Gabarito — 1^a Prova — Eletromagnetismo II — 2019

---

1 — Um cabo coaxial consiste de dois cilindros condutores concêntricos de raio a e b. Dentro desse cabo ($a < \rho < b$) ondas eletromagnéticas se propagam na direção z. Durante as aulas analisamos a propagação de ondas nessa guia de ondas: estudamos os modos TM, nos quais $B_z = 0$, e vimos que os modos radiais são descritos em termos de funções de Bessel.

Porém, na verdade as ondas mais simples que se propagam nessa guia de ondas são no modo TEM (transverso elétrico e magnético), em que $E_z = B_z = 0$. Nesse caso os modos radiais são bem mais simples. Neste problema vamos analisar o modo fundamental das ondas TEM que se propagam no cabo coaxial.

Atenção: neste problema é muito mais simples resolver para os potenciais ϕ e $\vec{A}$, utilizando o calibre de Lorentz, no qual $c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$. Nesse calibre as equações de onda para os potenciais têm a mesma forma que as equações de onda para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ — veja o formulário.

(a) Assuma que o potencial elétrico pode ser escrito na forma:

$$\phi = V(\rho, \varphi)\, e^{-i(k_z z - \omega t)} .$$

Escreva a equação de onda para o potencial e determine a equação diferencial que $V(\rho, \varphi)$ deve obedecer.

(b) Vamos considerar apenas o *modo fundamental*, que (1) não tem dependência azimutal (em φ), e (2) se propaga com frequência $\omega = c\, k_z$. Calcule $V(\rho)$ para esse modo fundamental.

(c) Imponha as condições de contorno para o potencial – lembre-se que, em termos do potencial, as condições de contorno apropriadas correspondem a impor a continuidade do potencial. Use essas condições para determinar as constantes de integração. (Por simplicidade, imponha $\phi = 0$ em $\rho = b$.)

(d) Agora imponha o calibre de Lorentz e use essa condição para determinar $\vec{A}$.

(e) Calcule as expressões para $\vec{E}$ e $\vec{B}$, verificando que os campos obedecem as condições de contorno.

Estimativa de tempo para esta questão: 45 min.

Resposta:

(a) A equação de onda para ϕ é, conforme o formulário:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0$$

Substituindo $\phi = V(\rho, \varphi) e^{-i(k_z z - \omega t)}$, e utilizando o Laplaciano em coordenadas cilíndricas do formulário, temos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - k_z^2 V = -\frac{\omega^2}{c^2} V .$$

(b) Tomando $V = V(\rho)$, e $k_z^2 = \omega^2/c^2$, temos simplesmente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

A solução dessa equação é $V = V_0 \log \rho/\rho_0$, onde V_0 e ρ_0 são constantes arbitrárias.

(c) Agora, impondo a condição de contorno de que $V = 0$ em $\rho = b$, temos:

$$V = V_0 \times \begin{cases} \log(a/b) & \rho \le a \\ \log(\rho/b) & a \le \rho \le b \\ 0 & \rho \ge b \end{cases}$$

(d) Pelo calibre de Lorentz temos que $0 = c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \partial\phi/\partial t = c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + i\omega\phi$. Nesse momento, lembre-se que no modo TEM temos que o campo magnético na direção z é nulo, e que $\vec{b} = \nabla\times\vec{A}$. Além disso, tenha em mente a solução retardada para o potencial-vetor em termos da densidade de corrente (última equação do formulário). Fica então evidente que a única componente de $\vec{A}$ é na direção z, e nesse caso, pela dependência de $\phi(z,t)$ temos que $c^2(-ik_z)A_z + i\omega\phi = 0$, ou seja:

$$A_z = \frac{\omega}{c^2\,k_z}\phi = \frac{1}{c}\phi\,.$$

(e) Primeiro, para o campo elétrico temos:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\
&= -\hat{z}\left[\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right] - \hat{\rho}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + 0\right] \\
&= -\hat{\rho}\,V_0\times\begin{cases} 0 & \rho\le a \\ \frac{1}{\rho} & a\le\rho\le b \\ 0 & \rho\ge b \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

Claramente o campo obedece as condições de contorno, $\vec{E}_{||} = 0$ nas superfícies, já que $E_z = E_\varphi = 0$.
Para o campo magnético usamos a fórmula do rotacional em coordenadas cilíndricas que está no formulário, obtendo:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\hat{\varphi}\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\
&= -\hat{\varphi}\frac{V_0}{c}\times\begin{cases} 0 & \rho\le a \\ \frac{1}{\rho} & a\le\rho\le b \\ 0 & \rho\ge b \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

Também neste caso é evidente que a condição de contorno, $\vec{B}_\perp = 0$ nas superfícies, já que $B_\rho = 0$.
Note que o vetor de Poyting aponta na direção correta, já que $\vec{S}\sim\vec{E}\times\vec{B}\sim(-\hat{\rho})\times(-\hat{\varphi})\sim\hat{z}$, o que significa que o fluxo de energia se dá na direção $+z$.

