DIENES, Zoltan Paul. As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1975.

I

DESCRIÇÃO DAS ETAPAS

Que é compreender? Que é aprender? Devemos confessar que não temos ainda resposta cientificamente satisfatória para estas duas perguntas. Se, por um lado, é verdade que ninguém pode atualmente duvidar de que a relação estímulo-resposta conduz a um adestramento que, tanto no plano da compreensão como no da aprendizagem posterior, representa, na maioria das vezes, bloqueamentos, falta, por outro lado, demonstrar quais são os elementos constitutivos do processo de aprendizagem, digno desse nome.

Partimos do teorema de existência, segundo o qual admitimos que é a partir de um ambiente rico que a criança consegue construir seus conhecimentos, e tomamos como modelo a aprendizagem da língua materna. Todos sabem que as crianças que vivem em um meio onde se fala uma língua rica estão em condições de construir uma língua rica.

No decurso de nossas pesquisas, ao mesmo tempo teóricas e práticas (Cf. Bibliografia I, II, III), pudemos demonstrar que "mergulhar a criança em águas profundas" facilita-lhe o processo de aprendizagem, ou seja, ao mesmo tempo o processo de abstração, de generalização e de transferência.

Trabalhos posteriores permitiram-nos analisar mais detidamente o processo de abstração, no qual chegamos a distinguir seis etapas diferentes. O presente estudo limitar-se-á a apresentar e ilustrar, através de exemplos tirados da lógica e da geometria, estas diferentes etapas, que devemos evidentemente levar em conta no planejamento do ensino da Matemática, se quisermos que todas as crianças tenham acesso a ele, se quisermos evitar fechar as portas das ciências matemáticas à maior parte das pessoas, como acontecia antigamente e como acontece ainda na maior parte dos casos.

Primeira etapa MEIO

A noção de meio parece-nos fundamental, uma vez que, em certo sentido, toda aprendizagem equivale a um processo de adatação do organismo ao seu meio. Dizer que uma criança, um adulto ou mesmo um animal ou, de maneira geral, que um organismo qualquer aprendeu alguma coisa significa que esse organismo, esse adulto ou essa criança conseguiu modificar seu comportamento com relação a determinado meio. Na fase anterior à aprendizagem, o organismo estava mal adatado a uma determinada situação, a um determinado meio, mas, graças à aprendizagem, o organismo pôde adatar-se a tal ponto que o indivíduo se tornou capaz de dominar as situações que se lhe apresentam nesse meio. Levando em conta esse aspecto de adatação, de que se reveste toda e qualquer aprendizagem, parece razoável apresentarmos à criança um meio ao qual possa adatar-se. É a esse processo de adatação a um meio, que os pedagogos chamam, de modo geral, aprendizagem.

Mais precisamente: a adatação dá-se durante uma fase que podemos chamar de fase do jogo livre. Todos os jogos infantis representam uma espécie de exercício que permite à criança adatar-se a situações que terá de encontrar em sua vida futura. Ora, se alguém se propõe ensinar lógica a uma criança, parece necessário que a faça defrontar-se com situações que a levem a formar conceitos lógicos. Se nos ativermos ao exemplo da lógica, precisaremos reconhecer que, de modo geral, o meio em que vive uma criança não comporta *atributos*

que consideramos *lógicos*. Torna-se necessário, pois, inventar um meio artificial. Em contato com esse meio, a criança será levada, paulatinamente, a formar conceitos lógicos, de forma mais ou menos sistemática. Tal meio poderá ser constituído, eventualmente, do universo dos blocos lógicos. Um jogo de blocos lógicos compõe-se de peças de madeira ou de plástico nas quais fazemos variar, sistematicamente, as seguintes variáveis: cor, forma, espessura e tamanho. Não é necessário, naturalmente, limitarmo-nos a essas quatro variáveis. Podemos fazer variar outras. Se quisermos que uma criança dê os primeiros passos no sentido da aprendizagem das noções concernentes ao conceito de potência, será desejável que a coloquemos em um meio adequado. Tal meio poderá ser formado pelos jogos Multibases em que, de acordo com a base, forneceremos certo número de objetos, cujo volume ou cuja superfície vai aumentando, com relação à base escolhida. Se tivermos escolhido a base 3, será necessário fornecer uma peça, que tomaremos como unidade; depois, outras, cujo volume corresponderá a três vezes o da unidade; depois outras, cujo volume corresponderá a nove vezes o da unidade, e assim por diante. Através de uma interação livre com o material a criança dará os primeiros passos em direção à aprendizagem das propriedades das potências. Poderíamos dar um grande número de exemplos semelhantes, para mostrar como é possível criar um meio artificial, destinado à aprendizagem de um conjunto qualquer de noções matemáticas.

Segunda etapa REGRAS

Depois de certo período de adatação, isto é, de jogo, a criança perceberá restrições da situação. Há coisas que não se pode fazer. Há condições às quais é preciso satisfazer antes de se atingirem determinados objetivos. A criança percebe regularidades impostas à situação. Nesse momento, estará pronta para lidar com as restrições que lhe forem artificalmente impostas. Estas restrições chamam-se: "as regras do jogo".

No jogo de xadrez, por exemplo, são absolutamente arbitrárias as propriedades de cada pedra. Não dependem, em nada, da forma ou de outras propriedades físicas das peças. Igualmente, podemos sugerir às crianças jogos com regras: as próprias crianças poderão, uma de cada vez, inventar outras regras, mudar as regras e participar dos jogos correspondentes. Habituar-se-ão, assim, à manipulação dos regulamentos. É claro que, quando pretendermos que uma criança aprenda estruturas matemáticas, teremos de sugerir conjuntos de regras aplicáveis a estruturas matemáticas correspondentes. Os jogos se realizarão através de certo tipo de material, estruturado como o que indicamos acima.

Terceira etapa / Isomorfismo → abstração

É evidente que brincar com jogos estruturados conforme as leis matemáticas inerentes a uma estrutura matemática qualquer não é aprender matemática. Como pode a criança tirar do conjunto desses jogos as abstrações matemáticas subjacentes? O meio psicológico consiste em fazê-la brincar com jogos que possuam a mesma estrutura, apresentando, porém, aspecto muito diferente, para a criança. Assim, ela será levada a descobrir os laços de natureza abstrata que existem entre os elementos de um jogo e os elementos de outro jogo, ambos de estruturas idênticas. É a isto que chamamos "jogo de dicionário", ou, se preferirmos um termo matemático: jogo de "isomorfismo". Assim, a criança destaca a estrutura comum dos jogos e se desembaraça das partes não pertinentes. No emprego dos blocos lógicos, por exemplo, as cores, as formas, etc. são propriedades não pertinentes. Poderíamos empregar outras propriedades, poderíamos até tomar conjuntos de objetos e considerar propriedades de conjuntos ao invés de propriedades de objetos. Não é sequer essencial que haja um número de-

terminado de valores para cada uma das variáveis que introduzirmos no jogo. O importante é que haja diversas variáveis, que cada uma dessas variáveis tenha diversos valores e que a criança possa manipular essas variáveis, escolhendo conjuntos de blocos, conjuntos de conjuntos ou, de modo geral, conjuntos de elementos quaisquer, de forma que os elementos possam ser distinguidos uns dos outros pela percepção da criança. Assim, os jogos realizados com uma concretização, depois com outra concretização, serão identificados do ponto de vista das estruturas. Será neste momento que ela perceberá o que é "semelhante" nos diversos jogos que praticou, isto é, que realizará uma "abstração".

