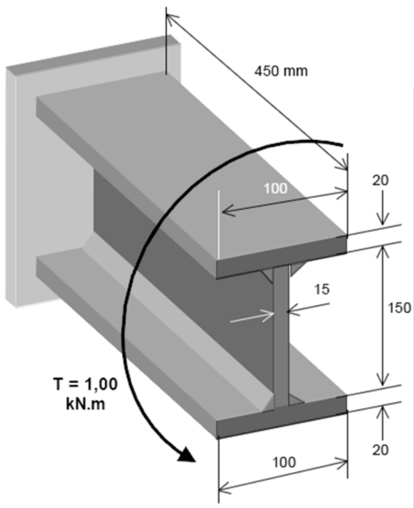
Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplos

- **Calcular a tensão máxima na barra de seção 125x250 mm, submetida a um momento de torção de 10^5 N-m. Qual será o ângulo de torção sabendo que o comprimento da barra é 1.5 m. E = 206 GPa, ν = 0.3;**



Exemplo

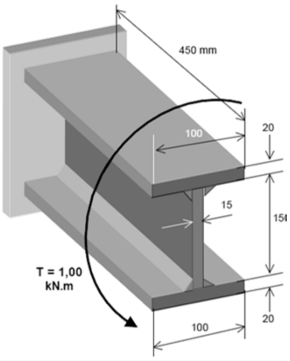


<u>Exemplo 4.6.3</u> - O perfil "I" esquematizado é montado através da união de duas barras chatas de aço, de 100 x 20 mm² ("mesas") soldadas a outra barra chata, também de aço, de 150 x 15 mm² ("alma"), sendo submetido a um torque T = 1,00 kN.m em sua extensão de 450 mm. Pede-se determinar:

a) a máxima tensão tangencial no perfil, e
b) o ângulo de torção do perfil .

Solução:

Exemplo

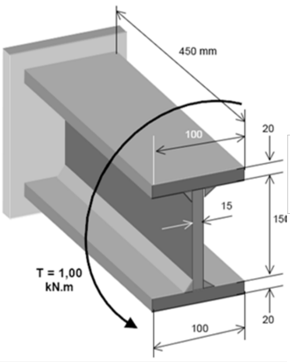


- **Key points:**
  - **O momento T é suportado pelas almas e flange da viga.**
  - **A ângulo de torção ϕ das almas é o mesmo do flange (<u>compatibilidade das deformações</u>).**

$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$\phi_{flange} = \phi_{alma}$$

Exemplo

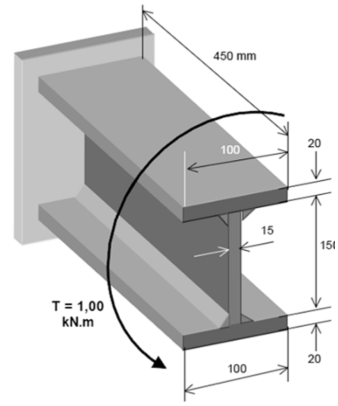


$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$\phi_{flange} = \phi_{alma} \rightarrow \frac{T_{flange}L}{J_{flange}G} = \frac{T_{alma}L}{J_{alma}G}$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(C_2ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(C_2ab^3\right)_{alma}}$$

Exemplo



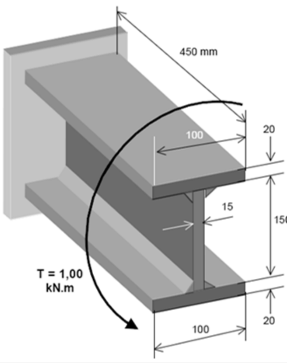
$$\left(\frac{a}{b}\right)_{flange} = \frac{100}{20} = 5 \qquad C_2 = 0.291$$

Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{alma} = \frac{150}{15} = 10 \qquad C_2 = 0.312$$

