4^a **Lista de Exercícios – Eletromagnetismo II**

Data sugerida para completar esta lista: 15 de Maio

4.1 — Considere o espalhamento de uma onda plana por uma esfera de raio a, sob a condição de contorno $\psi(r = a) = 0$. Assuma que a onda incidente tem frequência tal que $ka = 1/2$.

(a) Calcule as fases δ_ℓ para $\ell = 0$, 1 e 2.

(b) Obtenha as seções de choque diferenciais para esses valores de ℓ. Faça um gráfico das seções de choque diferenciais como função de θ.

(c) Obtenha a seção de choque total, somando apenas as contribuições até $\ell = 3$. Faça uma estimativa do erro que você incorreria ao limitar sua soma até $\ell = 2$

4.2 — Considere o espalhamento de uma onda plana por uma calota esférica de raio a – ou seja, uma esfera cortada ao meio. Tome uma calota que está virada para baixo, assim a superfície da calota é descrita por $\{r = a, \pi/2 \le \theta \le \pi\}$ e $\{0 \le r \le a, \theta = \pi/2\}$.

(a) Mostre que a aplicação cuidadosa das condiço?es de contorno de Dirichlet ($\psi = 0$ na superfície do condutor) implica que as fases δ_ℓ são idênticas às fases no caso de uma esfera inteira, exceto que no caso da semi-esfera $\delta_\ell = 0$ para ℓ par. Explique por que isso ocorre.

(b) Qual a diferença entre o espalhamento por uma semi-esfera virada para baixo e o problema do espalhamento por uma semi-esfera virada para cima? Como as fases δ_ℓ mudam de um caso para o outro? As seções de choque também são alteradas?

(c) Obtenha a seção de choque total do espalhamento pela semi-esfera quando $ka = 1/2$, somando apenas as contribuições até $\ell = 3$. Compare com o resultado da esfera (item 4.1 - c).

4.3 — Vamos imaginar um problema de propagação e espalhamento de ondas em *duas dimensões espaciais* – o plano (x, y). Considere a onda incidente, de frequência ω, se propagando na direção $+x$, ou seja, $\psi_i = Ae^{ikx}$.

(a) Escreva a equação de onda em coordenadas polares, $(x, y) \to (r, \theta)$. (Dica: comece com a equação de onda em três dimensões, em coordenadas cilíndricas, e jogue a coordenada z fora.)

(b) Mostre que as auto-funções radiais dessa equação são funções de Bessel normais, de índices m inteiros – em contraste com o caso tridimensional em coordenadas esféricas, em que temos como auto-funções radiais as funções de Bessel esféricas.

(c) Expresse a onda plana incidente em termos de funções radiais e angulares.

(d) Mostre que a onda radial livre (o correspondente ao $A\, e^{ikr}/r$ no caso de três dimensões espaciais) é agora dada por $A\, e^{ikr}/\sqrt{r}$. Pensando em termos da potência, qual a explicação para esse fator de $1/\sqrt{r}$ em 2 dimensões, comparado ao $1/r$ que temos em 3 dimensões?

(e) Vamos supor que a onda incidente é espalhada por um disco de raio a, com no caso $ka \ll 1$, e que a Física desse problema é tal que devemos usar as condições de contorno de Dirichlet, ou seja, $\psi_T(r = a) = 0$. Encontre as diferenças de fase $?_m$ para $m = 0$, 1 e 2.

Neste exercício você tem que utilizar algumas propriedades das funções de Bessel, em particular:

$$J_{-m}(z) = (-1)^M J_m(z) \quad , \quad Y_{-m}(z) = (-1)^M Y_m(z)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, e^{-im\varphi + iz\cos\varphi} = 2\pi i^{|m|} J_{|m|}(z)$$

Limites assintóticos $z \to \infty$:

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} cos \left[z ? \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$Y_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z ? \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

Limites assintóticos $z \to 0$:

$$J_m(z) \approx \left(\frac{z}{2} \right)^m \frac{1}{m!} \quad (m \geq 0)$$

$$Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} J_0(z) \log \frac{z}{2}$$

$$Y_m(z) \approx -\left(\frac{z}{2} \right)^{-m} \frac{(m-1)!}{\pi} \quad (m \geq 1)$$

4.4 – Considere o experimento de duas fendas do Young – duas fendas muito finas e muito longas, separadas por uma distância d na vertical. Considere uma onda plana incidente.