Quarta etapa / Representação

Naturalmente, a criança não estará ainda em condições de utilizar essa abstração, pois esta não se fixou ainda no espírito dela. Antes de tomar plena consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo de representação. Tal representação lhe permitirá falar daquilo que abstraiu, olhar de fora, sair do jogo ou do conjunto dos jogos, examinar os jogos e refletir a respeito deles. Tal representação poderá ser um conjunto de gráficos, poderá ser um sistema cartesiano, poderá ser um diagrama de Venn ou qualquer outra representação visual ou mesmo auditiva, no caso de crianças que não pensam de uma forma essencialmente visual.

Quinta etapa Descrição da representação → linguagem

Após a introdução de uma representação, ou mesmo de muitas representações da mesma estrutura, será possível examinar essa representação. O objetivo desse exame será perceber as propriedades da abstração realizada. Em uma representação, pode-se facilmente perceber as propriedades principais do ente matemático que se acaba de criar. Isto significa que é necessário, nesta etapa, uma descrição daquilo que representamos. Para uma descrição, há necessidade de uma linguagem e é por isso que a realização das propriedades da abstração deve ser, nesta quinta etapa, acompanhada da invenção de uma linguagem e da descrição da representação, a partir dessa linguagem inventada. Será melhor, se possível, que a criança invente sua própria linguagem e que, mais tarde, as crianças, com o auxílio do professor, discutam entre si se uma das linguagens introduzidas é mais vantajosa que outras. Essa descrição formará a base de um sistema de axiomas. Cada parte da descrição poderá servir de axioma, ou mesmo, mais tarde, de teorema.

Sexta etapa

A maior parte das estruturas matemáticas é de tal forma complexa que possui um número enorme de propriedades. Na descrição do sistema que se inventou, é impossível citar todas as propriedades. É preciso, pois, de certa forma, circunscrever a descrição a um domínio finito, em um número finito de palavras. Isto quer dizer que temos necessidade de um método, para chegarmos a certas partes da descrição, a partir de uma primeira parte, que nos é dada como ponto-de-partida. Esses métodos, que servirão para chegarmos a outras partes da descrição, serão nossas *regras do jogo de demonstração.* As descrições a que chegaremos depois serão chamadas *teoremas do sistema.* Inventamos assim um sistema formal, no qual há *axiomas,* isto é, a primeira parte da descrição, e *regras do jogo.* Poderá haver outras, que serão as *regras lógico-matemáticas* da demonstração. Haverá, depois, teoremas do sistema, que constituem as partes da descrição às quais chegamos a partir da descrição inicial, empregando as regras do jogo.

II

A APRENDIZAGEM DE ALGUMAS NOÇÕES LÓGICAS

Primeira etapa

Vamos mostrar, nesta primeira ilustração, como é possível levar a criança, a partir do jogo livre, a passar pelas etapas que acabamos de descrever, chegando até à sexta etapa, em que será capaz de realizar o jogo de demonstração, isto é, de manipular um sistema formal. Eis, por exemplo, uma situação

Jogo livre com os blocos lógicos

de jogo na qual as crianças de uma classe deverão familiarizar-se com as variáveis: forma, cor, espessura e tamanho, destinada a servir-lhes, mais tarde, à aprendizagem mais adiantada, correspondente à segunda etapa.

Segunda etapa

Estudo da relação entre a conjunção e a intersecção

Não podemos tomar toda a lógica como ilustração. Vamos escolher a aprendizagem de certos elementos, como, por exemplo, os conectivos lógicos. Tomaremos os seguintes: conjunção, disjunção, negação, implicação.

Para introduzir jogos de negação, de conjunção, de disjunção, de implicação, podemos fazer classificações de dupla entrada, com o conjunto de blocos lógicos. Poderemos fazer, por exemplo, um diagrama de Carroll, em que colocaremos, à direita, todos os vermelhos e, à esquerda, todos os não-vermelhos. No alto, colocaremos todos os blocos redondos e, embaixo, todos os não-redondos. Haverá, então, redondos não-vermelhos, redondos vermelhos, não-redondos não-vermelhos e não-rendondos vermelhos, em conjuntos disjuntos distribuídos em um retângulo. Podemos então perguntar às crianças onde estão os blocos que são vermelhos e redondos ao mesmo tempo, onde estão os blocos que são não-vermelhos e redondos ao mesmo tempo, e assim por diante. Podemos, naturalmente, levar um pouco mais longe a aprendizagem e perguntar às crianças onde estão os blocos que não são vermelhos-e-redondos. Isto quer dizer que negamos a propriedade conjunta vermelho-e-redondo.

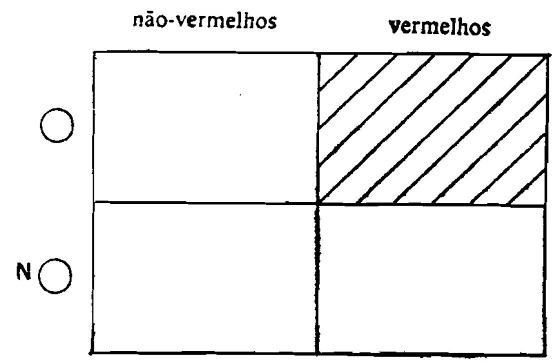


Figura 1

A parte hachurada do *diagrama 1* representa os redondos vermelhos; conseqüentemente, a parte não hachurada representa os que não são vermelhos-e-redondos. A criança aprende, aqui, a fazer corresponder um conjunto a um atributo, e o conjunto complementar ao atributo negado. Podemos, igualmente, tomar dois aros, jogá-los no chão, como indica a figura 2, e pedir às crianças que coloquem todos os blocos vermelhos, e nada mais que os vermelhos, dentro de um dos aros, e todos os blocos redondos, e nada mais que os redondos, dentro do outro aro. Finalmente, as crianças perceberão que os redondos vermelhos estarão na parte do aro destinada aos vermelhos, que faz parte, igualmente, do aro destinado aos redondos. Esta parte representa, de forma espacial, a intersecção, isto é, a conjunção dos atributos "vermelho e redondo", e a intersecção do conjunto dos vermelhos com o conjunto dos redondos.