Exemplo



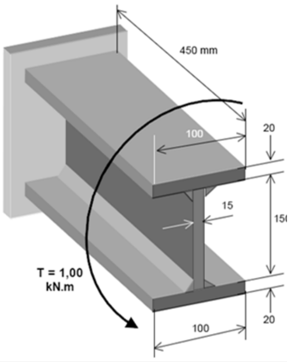
$$\frac{T_{flange}}{\left(C_2 ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(C_2 ab^3\right)_{alma}}$$

$$C_2 = 0.291 \qquad C_2 = 0.312$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291 ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312 ab^3\right)_{alma}}$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo

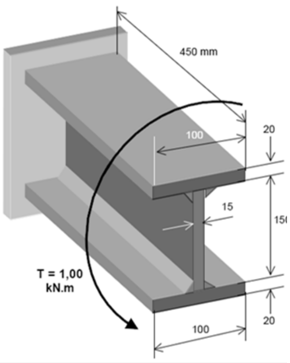


$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312ab^3\right)_{alma}}$$

$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291\times100\times20^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312\times150\times15^3\right)_{alma}}$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo



$$\frac{T_{flange}}{\left(0.291ab^3\right)_{flange}} = \frac{T_{alma}}{\left(0.312ab^3\right)_{alma}}$$

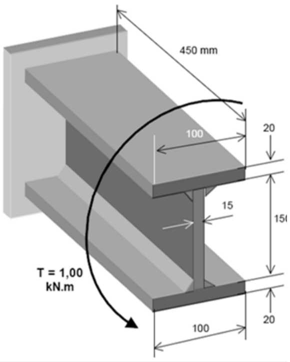
$$0.679T_{flange} = T_{alma}$$

$$T = 2T_{flange} + T_{alma}$$

$$T = 2T_{flange} + 0.679T_{flange}$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo



$$T = 2T_{flange} + 0.679T_{flange}$$

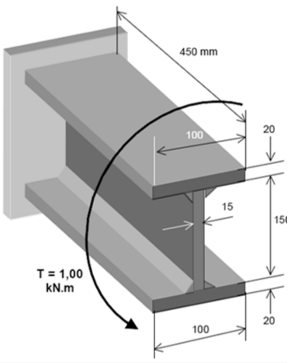
$$T_{flange} = \frac{T}{2.679}$$

$$0.679\frac{T}{2.679} = T_{alma}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{T}{3.945} = T_{alma}$$

Exemplo



$$\frac{T}{3.945} = T_{alma} \longrightarrow \tau_{alma} = \frac{T_{alma}}{C_1ab^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{alma} = \frac{150}{15} = 10$$

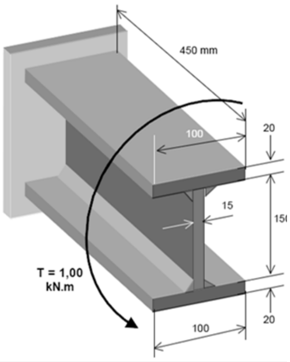
$$\downarrow$$

$$C_1 = 0.312$$

Coeficientes C_1 e C_2:

a/b	C_1	C_2
1	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3	0,267	0,263
4	0,282	0,281
5	0,291	0,291
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Exemplo



$$\frac{T}{3.945} = T_{alma} \longrightarrow \tau_{alma} = \frac{T_{alma}}{C_1 a b^2}$$

$$\downarrow$$

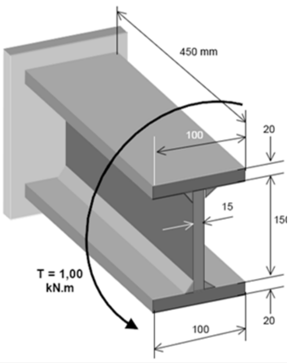
$$\tau_{alma} = \frac{\frac{10^6}{3.945}}{0.312 \times 150 \times 15^2}$$

$$\downarrow$$

$\tau_{alma} = 24$ MPa

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo



$$T_{flange} = \frac{T}{2.679} \longrightarrow \tau_{flange} = \frac{T_{flange}}{C_1 a b^2}$$

$$\downarrow$$

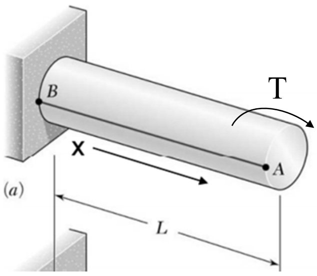
$$\tau_{flange} = \frac{\frac{10^6}{3.945}}{0.291 \times 100 \times 20^2}$$

