PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2019 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 1

1ª Questão (3,0 pontos)

(a) Chamando o momento gerado pela tração no fio de M_f e o momento gerado pelas tensões viscosas no mancal de M_m, e considerando que o momento M seja motor, o diagrama de corpo livre do eixo fornece $M = M_m - M_f$.

M_m é dado por $M_m = \tau_m A_m D_i/2$, sendo que a tensão de cisalhamento no mancal é:

$$\tau_m = \mu \frac{\omega D_i/2}{(D_e - D_i)/2} = \mu \frac{\omega D_i}{(D_e - D_i)} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

A rotação do eixo é dada por $\omega = \dfrac{v}{d/2}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$, portanto:

$$M_m = \mu \frac{2vD_i}{d(D_e - D_i)} (\pi D_i L) \frac{D_i}{2} = \frac{\pi \mu v L D_i^3}{d(D_e - D_i)} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

M_f é dado por $M_f = Fd/2$, onde F é a tração no fio. Para calcular o valor de F, fazemos o diagrama de corpo livre no corpo que desce, que resulta em $F = P - \tau A$, com:

$$\tau = \mu \frac{v}{(D_e - D_i)/2} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Portanto,

$$F = P - \mu \frac{2v}{(D_e - D_i)} \pi D_i L = P - \frac{2\pi \mu v D_i L}{(D_e - D_i)} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

e

$$M_f = F \frac{d}{2} = \left[P - \frac{2\pi \mu v D_i L}{(D_e - D_i)} \right] \frac{d}{2} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Por fim, o momento M é dado por:

$$M = M_m - M_f = \frac{\pi \mu v L D_i^3}{d(D_e - D_i)} - \left[P - \frac{2\pi \mu v D_i L}{(D_e - D_i)} \right] \frac{d}{2} \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

(b) Substituindo os valores numéricos na expressão acima, chegamos a:

$$M = \frac{\pi \times 10^{-3} \times 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5^3}{0{,}1 \times 0{,}002} - \left[50 - \frac{2\pi \times 10^{-3} \times 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5}{0{,}002} \right] \times \frac{0{,}1}{2} = -0{,}458\,\mathrm{N \cdot m}$$

O momento é resitente (valor negativo). $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

A potência gasta é $|M\omega| = |M(2v/d)| = 18{,}3\,\mathrm{W}$. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

2ª Questão (3,0 pontos)

(a) O campo de velocidades fornecido é $\vec{V} = u_0\hat{\imath} + v_0\,\mathrm{sen}[\omega(t - x/u_0)]\hat{\jmath}$. O campo de aceleração é dado por:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

Como $w = 0$, chegamos a:

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\hat{\jmath}$$

Calculando as componentes do campo de aceleração:

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} = 0 \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = v_0\omega\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right) + (u_0)v_0\left(-\frac{\omega}{u_0}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right) = 0 \qquad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = 0$$

(b) A linha de corrente é calculada por

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{u_0} = \frac{\mathrm{d}y}{v_0\,\mathrm{sen}[\omega(t - x/u_0)]} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_0}{u_0}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \qquad \boxed{\mathbf{0{,}2\ pt}}$$

Integrando os dois lados:

$$y = \frac{v_0}{\cancel{u_0}}\left(-\frac{\cancel{u_0}}{\omega}\right)\left[-\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right)\right] + \mathbb{C} = \frac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right) + \mathbb{C} \qquad \boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$$

Para linhas de corrente que passam pela origem ($x = 0$, $y = 0$):

$$0 = \frac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\omega\times 0}{u_0}\right) + \mathbb{C} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{C} = -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t)$$

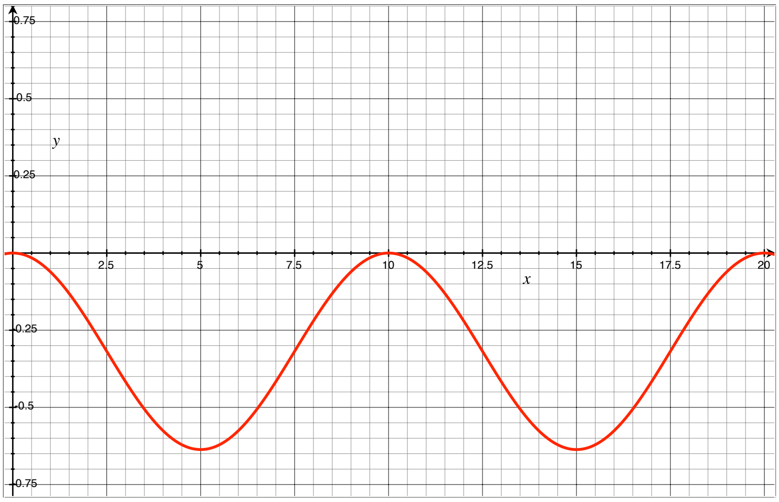
Assim, a equação das linhas de corrente que passam pela origem é:

$$y = \frac{v_0}{\omega}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right) - \cos(\omega t)\right] \qquad \boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$$

Para traçar a linha de corrente pedida, substituímos os valores numéricos fornecidos e fazemos $t = 1$, obtendo:

$$y = \frac{1}{\pi}\left[\cos\left(2\pi - \frac{2\pi x}{10}\right) - \cos(2\pi)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right) - 1\right]$$