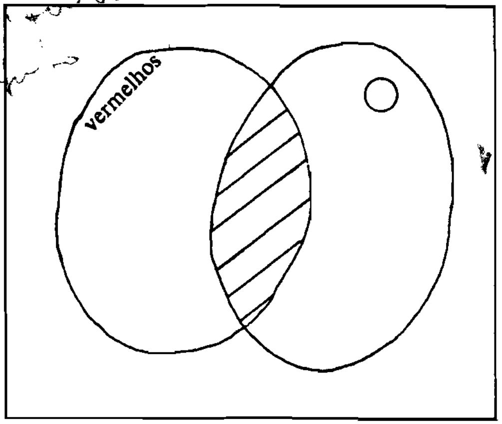


Figura 2

Os blocos não-redondos vermelhos estarão à esquerda, os redondos não-vermelhos estarão à direita, os não-redondos não-vermelhos estarão no exterior dos dois aros. Se, então, alguém perguntar onde estão os blocos que não são ao mesmo tempo vermelhos e redondos, as crianças mostrarão o resto da figura, isto é, a parte da figura que não é a parte comum dos dois aros. Podemos, da mesma forma, considerar uma árvore, como indica a figura 3.

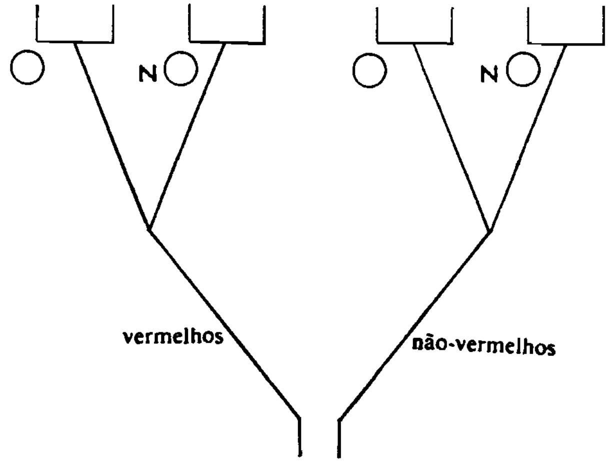


Figura 3

À esquerda, colocaremos, por exemplo, os blocos vermelhos e, à direita, os não-vermelhos; na parte mais alta da árvore, será preciso fazer mais uma divisão entre os redondos e os não-redondos. Coloquemos os redondos à esquerda e os não-redondos à direita, para os vermelhos, repetindo da mesma forma para os não-vermelhos. Em cada extremidade da árvore haverá um conjunto como os que já vimos nos outros métodos de repartição espacial. Haverá, da esquerda para a direita, redondos vermelhos, não-redondos vermelhos, redondos não-vermelhos e não-redondos não-vermelhos.

É evidente que a representação espacial não é adequada a uma classificação lógica. Uma distribuição espacial tem tanto valor quanto outra qualquer. Por isso, a criança terá de desembaraçar-se de um laço muito estreito que existe entre o seu pensamento lógico e a repartição espacial empregada para estimular esse pensamento lógico. Neste ponto, entramos, já, na terceira etapa.

Terceira etapa

Podemos propor às crianças os três jogos descritos na segunda etapa e mandá-las transferir os blocos de uma repartição espacial para outra. Elas perceberão logo que é possível transferir os blocos conjunto por conjunto, isto é, que, se todos os blocos redondos não-vermelhos estão agrupados em determinada parte de uma repartição, eles estarão do mesmo modo agrupados em outra repartição. As crianças poderão, conseqüentemente, apanhar todos os blocos redondos não-vermelhos que foram colocados em um diagrama e transportá-los ao lugar adequado em outro diagrama. Quando perceberem que não dá diferença entre uma repartição e outra, ter-se-ão desembaraçado de uma propriedade não pertinente ao jogo. Existem, porém, naturalmente, outras propriedades não-pertinentes que empregamos como, por exemplo, cores, formas ou outras propriedades particulares. Para que a criança se desembarace destas últimas, será preciso inventar um sistema de conjuntos. Ao invés de tomar blocos lógicos, podemos tomar um conjunto de conjuntos. Tomemos, por exemplo, pedras, lápis, fósforos e rolhas. Estabeleçamos um método para com eles construir conjuntos. Podemos decidir, por exemplo, que será permitido colocar três pedras, duas pedras, uma pedra ou nenhuma pedra em um conjunto. Será permitido, também, colocar dois lápis, um lápis ou nenhum lápis, em um conjunto. Podemos, ainda, colocar um fósforo ou nenhum fósforo, depois uma rolha ou nenhuma rolha em um conjunto. Veremos que será possível formar, assim, 48 conjuntos diferentes, diversamente constituídos de pedras, de lápis, de fósforos e de rolhas, inclusive o conjunto vazio, em que não há nada. Vamos que a variável "pedra" corresponde à variável forma, pois há quatro formas no jogo e há quatro maneiras permitidas de colocar números diferentes de pedras. A variável "lápis" corresponde à cor. Os fósforos e as rolhas correspondem ao tamanho e à espessura. Para inventar um exercício exatamente correspondente ao anterior, poderíamos tomar como vermelhos os conjuntos que compreendem dois lápis e como redondos, por exemplo, os conjuntos em que não há pedras. Teremos dois lápis no conjunto que corresponde a um vermelho; nenhuma pedra num conjunto correspondente a um bloco redondo. Podemos executar, então, os exercícios correspondentes. Não é preciso dizer que a correspondência não é dada, antecipadamente, às crianças. Construímos, inicialmente, o conjunto universal dos conjuntos de pedras, de lápis, de fósforos e de rolhas. Passamos, em seguida, aos jogos de classificação, com este conjunto de conjuntos. Será preciso, naturalmente, que as crianças sejam capazes de manipular conjuntos de conjuntos definidos a partir de propriedades pertinentes a esses conjuntos. Por exemplo: um conjunto de conjuntos será o conjunto dos conjuntos nos quais não há nunca um lápis, ou nos quais há sempre um lápis, ou nos quais há o mesmo número de lápis e de fósforos, e assim por diante. É sempre possível, desta maneira, introduzir um novo universo, levando depois as crianças a fazer os exercícios já descritos e representados nas figuras 1, 2 e 3, mas com um conjunto universal diferente. Dizemos que as crianças já fizeram abstração da repartição do universo particular empregado no problema. Isto significa que elas deverão, por exemplo, associar um conjunto, e somente um, a cada um dos blocos, e um bloco, e somente um, a cada um dos conjuntos. Depois disso, elas poderão fazer, definitivamente, uma correspondência mais sistemática, promovendo a correspondência entre as propriedades dos conjuntos, de um lado, e as propriedades dos blocos, de outro lado.