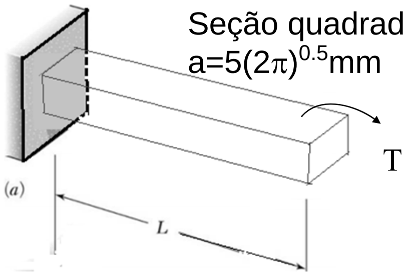
$$\downarrow$$

$\tau_{flange} = 32$ MPa

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo





Seção quadrada
a=5(2π)$^{0.5}$mm

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$T = 10N - m$$

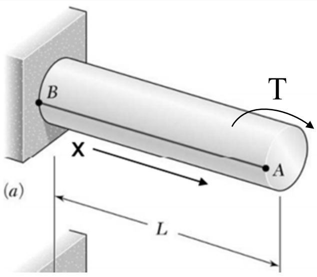
$$d = 10mm$$

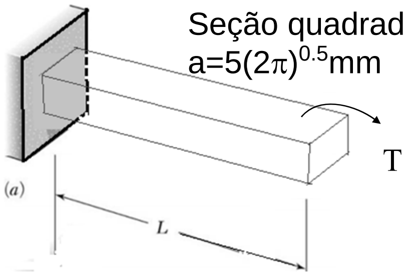
$$\tau_{\max} = \frac{T}{\boxed{C_1}ab^2}$$

$$C_1 = 0,0434\ln\left(a/b\right) + 0,2153$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo





Seção quadrada
a=5(2π)$^{0.5}$mm

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$T = 10N - m$$

$$d = 10$$

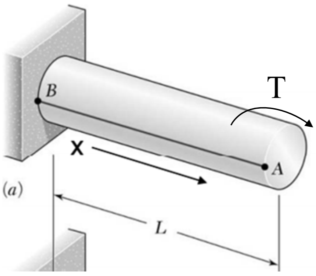
$$a = 5\sqrt{2\pi}$$

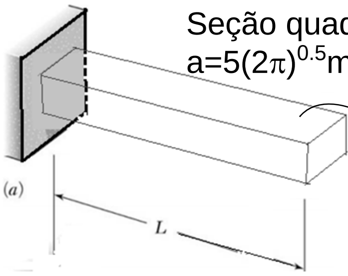
$$\tau_{\max} = \frac{T}{\boxed{C_1}ab^2}$$

$$C_1 = 0,208$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017

Exemplo





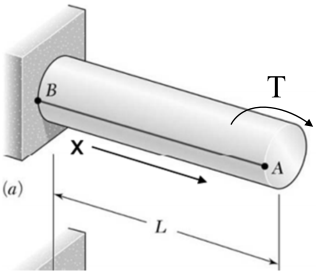
Seção quadrada
a=5(2π)$^{0.5}$mm

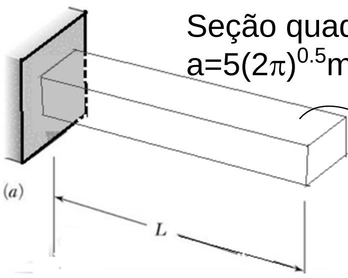
T

$$\tau_{\max} = \frac{16\times10^4}{\pi10^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{10^4}{0,208\times5\sqrt{2\pi}\times\left(5\sqrt{2\pi}\right)^2}$$

Exemplo





Seção quadrada
a=5(2π)$^{0.5}$mm

T

$$\tau_{\max} = \frac{16\times10^4}{\pi10^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{10^4}{0,208\times5\sqrt{2\pi}\times\left(5\sqrt{2\pi}\right)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{160}{\pi}\left[MPa\right]$$

$$\tau_{\max} = \frac{76,7}{\pi}\left[MPa\right]$$

Prof. Dr. Diego Sarzosa Burgos- 2017