(a) Utilizando o Princípio de Huygens, calcule o envelope *exato* da curva de intensidade. Assuma apenas que a onda incidente é plana, e que incide normalmente.

(b) Se a onda incide num ângulo α no plano onde estão localizadas as fendas, o que muda na *fase* da onda? Como isso altera o padrão de interferência?

(c) Suponha que o anteparo é colocado a uma distância z do plano das fendas, e que podemos variar essa distância, trazendo esse plano mais para frente ou mais para trás. À medida que o anteparo é movido continuamente na direção z, as regiões de interferência construtiva e destrutiva se movem continuamente na direção y (vertical). Mostre que os pontos de intensidade máxima (interferência construtiva) e de intensidade mínima (interferência destrutiva) descrevem hipérboles no plano (z, y).

4.5 – Considere um *grid* (ou *grating*) de difração: em vez do experimento de Young, com duas fendas separadas por uma distância d, temos um número N de fendas muito finas, todas separadas pela mesma distância Δx. Assuma que a onda incidente é plana e que o anteparo está a uma distância fixa $L \gg N\Delta x$ do grid.

(a) Suponha que a intensidade de cada uma das ondas esféricas que emana das fendas é a mesma, $\langle |\Psi|^2 \rangle_t = \frac{1}{2} A^2$. Mostre que o padrão de interferência (a intensidade da luz refratada) como função de x no anteparo é:

$$I = N \frac{A^2}{2} + A^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \cos m\Delta\phi$$

onde $\Delta\phi = k\Delta x \sin\theta = k\Delta x \; x/L$.

(b) Mostre que a expressão acima se reduz a:

$$I = \frac{A^2}{2} \frac{\sin^2(N\Delta\phi/2)}{\sin^2(\Delta\phi/2)}$$

Dica: utilize as seguintes identidades trigonométricas [1]:

$$\sum_{m=1}^{N} \cos m\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2},$$

$$\sum_{m=1}^{N} m\cos m\alpha = \frac{(N+1)\sin(N+1/2)\alpha}{2\sin\alpha/2} - \frac{1-\cos(N+1)\alpha}{4\sin^2\alpha/2}.$$

(c) Faça uma gráfico de $I(\Delta\phi)$ para $N = 3$ e $N = 4$. Você deve notar que, entre os locais de instensidade máxima há vários locais onde a intensidade é *zero*! Qual a explicação física para isso?

(d) Mostre que, para N arbitrariamente grande, as franjas principais se tornam arbitrariamente finas e brilhantes, mas de tal modo que a luminosidade *total* permanece constante.

(e) O que acontence quando você toma $N \to \infty$ e $\Delta x \to \infty$, mas com $N\ \Delta x = D$ constante?

Dica: essa situação não corresponde mais a fendas infinitamente finas, mas a uma fenda de abertura finita D. Note que a intensidade da onda incidente agora é distribuída proporcionalmente à altura. Distribuindo a intensidade da onda incidente pelas N fendas, temos que a intensidade total é (antes de tomar o limite):

$$I_{total} = \frac{I(\Delta\phi)}{N}\frac{\Delta x}{D}$$

(f) Dentro de pouco tempo vamos aprender a calcular esse problema usando a fórmula de Fraunhofer. Logo que você aprender esse tópcio, calcule o padrão de interferência causado por uma fenda de altura finita D, e compare o resultado desse cálculo com o resultado obtido no item acima.

[1] Veja, por exemplo, W. Appel, *Mathematics for Physics and Physicists*