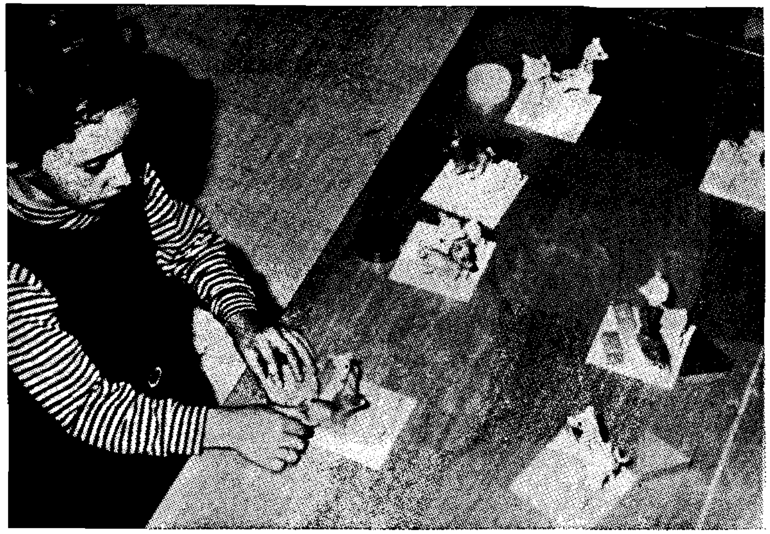


Diagrama de Carroll: Simultaneamente com objetos e conjuntos de objetos. (A figura mostra apenas um quarto do diagrama.)

A determinado momento, será preciso também introduzir a implicação. Uma das maneiras de fazê-lo será tirar um ou outro dos quatro conjuntos construídos para o jogo das conjunções. Se tirarmos, por exemplo, os blocos redondos não-vermelhos, poderemos ver que se escolhermos, no resto, um redondo, ele será vermelho. Igualmente, se escolhermos um não-vermelho, ele será não-redondo. É uma das propriedades condicionais do conjunto que nos resta depois de termos tirado os blocos redondos não-vermelhos. Poderemos ver, ainda, que o conjunto que restou possui uma propriedade disjuntiva. Após termos tirado os blocos redondos não-vermelhos, todos os blocos que restam serão vermelhos ou não-redondos. Evidentemente, quando em lógica dizemos "ou" queremos dizer que a propriedade conjunta também pode ser verificada. Depois de havermos efetuado os jogos de conjunção, disjunção, implicação e negação, depois de termos repartido os conjuntos correspondentes, de muitas maneiras diferentes, empregando conjuntos universais diferentes, teremos atingido certo nível de abstração. Estaremos prontos para abordar o problema da representação, isto é, a quarta etapa.

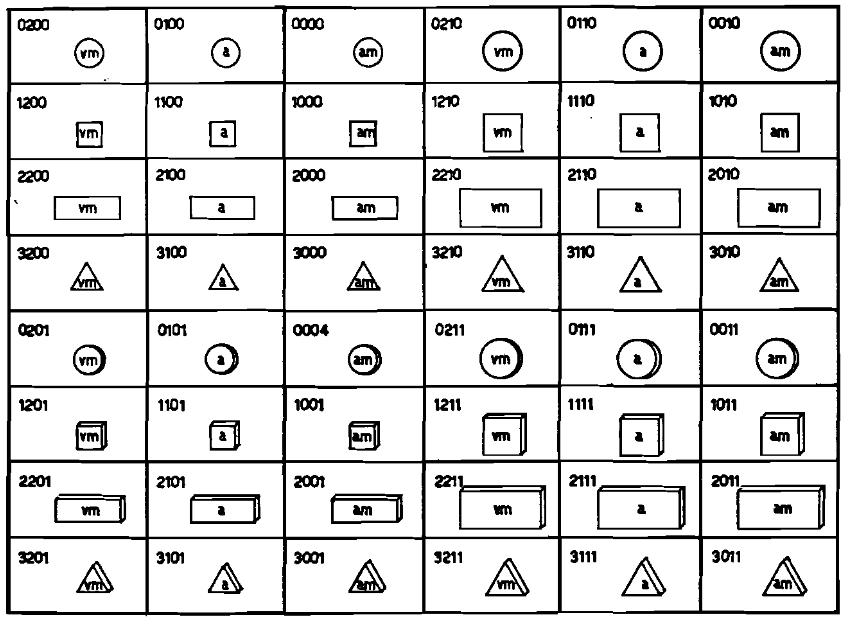


Figura 4

O primeiro algarismo representa o número de pedras, o segundo, o número de lápis, o terceiro, o número de fósforos, o quarto, o de rolhas. Assim, 1.210 quer dizer: uma pedra, dois lápis, um fósforo, zero rolha.

(conjunção ≅ simultaneidade)

Quarta etapa

Como poderemos representar a idéia da conjunção, isto é, a idéia da simultaneidade, à qual chegamos através dos jogos descritos? Será necessária uma representação precisa, que deverá compreender as diferentes concretizações já mencionadas. As redes lógicas oferecem-nos essa representação:

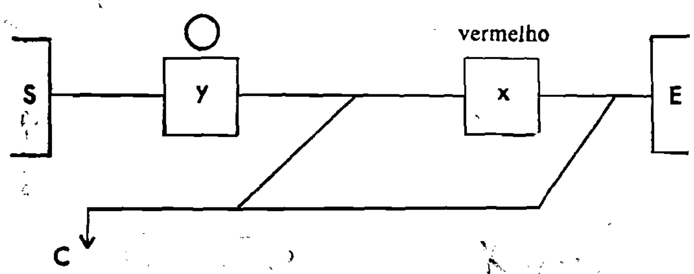


Figura 5

A figura 5 mostra uma entrada, à direita, seguida de uma bifurcação com uma porta que é preciso ultrapassar. Depois, outra bifurcação, seguida de outra porta. Temos já dois caminhos que chegam à esquerda: um caminho, no alto, leva-nos à saída, e o caminho, embaixo, ao complemento do conjunto da saída. Podemos chamá-lo de "refugo". Os elementos do conjunto universal que chegam à saída representam, de maneira concreta, a conjunção de duas propriedades x e y. Esta é a lei que precisamos seguir, na bifurcação que precede uma porta: para que um elemento passe pela porta, será necessário e suficiente que possua a propriedade marcada na porta. No caso dos blocos lógicos, por exemplo, poderíamos colocar a etiqueta "vermelho" em uma porta e a etiqueta "redondo" na outra. Todos os blocos passam pela entrada, mas os vermelhos passarão pela porta x, enquanto os não-vermelhos tomarão outro caminho. Os vermelhos que não forem redondos tomarão o caminho que vai para baixo, enquanto que os vermelhos redondos passarão pela porta y, a porta dos redondos. Tomamos o atributo "vermelho" para o valor da variável x. Tomamos o atributo "rendondo" como valor da variável y. Temos aqui uma boa representação para a conjunção. Faremos, para a disjunção, uma representação semelhante.