2 — Um fio infinito, muito fino, não possui carga elétrica nem carrega corrente alguma em $t<0$. A partir do instante $t=0$ o fio começa a carregar uma corrente acelerada, ou seja, $I(t) = \dot{I}_0\,t\,\theta_H(t)$ [1]. Sabendo que o fio passa pela origem do sistema de coordenadas ($x=y=0$, $\rho=0$) e está orientado na direção z, podemos escrever a *densidade de corrente* como:

$$\vec{J}(\vec{x}',t') = \dot{I}_0\,t'\,\theta_H(t')\;\times\delta(x')\,\delta(y')\,\hat{z} = \dot{I}_0\,t'\,\theta_H(t')\;\times\;\frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'}\,\hat{z}\,.$$

(a) Em que instante de tempo um observador situado a uma distância ρ do fio vai medir os primeiros campos eletromagnéticos gerados por essa corrente que cresce a partir de $t=0$? Esse resultado depende de z?

(b) Mostre que o potencial vetor $\vec{A}$ pode ser escrito como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0\dot{I}_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\;\frac{(t-R/c)\;\theta_H\,(t-R/c)}{R}\,,$$

onde $R = \sqrt{\rho^2+\Delta Z^2}$, com $\Delta Z = z'-z$.

[1] A função theta de Heaviside (ou função-degrau) é definida como:

$$\theta_H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Além disso, $d\theta_H(x)/dx = \delta_D(x)$.

(c) Agora mostre que as condições implícitas em $\theta_H(t - R/c)$ implicam que $\Delta Z^2 < c^2t^2 - \rho^2$ **e** que $t > \rho/c$. Como consequência disso, o resultado do item anterior pode ser reescrito como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi}\hat{z} \times \theta_H\left(t - \rho/c\right) \int_{-\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}^{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} d(\Delta Z)\, \frac{t - R/c}{R} \, .$$

(d) Utilizando a integral $\int dx\, \frac{a+\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} = x + a \ln\left(x + \sqrt{b^2+x^2}\right)$, obtenha o potencial vetor $\vec{A}(\rho, t)$.

(e) Tome o limite $ct \gg \rho$, e obtenha o campo magnético nesse limite, incluindo magnitude, direção e sentido.

(f) Nesse mesmo limite ($ct \gg \rho$), obtenha o campo elétrico $\vec{E}$.

(g) Ainda trabalhando no limite dos dois itens anteriores, qual a direção e o sentido do vetor de Poynting? Faça um diagrama dos vetores do campo elétrico, magnético e de Poynting.

Estimativa de tempo para esta questão: 1h15min.

Resposta

(a) Evidentemente, o primeiro sinal só vai chegar a uma distância ρ do fio num instante $\Delta t_0 = \rho/c$. Além disso, o sistema é invariante por translações na direção z, portanto nada neste problema depende da coordenada z.
(b) Podemos reescrever a solução retardada para o potencial-vetor em coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int_0^\infty d\rho'\, \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\delta(t' - t_R)}{R} \times \dot{I}_0\, t'\, \theta_H(t') \times \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'}\, \hat{z} \\
&= \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{t - R/c}{R} \times \theta_H(t - R/c) \, ,
\end{aligned}$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}\,'| \to \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$. Neste momento você pode também tomar $z = 0$, já que o problema é invariante nessa direção (a resposta não pode depender da sua escolha de z).
(c) Agora, como visto no item (a), os campos eletromagnéticos só surgem numa posição ρ quando $t \geq \rho/c$, o que pode ser descrito em termos de uma função $\theta_H(t - \rho/c)$. Por outro lado, pela condição da função-degrau na integral acima temos que $ct - \sqrt{\rho^2 + z'^2} \geq 0$, ou seja, $c^2t^2 \geq \rho^2 + z'^2$, o que implica que $z'^2 \leq c^2t^2 - \rho^2$. Isso implica em limites inferior e superior para a integral na equação acima, que fica então:

$$\vec{A}(\rho, t) = \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2c} \times \theta_H(t - \rho/c) \times \int_{-\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}^{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} dz'\, \frac{ct - \sqrt{\rho^2 + z'^2}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \, .$$