O gráfico dessa linha de corrente está abaixo



0,2 pt

(c) Usamos as equações de trajetória, impondo que passem pela origem nos instantes iniciais dados t_0:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = u_0 \quad \Rightarrow \quad x = u_0 t + \mathbb{C}_1 \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

$$x = 0 \text{ para } t = t_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}_1 = u_0 t_0 \quad \Rightarrow \quad x = u_0(t - t_0) \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v = v_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\omega x}{u_0}\right) = v_0 \operatorname{sen}\left[\omega t - \frac{\omega \cancel{u_0}(t - t_0)}{\cancel{u_0}}\right] = v_0 \operatorname{sen}(\omega t_0)$$

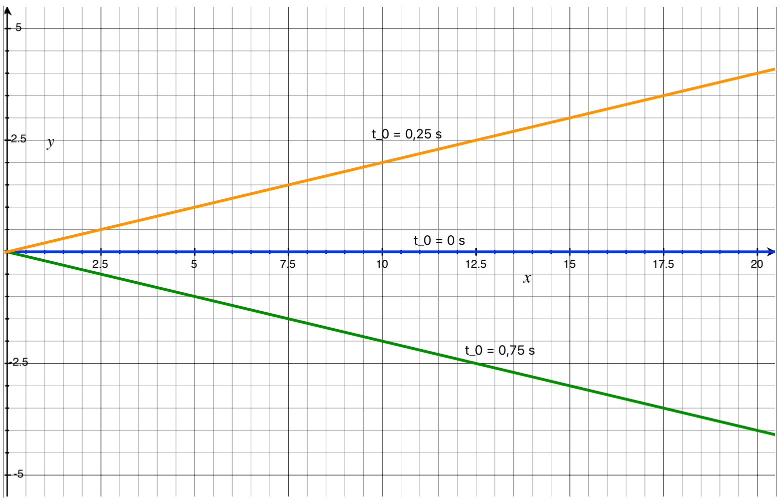
$$y = v_0 \operatorname{sen}(\omega t_0) t + \mathbb{C}_2 \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

$$y = 0 \text{ para } t = t_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}_2 = v_0 \operatorname{sen}(\omega t_0) t_0 \quad \Rightarrow \quad y = v_0 \operatorname{sen}(\omega t_0)(t - t_0) \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

As trajetórias são retas que passam pela origem, com coeficiente angular dado por

$$\frac{y}{x} = \frac{v_0}{u_0} \operatorname{sen}(\omega t_0) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi t_0)}{5}$$

Os gráficos dessas trajetórias para $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $t_0 = 0{,}25\,\mathrm{s}$ e $t_0 = 0{,}75\,\mathrm{s}$ são mostrados na figura abaixo.



0,2 pt

3ª Questão (4,0 pontos)

(a) Aplicando a equação de Bernoulli entre as seções (1) e (2), obtemos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \cancel{\rho g z_1} = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \cancel{\rho g z_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + V_1^2} \tag{1}$$

A velocidade na seção 1 é:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{4Q_1}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0{,}003}{\pi \times 0{,}04^2} = 2{,}39\,\text{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}} \tag{2}$$

Além disso, podemos relacionar a diferença de pressão $p_1 - p_2$ com a deflexão h usando a lei de Stevin:

$$p_1 - p_2 = gh(-\rho_{\text{Hg}} + \rho) = 9{,}8 \times 0{,}015 \times (-13600 + 1000) = -1852\,\text{Pa} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}} \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \times (-1852)}{1000} + 2{,}39^2} = 1{,}41\,\text{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Podemos então obter a vazão na seção 2:

$$Q_2 = V_2 A_2 = V_2 \frac{\pi D^2}{4} = 1{,}77 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

e por conservação de massa, a vazão na seção 3:

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 1{,}23 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

(b) Para achar as forças de vínculo, aplicaremos a equação integral da quantidade de movimento. Precisaremos antes disso determinar a velocidade e a pressão na seção 3. Como sabemos a vazão do item anterior, podemos obter a velocidade:

$$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{4Q_3}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0{,}00123}{\pi \times 0{,}02^2} = 3{,}90\,\text{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

Para encontrar p_3, aplicamos a equação de Bernoulli entre as seções 1 e 3, considerando o plano horizontal de referência passando pelo centro da tubulação principal:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g \cancel{z_1} = p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \cancel{\rho g z_3} \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_3^2) - \rho g z_3$$

$$p_3 = 1 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (2{,}39^2 - 3{,}90^2) - 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}2 = 93286\,\text{Pa} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento na direção x obtemos:

$$\underbrace{-\rho V_1^2\frac{\pi D^2}{4}}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}\underbrace{+\rho V_2^2\frac{\pi D^2}{4}}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}\underbrace{+\rho V_3^2\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}} = \underbrace{p_1\frac{\pi D^2}{4}}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}\underbrace{-p_2\frac{\pi D^2}{4}}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}\underbrace{-p_3\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}+R_x$$

$$R_x = \rho(V_2^2 - V_1^2)\frac{\pi D^2}{4} + \rho V_3^2\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta - (p_1 - p_2)\frac{\pi D^2}{4} + p_3\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta = 21{,}77\,\mathrm{N} \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento na direção y obtemos:

$$\underbrace{\rho V_3^2\frac{\pi d^2}{4}\operatorname{sen}\theta}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}} = \underbrace{-W - p_3\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta}_{\boxed{\textbf{0,2 pt}}}+R_y$$

$$R_y = \rho V_3^2\frac{\pi d^2}{4}\operatorname{sen}\theta + W + p_3\frac{\pi d^2}{4}\cos\theta = 74{,}10\,\mathrm{N} \quad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$