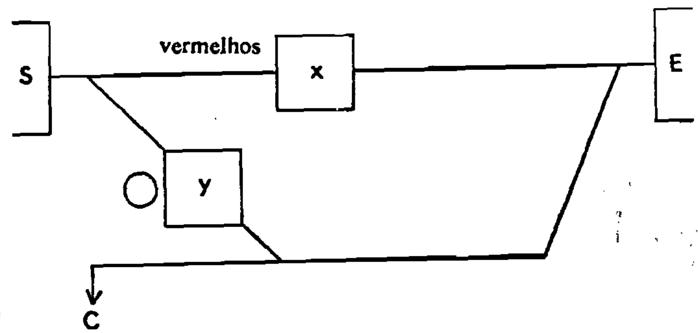


Figura 6

A porta x fica no mesmo lugar, mas a bifurcação leva, agora, para baixo. Veremos que chegarão à saída todos os elementos, e somente os elementos, que possuem a propriedade x ou a propriedade y. O complemento será constituído pelos elementos que não possuem nem a propriedade x nem a propriedade y. No nosso caso, por exemplo, se x quer dizer "vermelho" e se y significa "redondo", todos os vermelhos e todos os redondos chegarão à saída, mas apenas os não-vermelhos e não-redondos chegarão ao complemento. Esta representará a noção de disjunção.

Há duas maneiras de representar a negação. Se, por exemplo, desejássemos que os não-vermelhos ou os redondos chegassem à saída, colocaríamos a porta dos *x* embaixo, ao invés de colocá-la em cima, como, por exemplo, na figura 7.

Na fig. 7, é evidente que todos os *não-x* chegam à saída, e depois, também, todos os *y*. Um *y* é um *não-x*. Os *y* que são *não-x* já estão lá, mas os *y* que são *x* vão passar pela porta *x* e tomarão o caminho que passa pela porta dos *y*.

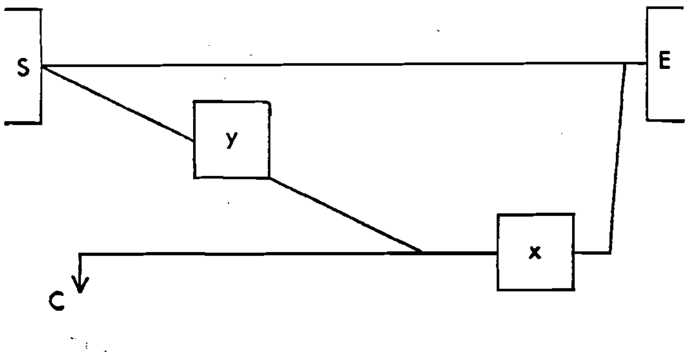


Figura 7

Se desejássemos negar a propriedade *y*, teríamos *y* embaixo, em lugar de o termos no meio, como mostra a figura 8. Aqui, os blocos que constituem o conjunto da saída são *x* ou *não-y*. Podemos ver, facilmente, como se constrói o conjunto reunião dos *não-x* ou dos *não-y*, etc. Vemos, igualmente, na figura 8, que temos em S um conjunto que concretiza, de certa maneira, uma implicação. No conjunto de saída da figura 8, se procurarmos um *y*, ele deverá ser um *x*, porque os *y* que não são *x* chegaram evidentemente ao conjunto complementar (refugo). Assim, "*não-y* ou *x*", que é verdadeiro para o conjunto de saída da figura 8, pode ser igualmente caracterizado por "se *y*, então *x*", ou talvez ainda melhor: "a condição *y* implica em x".

Rede lógica para a negação de uma conjunção. Lei de De Morgan.

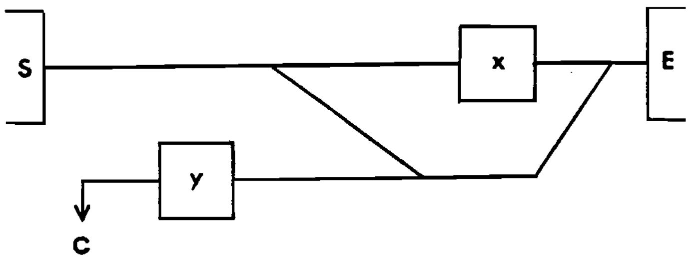


Figura 8

Para representar uma negação que nega todo o precedente, podemos empregar uma espécie de cruzamento como o indicado pela figura 9. Se o cruzamento não fosse introduzido no extremo da rede de caminhos da figura 9, a saída seria o conjunto no qual todos os elementos são *"não-y* ou *não-x".* Após a negação de tudo isso, temos um conjunto em que é verdadeiro para todos os elementos que eles não são *"não-y* ou *não-x".* Observando a figura 5, podemos ver imediatamente que os mesmos elementos chegam à saída, tanto na figura 5 como na figura 9, acontecendo o mesmo para os dois complementos. Isto quer dizer que a rede da figura 9 reparte o conjunto universal entre o conjunto de saída e o conjunto refugo, da mesma maneira que a rede de caminhos representada na figura 5. A esta altura, chegamos, já, à consideração de certas propriedades da

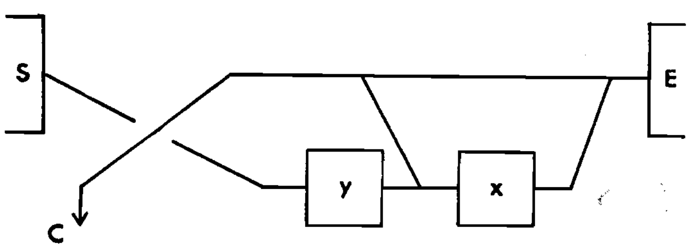


Figura 9

representação dada. Chegamos à consideração de certas *relações de equivalência* entre redes. Poderíamos dizer, por exemplo, que a rede 5 é equivalente à rede 9. Dizemos que duas redes são equivalentes quando ambas fazem a mesma repartição do conjunto universal no conjunto de saída e no conjunto refugo, respectivamente. Estamos, neste ponto, muito próximos da quinta etapa, pois iniciamos, já, uma espécie de descrição. Introduzimos, no interior do sistema de representação, uma relação de equivalência, tendo abordado assim o problema destinado à quinta etapa.