(d) Agora, podemos usar a primitiva da integral, dada no enunciado desse item, e obter diretamente:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\rho, t) &= \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2c} \times \theta_H(t - \rho/c) \times \left[c\,t\, \log\left(z' + \sqrt{\rho^2 + z'^2}\right) - z' \right]_{z'=-\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}^{z'=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} \\
&= \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2c} \times \theta_H(t - \rho/c) \times \left[c\,t\, \log\left(\frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}{ct - \sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \right) - 2\sqrt{c^2t^2 - \rho^2} \right] \\
&= \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2c} \times \theta_H(t - \rho/c) \times \left[2\,c\,t\, \log\left(\frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}{\rho} \right) - 2\sqrt{c^2t^2 - \rho^2} \right] \, .
\end{aligned}$$

(e) No limite $t \gg \rho/c$ temos que:

$$\vec{A}(\rho, t) \simeq \hat{z}\, \frac{\mu_0\, \dot{I}_0}{2c} \times \left[2\,c\,t\, \log\left(\frac{2ct}{\rho} \right) - 2\sqrt{c^2t^2 - \rho^2} \right] \, .$$

Agora, claramente a única dependência espacial do potencial-vetor é $\vec{A} = A_z(\rho)\hat{z}$. Portanto, pela expressão do formulário para o rotacional em coordenadas cilíndricas temos:

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= -\hat{\varphi}\,\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\
&\simeq -\hat{\varphi}\,\mu_0\,\dot{I}_0\,\left[t\,\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2/c^2}}\right] \simeq -\hat{\varphi}\,\mu_0\,\dot{I}_0\,t\,\frac{1}{\rho}\,,
\end{aligned}
$$

onde desprezados o segundo termo na segunda linha devido ao limite $t \gg \rho/c$. Note que esse é o resultado esperado mesmo no limite não-relativístico, via Biot-Savart.

(f) Agora nesse mesmo limite vamos obter o campo elétrico. Note que neste problema a densidade de cargas é nula, e portanto o potencial elétrico ϕ é também nulo. Logo, neste caso o campo elétrico vem integralmente do potencial-vetor:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \hat{z}\,\frac{\partial A_z}{\partial t} \\
&\simeq \hat{z}\,\mu_0\,\dot{I}_0\,\left[1\times\log\left(\frac{2ct}{\rho}\right) + t\times\frac{1}{t} - \frac{t}{\sqrt{t^2-\rho^2/c^2}}\right] \\
&\simeq \hat{z}\,\mu_0\,\dot{I}_0\,\log\left(\frac{2ct}{\rho}\right)\,.
\end{aligned}
$$

(g) O fluxo de energia aponta na direção radial: a radiação eletromagnética leva energia do fio ($\rho = 0$) para longe. E de fato, $\vec{S}_P \sim \vec{E}\times\vec{B} \sim (\hat{z})\times(-\hat{\varphi}) = +\hat{\rho}$ — como deveria ser.

FORMULÁRIO

Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Onda (calibre de Lorentz):

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\\ \phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

Condições de contorno na interface de condutores: $\vec{E}^{\parallel} = 0$ e $\vec{B}^{\perp} = 0$.

Laplaciano em coordenadas cilíndricas, aplicado numa função *escalar*:

$$\vec{\nabla}^2\Psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

Operador $\vec{\nabla}$ aplicado a um vetor em coordenadas cilíndricas, $\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\varphi \hat{\varphi} + v_z \hat{z}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \, \rho \, v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \, v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \, v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{\rho} \left(\frac{\partial \, v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \, v_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial \, v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \, v_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \, (\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \, v_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

Solução da equação de onda com fontes em termos da função de Green retardada (calibre de Lorentz):

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int d^3x' \, \frac{\delta(t' - t_R)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \rho(t', \vec{x}\,')$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int d^3x' \, \frac{\delta(t' - t_R)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \vec{J}(t', \vec{x}\,')$$

$$t_R = t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}\,'|$$