Quinta etapa

Para descrever as equivalências entre as redes, teríamos necessidade de inventar nomes para as diversas partes das redes que representam, de maneira gráfica, as noções lógicas já aprendidas nas etapas anteriores. Tomemos os diagramas 5, 6, 7, 8 e 9, por exemplo. Tentemos descrever, concisamente, as propriedades conjuntivas, disjuntivas dos conjuntos que encontramos à saída destas figuras.

À saída de 5, todos os elementos são, ao mesmo tempo, *y* e *x*. Precisamos de um símbolo para "ao mesmo tempo". Podemos tomar, naturalmente, qualquer símbolo, como K, por exemplo, que é o símbolo adotado pelos poloneses. Então, K*yx* significará a propriedade "ao mesmo tempo *y* e *x*".

À saída da figura 6, todos os blocos são *y* ou *x*. Precisamos de um símbolo para "... ou ...", isto é, para o fato de existir uma alternativa no conjunto de saída, podendo aparecer *x* ou *y* nesse conjunto. Podemos empregar A para essa alternativa. Escreveremos A*yx*.

À saída da figura 7, todos os blocos são *y* ou *não-x*. A alternativa está, então, entre os *y* e os *não-x*. A saída da figura 7 se caracterizará, então, assim: A*y*N*x*. *A saída da figura 8* será, do mesmo modo, caracterizada por AN*yx*.

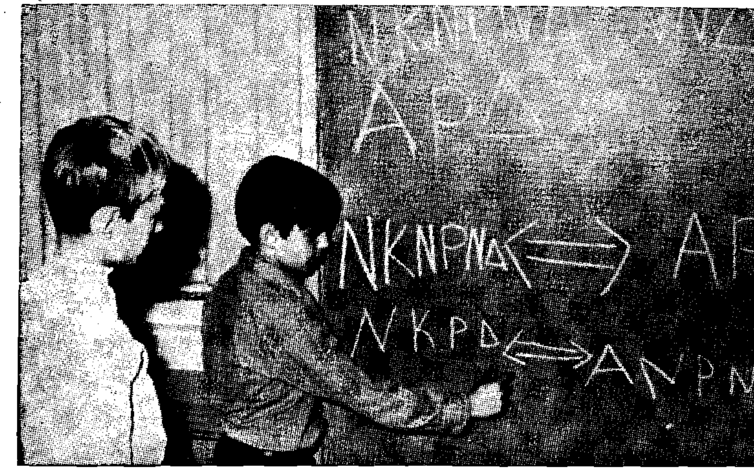
Na figura 9, temos um *não.* O não, isto é, a negação, refere-se à disjunção dos *não-y não-x,* isto é, quer dizer que se não houvesse cruzamento no extremo da rede, teríamos $ANyNx$. Mas, sendo estabelecido que há o cruzamento, precisamos escrever ainda um N à esquerda, o que nega toda a propriedade $ANyNx$. Teremos, então: $NANyNx$.

Vimos, por exemplo, que Kyx é equivalente a $NANyNx$. Será preciso introduzir um símbolo para a equivalência. Podemos escolher, por exemplo, o símbolo $\equiv$ ou uma flecha, ou duas flechas. Escreveremos $Kyx \equiv NANyNx$. Chegamos a uma descrição parcial do sistema de representação introduzido. Vemos, por exemplo, na figura 5, que, se trocarmos x e y entre si, teremos, mesmo assim, os mesmos elementos à saída. Poderíamos, então, escrever $Kyx \equiv Kxy$. Na figura 6, podemos igualmente substituir x por y e y por x. Isto quer dizer que podemos escrever: $Axy \equiv Ayx$.

Observemos a figura 7. Se substituirmos y por x e x por y, teremos $AxNy$. Veremos imediatamente que o conjunto à saída não se constitui dos mesmos elementos de que se constituia há pouco. Então, na figura 7, se substituirmos x por y e y por x, mudaremos o conjunto de saída, ao passo que, nas figuras 5 e 6, era possível trocar x por y e y por x sem mudar o conjunto de saída. Isto significa que fomos levados à propriedade comutativa da conjunção, na figura 5, e à propriedade comutativa da disjunção, na figura 6.

Observemos um pouco a figura 8. Vimos que, no interior do conjunto de saída, a condição y implica na propriedade x. Poderíamos simbolizar este enunciado condicional, escrevendo Cyx. Por outro lado, vemos muito bem que na figura 8, à saída, todos os elementos são ou um *não-y,* ou um x. Isto quer dizer que o conjunto de saída pode ser igualmente caracterizado pelo símbolo: $ANyx$.

Vemos que: $Cyx \equiv ANyx$.



As crianças verificam que o conjunto de saída de uma rede é igual ao conjunto de saída de outra. Os atributos correspondentes são equivalentes.

Do ponto de vista formal, vemos que C pode ser substituído por AN, e vice-versa. Efetivamente, poderíamos prescindir do símbolo C, empregando sempre o símbolo composto AN. Sabendo que os enunciados condicionais desempenham, na lógica, papel fundamental, introduzimos assim mesmo um símbolo próprio para a condição. "Condição y implica em x" é chamada uma *implicação.* Dizemos que y implica em x porque a condição y dá o resultado x no conjunto de saída considerado.

Estamos, neste ponto, em condições de estabelecer alguns métodos de raciocínio válidos. Consideramos apenas redes equivalentes. Isto significa que podemos agora introduzir raciocínios, mas raciocínios cuja ordem pode sempre ser invertida. Se, por exemplo, eu sei que Kyx, posso deduzir $NANyNx$. Do mesmo modo, se sei que $NANyNx$, posso deduzir Kyx. Em linguagem mais comum, poderíamos expressar a mesma coisa dizendo que se eu sei que uma coisa e outra coisa são, ao mesmo tempo, verdadeiras, sei também que não é verdade que a primeira coisa não é verdadeira ou que a segunda coisa não é verdadeira, e vice-versa. Existem ainda casos de raciocínio cuja ordem não pode ser invertida. Podemos encontrar estes métodos de raciocínio, comparando os conjuntos de saída que encontramos no extremo das representações correspondentes. Tomemos, por exemplo, a saída da figura 6 e a saída da figura 5. Digamos que alguém me informa que certo elemento procurado está na saída da figura 5. Não tenho, a respeito desse elemento, outras informações. Posso deduzir que esse elemento está também na saída de 6 ou não? Isto equivale a indagar se todo elemento que chega à saída de 5 chega também à saída de 6. À saída de 5 chegam todos os *y* que são também *x*. Que acontece com os *x* que são ao mesmo tempo *y*? Todos os *x* chegam à saída da figura 6 e podemos ver claramente que os *x* que são ao mesmo tempo *y* são, evidentemente, também *x*. Isto significa que se encontrarmos um elemento à saída de 5, nós o encontraremos também à saída de 6. Podemos, pois, estabelecer um método de raciocínio: dado K*xy*, posso deduzir A*yx*. Veremos, facilmente, que o raciocínio, no sentido inverso, não seria válido, pois, se encontrarmos um elemento à saída da figura 6, será perfeitamente possível que não o encontremos à saída da figura 5. Podemos ter, por exemplo, *y* que não são *x*, à saída de 6, enquanto que tais elementos jamais estarão à saída de 5. É preciso distinguir claramente os raciocínios reversíveis dos não-reversíveis. Dado K*yx*, podemos deduzir A*yx*, mas não o inverso. Se, por exemplo, K*yx* for verdadeiro, podemos deduzir K*xy* e vice-versa. Podemos, portanto, acumular certo número destas propriedades de equivalência e de deduções irreversíveis que farão parte da quinta etapa, isto é, da etapa descritiva, durante a qual tentamos descrever as propriedades da representação, através de redes lógicas, das noções lógicas adquiridas anteriormente. É claro que não é possível descrever todas as propriedades das redes lógicas, pois existe um número infinito delas. E assim chegamos à consideração da sexta etapa, durante a qual devemos procurar métodos de derivação, que nos permitirão ir de certo conjunto de propriedades a qualquer outra propriedade da rede lógica. Isto nos dará um sistema formal para a própria lógica. Do ponto de vista pedagógico, não há nenhuma necessidade de compreender a lógica inteira, num estudo como o que se faz na sexta etapa. Pode-se perfeitamente estabelecer pequenas partes, isto é, sistemas formais parciais, no interior dos quais se pode operar de maneira formal.

Sexta etapa

Para ilustrar o gênero de atividade ao qual se pode chegar durante esta etapa, daremos aqui um pequeno sistema formal. Para executar uma determinada demonstração, vamos admitir as deduções ou raciocínios reversíveis seguintes:

(1) — C*xy* se e somente se AN*xy*

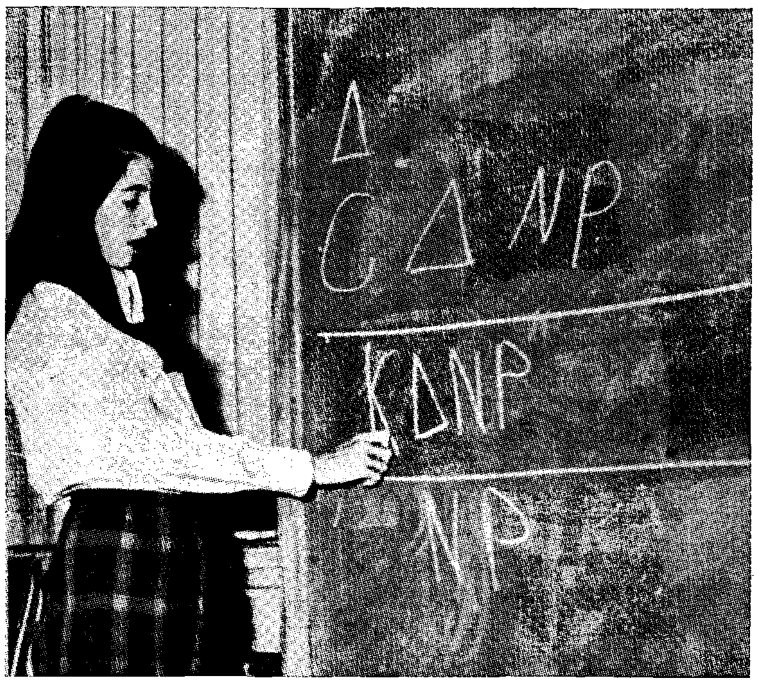
(2) — A*xy* se e somente se A*yx*

(3) — *x* se e somente se NN*x*.

Vamos admitir ainda uma dedução não-reversível, que compreende duas premissas:

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{C}xy \text{ — primeira premissa} \\ \text{C}yx \text{ — segunda premissa} \\ \text{Podemos concluir C}xz. \end{array} \right.$$

Vamos agora deduzir daí outro método de raciocínio. Dado C*xy*, por exemplo, vamos mostrar que podemos deduzir daí: CN*y*N*x* e vice-versa. Se utilizarmos apenas métodos de raciocínio, 1, 2 e 3, cada passo pode ser invertido. Uma vez, porém, que empreguemos o método 4, o raciocínio se tornará irreversível. Dado C*xy*, podemos daí deduzir, pelo método 1 AN*xy*. Podemos então empregar o método 2, que nos permite inverter os dois termos da disjunção. Isto quer dizer que podemos colocar A*y*N*x*. Empregaremos então o método 3, substituindo *y* por NN*y*. Teremos ANN*y*N*x*. Empregaremos ainda o método 1 e escreveremos CN*y*N*x*. Já demonstramos que, dado C*xy*, temos CN*y*N*x*. Isto se chama método de raciocínio por *contraposição*.



A descoberta do "modus ponens".

CNy Nx

Tomemos agora outro raciocínio, no qual intervém o método 4. Consideremos duas premissas:

C*xy* — primeira premissa

A*xz* — segunda premissa.

Precisamos demonstrar A*yz*. Temos, já, as premissas: C*xy*, A*xz*. Pelo raciocínio de tipo 3, A*xz* pode ser substituído por ANN*xz*. Pelo raciocínio de tipo 1, a última fórmula pode

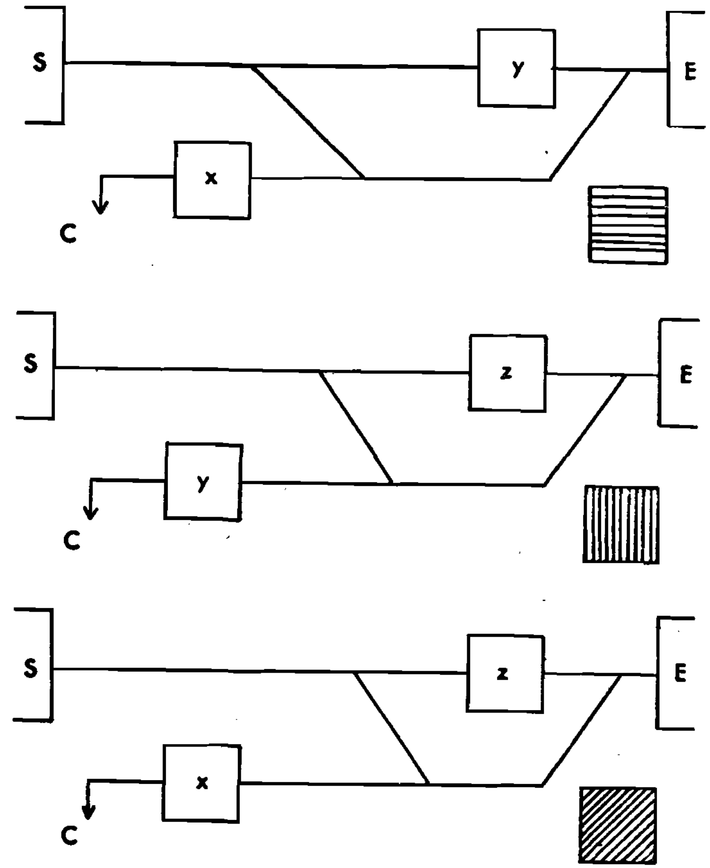


Figura 10 A

ser substituída por CN*xz*. Pelo método de contraposição aplicado a C*xy*, que acabamos de demonstrar, podemos estabelecer CN*y*N*x*. Tomemos agora CN*y*N*x* como nossa primeira premissa, CN*xz*, como nossa segunda premissa, e apliquemos o raciocínio de tipo 4. Teremos a conclusão CN*yz*. Apliquemos agora o raciocínio de tipo 1. Teremos ANN*yz*. Apliquemos então o tipo 3, e teremos A*yz*. Isto demonstra que das duas premissas iniciais, C*xy* e A*xz*, podemos deduzir A*yz*.

Vemos que chegamos à etapa das demonstrações formais. Encontramos descrições parciais das redes lógicas que foram formuladas pelos métodos de raciocínio 1, 2 e 3, bem como 4. Empregamo-los depois para deles deduzir outros métodos de raciocínio. Os outros métodos de raciocínio, que não estão incluídos na descrição inicial parcial, podem ser chamados de *teoremas lógicos*. Falta mostrar que fizemos bem em propor o método de raciocínio tipo 4. Sèria preciso ver claramente que, se um elemento pertence ao conjunto de saída da rede AN*xy*, e este ao da rede AN*yz*, ele pertence também ao conjunto de saída da rede AN*xz*.

Na figura 10, vemos o diagrama de C*xy*, seguido do diagrama de C*yz* e, finalmente, a rede de C*xz*. O diagrama de Carroll vem depois e, neste, o conjunto das saídas de C*xy* está

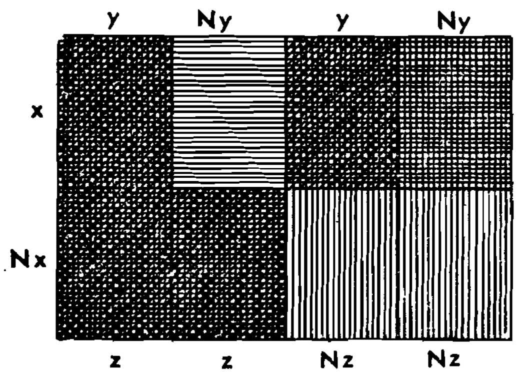


Figura 10 B

hachurado horizontalmente e o de C*yz* hachurado verticalmente. O conjunto que corresponde a C*xz* está hachurado obliquamente. Vemos que, se um elemento pertence ao conjunto de saída de C*xy*, ao mesmo tempo que ao conjunto de saída de C*yz*, ele deve pertencer à parte do diagrama de Carroll que está hachurada ao mesmo tempo horizontal e verticalmente. Vemos que cada elemento hachurado dessas duas formas pertence ao conjunto de saída C*xz*. Conseqüentemente, o raciocínio de tipo 4 é válido e pode ser aceito.

Teremos visto, ainda, que, na aplicação dos raciocínios 1, 2, 3 e 4, não tomamos exatamente os mesmos símbolos que foram colocados nas fórmulas que explicam os raciocínios em questão. Será necessário, portanto, para ser formal, acrescentar uma regra do jogo que nos permita substituir cada *x*, cada *y* e cada *z*, em tal fórmula, por outra fórmula qualquer, bem escrita. Fica claro que uma fórmula bem escrita segue as leis da ortografia da escrita lógica inventada. Por exemplo: *x*, *y* e *z* são palavras, por assim dizer, bem escritas. Uma palavra bem escrita pode ser precedida de N e teremos também uma palavra bem escrita. Podemos, ainda, escrever duas palavras bem escritas, uma após a outra, fazendo preceder esta série de símbolos, ou por A, ou por C, ou por K. Todas as palavras bem escritas seguem estas leis de composição. Isto quer dizer que, ao invés de A*xy* premissa, A*yx* conclusão, poderíamos escrever, por exemplo, A*x*N*z*, premissa AN*zx*, conclusão. Isto quer dizer que *y* pode ser substituído por N*z*, por exemplo, ou por qualquer outra fórmula que seja uma palavra bem escrita. Existem, pois, dois aspectos no formalismo: há o aspecto da escrita, que deve ser levado em consideração, isto é, existem métodos próprios para simbolizar os elementos do sistema. São as leis da ortografia do sistema. Existem, depois, as leis de transformação, que correspondem às leis sintáticas de nossa linguagem artificial. Esboçamos a passagem, a partir do jogo livre, isto é, da adatação inicial da criança a um meio especialmente construído para a aprendizagem das estruturas matemáticas e lógicas, até a etapa em que ela é capaz de manipular sistemas formais. É muito importante observar que, na elaboração dos programas, não podemos, de maneira nenhuma, pretender que a esta ou àquela etapa da aprendizagem, a criança haja adquirido este ou aquele conceito, relativo a tais e tais títulos do programa. Os programas são, em geral, elaborados de uma forma que supõe critérios capazes de dizer se a criança viu ou não viu certo aspecto ou certa parte do conteúdo do programa. Acabamos de ver que a idéia da conjunção, por exemplo, pode ser desenvolvida no início da aprendizagem da criança, até mesmo nas classes maternais, continuando até a idade de 11 ou 12 anos, quando a criança estará apta a manipular sistemas formais. Não podemos, realmente, dizer qual o momento, durante esse período, em que a criança efetivamente apreende a noção de conjunção. Conseqüentemente, um programa redigido ponto por ponto é completamente irracional, do ponto de vista das realidades psicológicas da aprendizagem.